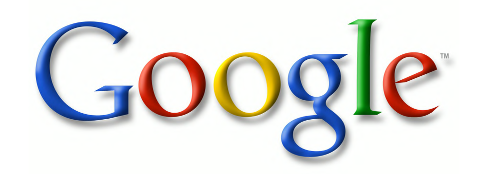
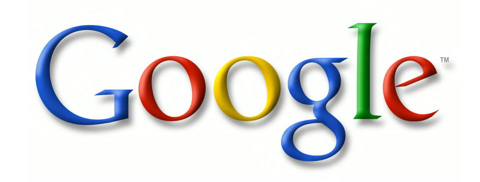





Stanford University Libraries
3 6105 027 441 208







BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *J. Hoüel,* Secrétaire de la rédaction, Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux, cours d'Aquitaine, 66.

1927 Paris — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET
ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,
AVEC LA COLLABORATION DE
MM. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAÏEF, BROCARD, LAISANT, LAMPE,
LESPIAULT, MANSION, POTOCKI, RADAU, RAYET, WEYR, ETC.,
SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

DEUXIÈME SÉRIE.
TOME V. — ANNÉE 1881.
(TOME XVI DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1881

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LIPSCHITZ (R.). — LEHRBUCH DER ANALYSIS. Zweiter Band : DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG. 1 vol. in-8°, 734 pages. Bonn, 1880.

M. Lipschitz donne, dans ce second Volume de son *Lehrbuch der Analysis*, un Traité élémentaire de Calcul différentiel et intégral ; toutes les questions qui touchent aux principes y sont développées avec un soin et une rigueur qui lui donnent un intérêt particulier.

Des deux sections qui le composent, la plus considérable de beaucoup concerne les quantités réelles (p. 1-626) ; l'ordre suivi est intéressant à connaître.

Après la définition de la dérivée et les règles usuelles de dérivation, l'auteur introduit la notion d'intégrale définie et démontre, pour les fonctions continues ou à nombre fini de discontinuités, l'existence de la limite vers laquelle converge la somme dont la considération sert de point de départ pour l'établissement de cette notion.

Cette notion suffit pour établir, au moyen de l'intégration par

parties, la formule de Taylor; le reste complémentaire se présente alors sous la forme d'une intégrale définie; de cette forme on déduit sans difficulté la forme de Lagrange, en supposant toutefois que la dérivée qui y figure est continue; cette restriction n'est pas nécessaire lorsqu'on emploie le mode de démonstration qu'a fait connaître M. Ossian Bonnet. L'auteur déduit du théorème de Taylor les développements en série les plus simples et les applique ensuite à la solution des questions de maxima et de minima pour les fonctions d'une seule variable.

Passant ensuite aux fonctions de plusieurs variables, il développe la notion d'une *multiplicité* (*Mannigfaltigkeit*) à extension simple, double, triple, etc., discontinue ou continue, de façon à éclaircir le concept de fonctions de plusieurs variables et à préparer la définition des intégrales multiples; puis il s'occupe des différentielles partielles et totales, du développement au sein des fonctions de plusieurs variables, des maxima et minima de ces mêmes fonctions, et des applications géométriques du Calcul différentiel.

M. Lipschitz donne ensuite les règles concernant l'intégration des fonctions rationnelles par rapport à la variable d'intégration et à la racine carrée d'un polynôme entier par rapport à cette même variable, etc. Il examine le cas où la fonction sous le signe d'intégration devient infinie, où les limites d'intégration deviennent infinies, les conditions sous lesquelles il est permis de différentier sous le signe $\int$; il consacre un Chapitre à la démonstration du théorème de Lejeune-Dirichlet sur la possibilité de développer en série de Fourier une fonction qui n'a qu'un nombre fini de discontinuités, de maxima et de minima. La considération des séries trigonométriques fournit l'occasion d'expliquer la distinction si profonde, introduite aussi par Lejeune-Dirichlet, entre les séries qui convergent uniformément et celles qui ne jouissent pas de cette propriété.

Les lecteurs du *Bulletin* (¹) connaissent l'ingénieuse démonstration que M. Lipschitz a donnée de l'existence d'un système de fonctions satisfaisant à un système d'équations différentielles du premier ordre, en supposant certaines conditions remplies. Cette démons-

(¹) 1ʳᵉ série, t. X, p. 149.

tration, qui est de nature à pénétrer dans l'enseignement, avait une place marquée dans son Livre.

La notion d'intégrale multiple est développée avec les détails nécessaires pour la rendre claire et précise ; la transformation de ces intégrales est traitée au double point de vue de la Géométrie et de l'Analyse. Enfin le Chapitre qui termine cette première Section est consacré à l'inversion d'un système de fonctions.

Quant à la deuxième Section (p. 627-734), on y trouvera les principes de la théorie des variables complexes.

SCHELL (W.). — THEORIE DER BEWEGUNG UND DER KRÄFTE. Zweite Auflage. II Band. — 1 vol. in-8°, 618 pages. Leipzig, 1880.

Nous avons rendu compte récemment (1) du premier Volume de la seconde édition du Traité de Mécanique de M. Schell; cette œuvre, maintenant complète, rendra assurément les plus grands services ; en la comparant à la première édition, on voit combien l'auteur a été préoccupé du désir de ne rien omettre d'important. Les travaux récents de M. Ball sur la dynamique d'un corps solide, de M. Darboux sur l'équilibre astatique lui ont fourni de nouveaux et intéressants Chapitres. Les améliorations de détail sont trop nombreuses pour être relevées.

Le premier Volume était consacré à la Cinématique, ce mot étant toutefois entendu dans un sens plus large qu'on ne fait d'habitude : le second roule sur la Statique et la Dynamique.

Il convient de faire quelques réserves sur la façon dont l'auteur introduit l'idée de masse et passe de la notion d'accélération à celle de force ; au surplus, on est obligé de reconnaître qu'il y a là une difficulté qui est dans le fond des choses et que jusqu'à présent on n'a guère résolue. On regrettera peut-être aussi que, dans un Ouvrage de cette nature, habituellement si riche en renseignements de toute sorte, le problème de la composition des forces appliquées à un point matériel n'ait pas été traité avec les

---

(1) *Voir* le *Bulletin*, 2e série, t. IV, 1re Partie, p. 33.

développements qu'il comporte ; sur ce point, les renseignements bibliographiques eux-mêmes font défaut : c'est là un reproche que, d'habitude, on n'a pas à faire à M. Schell.

L'étude de la composition des rotations ayant été faite avec détail dans le premier Volume, le problème analogue de la réduction d'un système de forces appliquées à un corps solide libre est traité ici brièvement ; toutefois, l'auteur trouve là l'occasion naturelle de développer quelques-uns des résultats géométriques obtenus par M. Sylvester et M. Cayley touchant la solution de ce problème : *Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que n droites données puissent être les lignes d'action de n forces qui maintiennent un corps solide en équilibre*. Il s'occupe ensuite du cas où l'on a affaire à un corps solide ou à un système de corps solides dont les mouvements possibles doivent satisfaire à certaines conditions ; il donne de nombreuses applications, il développe particulièrement la théorie du polygone funiculaire, des ponts suspendus, des chaînettes, et expose en détail les analogies entre le problème de l'équilibre d'un fil flexible et celui du mouvement d'un point matériel, analogies déjà signalées par Galilée et développées par Möbius. Vient ensuite l'exposition du principe des vitesses virtuelles, établi successivement dans des cas de plus en plus généraux, éclairci par de nombreux exemples.

Un Chapitre est consacré aux recherches de M. Ball sur la statique d'un corps solide. M. Schell propose de revenir à l'expression *dyname,* déjà introduite par Plücker, pour désigner l'ensemble de la force et du couple, de plan normal à cette force, qui équivalent à l'ensemble des forces appliquées à un corps solide, au lieu d'employer les mots *Wrench* et *Winder,* proposés par M. Ball et M. Fiedler ; l'élément cinématique correspondant est la vitesse de torsion (*Windungsgeschwindigkeit*). A chaque dyname, ou vitesse de torsion, est attaché un complexe de droites du premier ordre, dont l'axe est la ligne d'action de la force ou l'axe instantané du mouvement hélicoïdal, et dont le paramètre est le rapport de l'axe du couple à la force ou, dans le mouvement hélicoïdal, de la vitesse de translation à la vitesse de rotation. L'expression symétrique du travail d'un dyname relativement à une vitesse de torsion virtuelle et la surface réglée à laquelle M. Cayley a donné le nom de *cylindroïde,* et qui est le lieu géo-

métrique des axes des complexes du premier ordre qui admettent une congruence commune, jouent dans la théorie de M. Ball un rôle fondamental.

Le travail élémentaire du dyname s'obtient en multipliant la quantité

$$(p_\alpha + p_\beta)\cos\lambda - d\sin\lambda,$$

où p_α, p_β sont les paramètres des deux complexes relatifs au dyname et à la vitesse de torsion, λ et d l'angle et la plus courte distance de leurs axes, par le produit par dt de la force et de la vitesse de rotation; lorsque le *coefficient virtuel* (ou l'*invariant*)

$$(p_\alpha + p_\beta)\cos\lambda - d\sin\lambda$$

des deux complexes est nul, les deux complexes sont dits en involution, ou encore leurs axes (auxquels on doit supposer, comme dans tout ce qui suit, que les paramètres sont attachés) sont dits *réciproques*. La considération du cylindroïde conduit à une règle simple pour la composition de deux dynames ou de deux vitesses de torsion. Lorsqu'un axe est réciproque à deux axes donnés, il est réciproque à tous les axes appartenant au cylindroïde déterminé par les deux premiers.

Lorsque les mouvements possibles d'un corps solide doivent satisfaire à certaines conditions, il ne peut pas prendre de mouvement de torsion autour d'un axe quelconque, mais autour d'axes appartenant à un certain système dont la nature dépend des conditions imposées et qui est déterminé quand on se donne un certain nombre de ses axes (avec leurs paramètres); le nombre s de ces axes qui déterminent le système d'axes de la nature considérée est la dimension (*Stufe*) de ce système; un axe réciproque à s axes d'un système de la $s^{\text{ième}}$ dimension est réciproque à tous les axes de ce système; l'ensemble de tous les axes réciproques aux axes d'un système de dimension s constitue un système d'axes de la dimension $6 - s$. Tout système de forces équivalent à un dyname dont l'axe appartient au système réciproque laisse le corps solide en équilibre. Enfin la dimension de la mobilité d'un système, ou, si l'on veut, son degré de liberté, est égal à la dimension du système d'axes autour desquels il peut prendre un mouvement hélicoïdal. M. Schell examine chacun des degrés de liberté pos-

sibles, et développe les propriétés géométriques et mécaniques qui correspondent aux différents cas.

Si l'on considère un corps solide auquel des forces sont appliquées en des points déterminés, de telle façon que, si le corps vient à changer de position, la grandeur et la direction des forces restent invariables, on peut se proposer d'étudier les conditions et les positions d'équilibre du corps solide, etc. Cette étude a été l'objet des travaux de Möbius, de Minding et de M. Darboux; elle est liée à l'étude de la stabilité de l'équilibre d'un corps solide, dans le cas où, après un déplacement infiniment petit, les forces appliquées aux mêmes points du corps conservent la même grandeur et la même direction : ce dernier problème conduit à l'introduction du *viriel*. M. Schell expose avec détail les principaux résultats de ces diverses recherches.

La théorie de l'attraction et du potentiel est traitée avec les développements qu'elle comporte : on trouvera dans ce Chapitre, outre de nombreux exemples, le résumé des recherches géométriques et analytiques de Chasles et de Lejeune-Dirichlet sur l'attraction exercée sur un point par un ellipsoïde, les conditions analytiques par lesquelles on peut, d'après Dirichlet, définir le potentiel, et l'application de ces conditions à la vérification de la formule qui donne le potentiel d'une couche ellipsoïdale.

Enfin la première Partie se termine par un Chapitre consacré au frottement.

La seconde Partie comprend la dynamique du corps solide et des systèmes, la dynamique du point ayant été faite dans le premier Volume sous le nom de *Cinématique*.

Quatre Chapitres sont consacrés à la dynamique du corps solide. Dans les deux premiers, l'auteur s'occupe de la réduction des forces instantanées et des forces du premier ordre : en d'autres termes, en désignant par m la masse d'un des points invariablement liés qui constituent le corps solide, par v et y les segments de droite qui figurent sa vitesse et son accélération, et traitant, par exemple, les segments tels que mv comme des forces appliquées au corps solide, il se propose de trouver la force unique et le couple unique qui peuvent remplacer l'ensemble des forces mv; de même pour les forces my. Cette réduction le conduit, par une voie naturelle, aux propositions fondamentales qui concernent le mouvement

d'un corps solide et aux équations dont ce mouvement dépend. Les deux Chapitres suivants sont consacrés aux applications les plus connues, touchant le mouvement d'un corps solide libre ou soumis à certaines liaisons : mouvement dans son plan d'une figure plane solide, qui n'est soumise à aucune force, qui est soumise à l'action d'un couple constant ou de la pesanteur; mouvement d'un corps solide libre (sans forces extérieures); mouvement d'un corps pesant, ou soumis à l'influence d'un couple, dans le cas où l'ellipsoïde central est de révolution; pendule composé; mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe ; mouvement d'une sphère sur un plan horizontal, d'un cylindre sur un plan gauche, etc.

L'exposition concise des principaux résultats obtenus par M. Ball sur la dynamique du corps solide a été rejetée après le développement des principes généraux de la dynamique des systèmes.

Le développement de ces principes comprend trois Chapitres : on y trouvera, outre les propositions élémentaires qui sont la base de cette théorie, le principe de Gauss (*Princip des kleinsten Zwanges*), le théorème dû à Newton touchant la similitude en Mécanique, la démonstration due à Lejeune-Dirichlet du critérium de la stabilité de l'équilibre, les équations générales de Lagrange avec de nombreuses applications, le principe d'Hamilton et le principe de la moindre action, les équations canoniques d'Hamilton, la réduction aux quadratures, obtenue par Jacobi, des problèmes de Dynamique qui ne dépendent que de deux variables, lorsqu'il existe une fonction des forces et que l'on connaît une intégrale des équations différentielles autres que l'équation des forces vives.

Enfin, dans le dernier Chapitre sont traités quelques problèmes relatifs au mouvement d'un système variable : mouvement d'une corde vibrante; mouvement d'un fluide élastique en général et dans des cas particuliers, dans un cylindre limité ou illimité, etc; mouvement oscillatoire dans un milieu élastique indéfini ; figure d'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation.

DINI (U.). — SERIE DI FOURIER e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale. — 1 vol. in-8°, 328 p. Pise, 1880.

La multitude de travaux, dispersés dans des Recueils divers, qui, pour chaque question particulière, va sans cesse en grandissant, rend de temps en temps nécessaire la publication d'un Livre qui réunisse l'ensemble des résultats acquis sur cette question, et marque en quelque sorte une étape dans le progrès incessant des Mathématiques. Par sa connaissance approfondie du sujet, comme par ses recherches personnelles, M. Dini était parfaitement préparé pour écrire un tel Livre sur les divers modes de représentation analytique d'une fonction arbitrairement donnée dans un intervalle déterminé. Celui qu'il donne au public se distingue par une recherche extrême de la généralité et de la rigueur.

Lejeune-Dirichlet a fondé, comme on sait, la représentation d'une telle fonction au moyen d'une série de Fourier sur l'étude des intégrales définies

$$\int_0^a f(x)\,\frac{\sin hx}{\sin x}\,dx, \quad \int_a^b f(x)\,\frac{\sin hx}{\sin x}\,dx$$

et des limites vers lesquelles tendent ces intégrales quand h augmente indéfiniment par des valeurs impaires. Pénétrant plus avant dans une voie déjà ouverte par M. P. du Bois-Reymond [1], M. Dini étudie les intégrales analogues

$$\int_0^a f(x)\,\varphi(x,h)\,dx, \quad \int_a^b f(x)\,\varphi(x,h)\,dx,$$

où a, b sont des nombres différents de zéro, de même signe et habituellement compris entre des limites déterminées, et où $\varphi(x,h)$ est une fonction qui, pour toute valeur finie de h, est, dans l'intervalle considéré, susceptible d'intégration, qui pour x différent de zéro reste finie, même pour h infini, qui dans le voisinage du point $x = 0$, à droite ou à gauche suivant que a est positif ou né-

[1] *Journal de Borchardt*, t. 79.

gatif, prend des valeurs d'autant plus grandes que h est plus grand, telle enfin que, pour toutes les valeurs considérées de a et de b, on ait

$$\lim_{h=\infty} \int_a^b \varphi(x, h)\, dx = 0,$$

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a \varphi(x, h)\, dx = G,$$

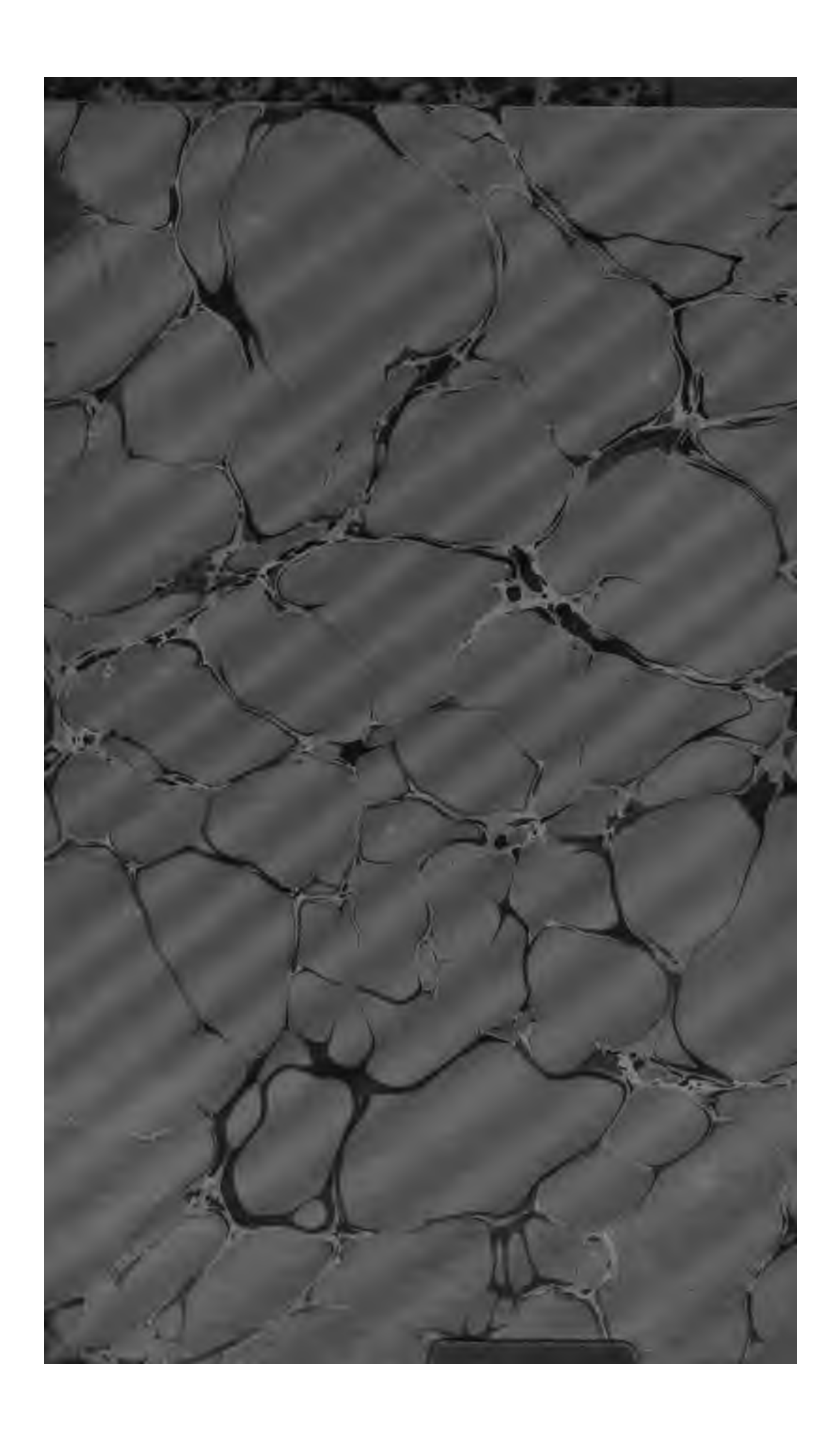
G étant une quantité déterminée, finie, différente de zéro et indépendante de a; telles sont les fonctions $\frac{\sin hx}{\sin x}$, he^{-hx}, $\frac{h}{1+h^2x^2}$, etc. M. Dini parvient ainsi, par la généralisation de l'idée de Lejeune-Dirichlet, à fonder une méthode uniforme pour trouver une infinité de développements (en séries de fonctions spéciales) propres à représenter analytiquement une fonction arbitrairement donnée dans un intervalle déterminé.

Cette méthode est fondée sur les égalités

$$(1) \qquad \lim_{h=\infty} \int_a^b f(x)\, \varphi(x, h)\, dx = 0,$$

$$(2) \qquad \lim_{h=\infty} \int_0^b f(x)\, \varphi(x, h)\, dx = f(+0) \lim_{h=\infty} \int_0^b \varphi(x, h)\, dx;$$

la première égalité subsiste toutes les fois que, de a à b, la fonction $f(x)$ reste finie et susceptible d'intégration; quant à la seconde, il faut tout d'abord que $f(+0)$ ait un sens; cette condition étant remplie ainsi que les précédentes, elle aura toujours lieu, ainsi que l'a démontré M. du Bois-Reymond, si la fonction $\varphi(x, h)$, outre qu'elle satisfait aux conditions générales qui lui sont toujours imposées, est telle que l'intégrale $\int_0^\varepsilon \varphi_1(x, h)\, dx$, où figure la valeur absolue φ_1 de la fonction φ, étendue à un intervalle $0, \varepsilon$ à droite du point 0, reste toujours inférieure à un nombre fini, lors même que h croît indéfiniment. Si la fonction $\varphi(x, h)$ n'est pas astreinte à cette dernière condition, la formule (2) ne subsiste plus pour toutes les fonctions $f(x)$, assujetties seulement à être finies et susceptibles d'intégration; mais il existe des conditions de formes très diverses et qui laissent encore à la fonction $f(x)$ une généralité singulière et telles que,







BULLETIN

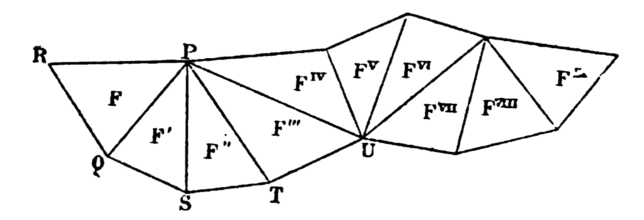
DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES

certain triangle PQS. Si le point (A, B) traverse le côté PS, la forme F′ cesse d'être réduite, et une nouvelle substitution fournit une forme F″ réduite à l'intérieur du triangle PST. Enfin, si l



point (A, B) traverse le côté PT, une dernière substitution conduit à une forme F‴ réduite à l'intérieur du triangle PTU. Nous écrirons ainsi cette forme F‴

$$\begin{aligned}&(g_3+g'_3\mathrm{A}+g''_3\mathrm{B})(y-z)^2+(h_3+h'_3\mathrm{A}+h''_3\mathrm{B})(z-x)^2\\&\quad+(k_3+k'_3\mathrm{A}+k''_3\mathrm{B})(x-y)^2+(l_3+l'_3\mathrm{A}+l''_3\mathrm{B})(x-t)^2\\&\quad+(m_3+m'_3\mathrm{A}+m''_3\mathrm{B})(y-t)^2+(n_3+n'_3\mathrm{A}+n''_3\mathrm{B})(z-t)^2.\end{aligned}$$

Or il arrive que l'on a

$$\begin{gathered}\frac{g_3}{g}=\frac{h_3}{h}=\frac{k_3}{k}=\frac{l_3}{l}=\frac{m_3}{m}=\frac{n_3}{n},\\ \frac{g'_3}{g'}=\frac{h'_3}{h'}=\frac{k'_3}{k'}=\frac{l'_3}{l'}=\frac{m'_3}{m'}=\frac{n'_3}{n'},\\ \frac{g''_3}{g''}=\frac{h''_3}{h''}=\frac{k''_3}{k''}=\frac{l''_3}{l''}=\frac{m''_3}{m''}=\frac{n''_3}{n''}.\end{gathered}$$

Appelons λ la valeur commune des premiers rapports, $\frac{\lambda}{\mu}$ celle des deuxièmes et $\frac{\lambda}{\nu}$ celle des derniers ; on voit alors que la forme F‴ n'est autre chose que la forme F, dans laquelle on a remplacé A par $\frac{\mathrm{A}}{\mu}$, B par $\frac{\mathrm{B}}{\nu}$, et qu'on a multipliée par λ. La multiplication par λ n'intervient pas dans les conditions de réduction, et l'on voit alors que, si F est réduit quand on a $\mathrm{A}=\mathrm{A}_1$, $\mathrm{B}=\mathrm{B}_1$, la forme F‴ sera réduite quand on aura $\mathrm{A}=\mathrm{A}_1\mu$, $\mathrm{B}=\mathrm{B}_1\mu$. Le triangle dans lequel F‴ est réduit peut donc se déduire par une transformation très simple du triangle relatif à la forme F.

Si l'on applique à la forme F''' la substitution par laquelle on passe de la forme F à la forme F', on obtiendra une forme F^{iv}, qui sera réduite dans un triangle que la même transformation fournira, au moyen du triangle relatif à F'. De même la substitution qui mène de F' à F'', appliquée à F^{iv}, fournira une forme F^{v}, réduite dans un triangle qu'on déduira du triangle relatif à F'' par cette même transformation que donne le changement de A en $A\mu$ et de B en $B\nu$. En continuant ainsi, on obtiendra une série indéfinie de triangles formant une chaine dans le plan des coordonnées, et, si le point (A, B) se meut indéfiniment à l'intérieur de cette chaîne, les formes réduites relatives aux différentes positions de (A, B) s'obtiendront toutes en employant périodiquement et indéfiniment les substitutions qui conduisent de F à F', F'' et F''', ou les substitutions inverses de celles-ci, si l'on parcourt la chaine en sens inverse.

Mais la chaine de triangles obtenue par cette période de substitutions ne couvrira pas entièrement le plan.

Si le point (A, B), d'abord situé dans le triangle PQR, traverse le côté PR, la forme F cesse d'être réduite, et une certaine substitution conduira à une forme F_1, réduite dans un nouveau triangle, et, en poursuivant la même marche que plus haut, on arriverait à trouver une deuxième chaine de triangles, engendrée par l'emploi périodique et indéfiniment répété de trois nouvelles substitutions.

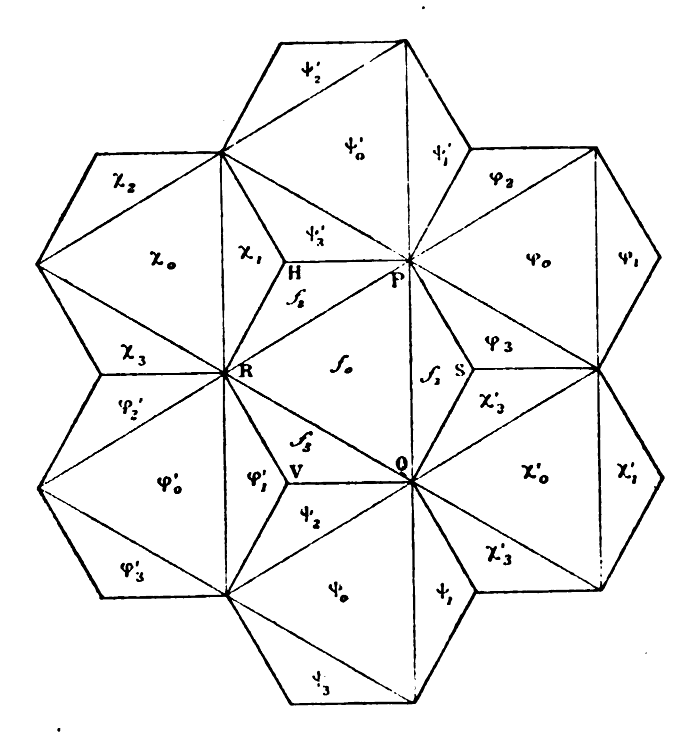
Ainsi apparaissent, dans cette théorie, deux périodes de substitutions. Au lieu de prendre le triangle PQR pour origine des deux chaines, on pourrait prendre un quelconque des triangle, déjà obtenus, et l'on verrait facilement qu'on couvrirait le plan d'un réseau de triangles. L'étude de ce réseau conduit au résultat suivant.

Qu'on imagine un carrelage hexagonal et qu'on inscrive dans chaque hexagone un triangle; on obtiendra la représentation suivante, où, pour simplifier, nous figurerons les hexagones égaux et réguliers, bien qu'ils soient, en réalité, inégaux et irréguliers.

Les formes relatives à un point quelconque du plan peuvent toutes être déduites de quatre formes fondamentales qui sont les formes relatives aux quatre triangles inscrits dans un quelconque des hexagones qui couvrent le plan. Nous prendrons par exemple, pour formes fondamentales, les formes f_0, f_1, f_2, f_3. Nous avons écrit f_0 dans le triangle relatif à la forme f_0, f_1 dans le triangle relatif à la forme f_1, et ainsi de suite. La substitution qui conduit

de f_0 à f_1 est aussi celle qui conduirait de φ_0 à φ_1, de φ'_0 à φ'_1, de ψ_0 à ψ_1, ..., et, en général, la même substitution lie les formes affectées des mêmes indices dans chaque hexagone.

Il en résulte que, les formes affectées de l'indice zéro étant obtenues, il sera facile d'obtenir toutes les autres au moyen des substitutions qui font passer de f_0 à f_1, f_2 ou f_3.



Appelons S l'ensemble des substitutions par lesquelles on passe de f_0 à f_1, puis à φ_3 et à φ_0, c'est-à-dire la substitution par laquelle on passerait directement de f_0 à φ_0; on trouve que cette même substitution permet aussi de passer de φ'_0 à f_0, c'est-à-dire que la substitution inverse de S, que nous désignerons par S^{-1}, conduirait de f_0 à φ'_0. Et de même χ'_0 et ψ'_0 se déduiraient de f_0 par des substitutions inverses de celles qui permettent d'obtenir χ_0 et ψ_0. Soit T la substitution qui conduit de f_0 à ψ_0; on trouve alors qu'on obtient χ_0 en appliquant à f_0 la substitution T^{-1} suivie de la substitution S^{-1}. De sorte qu'il n'y a en réalité que deux séries de sub-

stitutions, celles qui conduisent de f_0 à φ_0 en passant par f_1 et φ_3, et celles qui conduisent de f_0 à ψ_0 en passant par f_3 et ψ_2. Une forme relative à un point quelconque du plan peut être déduite des formes fondamentales f_0, f_1, f_2, f_3 en répétant, dans un certain ordre, ces deux séries de substitutions, car, ces deux séries de substitutions permettant d'entourer l'hexagone fondamental $f_0 f_1 f_2 f_3$ de six nouveaux hexagones, on voit qu'en partant d'un des hexagones déjà obtenus on couvrirait le plan d'un réseau hexagonal indéfini.

Ainsi les irrationnelles relatives à des équations dont les trois racines sont réelles conduiront à des formes ternaires dont la réduction indéfinie s'opère au moyen de deux périodes de substitutions, et, si l'analogie avec les fractions continues est manifeste, la double périodicité marque aussi la différence entre les irrationnelles du second degré et les irrationnelles du troisième.

Dans l'exemple précédent, les polygones limitatifs des formes réduites sont des triangles. M. Charve donne d'autres exemples où s'offrent des quadrilatères, et, dans le cas général, les polygones limitatifs sont des hexagones.

Mais, dans tous les cas, M. Charve montre qu'il y aura toujours deux et seulement deux périodes de substitutions, permettant d'obtenir toutes les formes réduites au moyen d'un certain nombre de formes fondamentales réduites.

Le travail que nous analysons se termine par une application de la théorie précédente aux unités complexes formées avec les racines d'équations du troisième degré à coefficients entiers, le coefficient du premier terme étant l'unité.

M. Charve démontre que, pour les équations n'ayant qu'une racine réelle, les unités complexes sont des puissances entières positives ou négatives d'une certaine unité complexe, et, pour les équations dont les trois racines sont réelles, les unités complexes peuvent toutes être formées par le produit des puissances entières positives ou négatives de deux d'entre elles.

FAVARO (Prof. Antonio). — Inedita Galileiana. Frammenti tratti dalla Biblioteca nazionale di Firenze. — Venezia, tipografia di Giuseppe Antonelli, 1880; 143 pages, 1 pl.

Il y a quelque temps, M. Favaro, dont les travaux sur l'histoire des sciences exactes sont connus et appréciés de tous les savants, annonça dans une petite brochure qu'il pensait publier bientôt des Communications sur des manuscrits encore inédits de Galilée. Cette nouvelle dut paraître d'autant plus étonnante, qu'il était universellement admis que tous les fragments de cette nature avaient été insérés dans la célèbre édition complète d'Albèri.

L'écrit d'une certaine étendue que nous avons sous les yeux, et qui est un tirage à part, extrait des *Atti del R. Istituto Veneto*, réalise pourtant de tout point la promesse de l'éditeur. M. Favaro a compulsé avec soin les deux cent quatre-vingt-treize volumes de la Bibliothèque nationale de Florence qui, outre les manuscrits proprement dits du maître et des exemplaires de ses œuvres imprimées, contiennent encore tous les écrits possibles se rapportant à lui et à son école, et il a reconnu que sous l'ordre merveilleux qui semble régner dans le Catalogue de cette Collection se cachent certaines irrégularités, en conséquence desquelles un grand nombre de fragments sont restés inaperçus. Ainsi il nous fait connaître d'abord le *Procemium* inédit de la Notice historique de Viviani sur Galilée, dans lequel on remarque cette circonstance peu connue que le grand physicien portait le plus vif intérêt à l'Agriculture et à la pratique rationnelle de cet art. Les études sorties de la plume même de Galilée et que M. Favaro nous fait connaître sont de trois espèces différentes, hydrostatiques, géométriques et hydrotechniques. Dans un Appendice, non encore imprimé, à la *Bilancetta*, on trouve des indications étendues sur la perte de poids des substances les plus diverses dans l'eau ; ces déterminations de poids spécifiques, où l'on aperçoit évidemment les efforts de l'auteur pour atteindre la plus grande exactitude, ne peuvent qu'être du plus haut intérêt pour l'histoire de la Physique. Viennent ensuite certaines constructions et propositions de Géométrie élémentaire, auxquelles Galilée avait l'habitude de renvoyer, dans ses célèbres Leçons sur la fortification. Il est à remarquer que, pour le pentagone régulier,

il reproduit la construction au moyen d'une seule ouverture de compas que Chasles ([1]) attribue à Albert Dürer; que, pour l'heptagone régulier, il enseigne la construction approximative d'Aboul Wefâ ([2]); qu'enfin il fait voir aussi comment un polygone régulier de *n* côtés, que l'on sait déjà inscrire dans un cercle, peut être construit sur un côté donné. Le théorème, presque évident d'ailleurs, qu'*un triangle construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle équivaut à la somme de deux triangles semblables construits sur les deux autres côtés* est donné avec une démonstration très élégante, visiblement calquée sur celle que donne Euclide du théorème de Pythagore. On trouve encore dans cet écrit quelques remarques sur le nivellement. En troisième lieu, enfin, l'éditeur nous fait connaître un Rapport rédigé par Galilée sur l'amélioration de la rivière du Bisenzio, et dont on ne possédait jusqu'ici qu'une partie; cette pièce est d'une véritable importance au point de vue de l'Hydraulique. Dans un Appendice, on trouve une Lettre autographe, adressée probablement à Cioli, ainsi que des matériaux nouvellement découverts pour l'histoire de Galilée. Ces nouveaux documents sont particulièrement intéressants pour l'histoire de la première horloge à pendule.

Nous croyons pouvoir conclure, de quelques indications de l'éditeur, que ses recherches sur les fragments de Galilée ne sont pas encore près d'être terminées. Nous souhaitons à cette entreprise méritoire une continuation de succès, et nous ne doutons pas que nos vœux ne soient partagés par tous ceux qui s'intéressent à la Science historique. S. G.

MÉLANGES.

SUR LE PROBLÈME DES BŒUFS D'ARCHIMÈDE;

PAR M. PAUL TANNERY.

En 1773, Lessing fit connaître, d'après un manuscrit de la bi-

---

([1]) *Aperçu historique*, p. 530 (édit. allemande, p. 642).
([2]) CANTOR. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, t. I, p. 640.

bliothèque de Wolfenbüttel, une épigramme grecque donnant, en quarante-quatre vers, l'énoncé d'un problème d'Analyse indéterminée qu'Archimède aurait, dans une Lettre à Ératosthènes, proposé aux géomètres alexandrins.

Il s'agit de calculer le nombre des bœufs du Soleil, distingués en quatre troupeaux, de couleurs blanche, noire, rousse et mêlée. D'après les notations modernes, les nombres λ, $\varkappa$, ξ, μ des taureaux de ces quatre troupeaux et ceux λ', $\varkappa'$, ξ', μ' des vaches doivent satisfaire aux neuf équations suivantes, qui contiennent deux autres indéterminées, p et q :

$$(1)\quad \lambda = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\varkappa + \xi, \qquad (4)\quad \lambda' = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(\varkappa + \varkappa'),$$

$$(2)\quad \varkappa = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\mu + \xi, \qquad (5)\quad \varkappa' = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)(\mu + \mu'),$$

$$(3)\quad \mu = \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)\lambda + \xi, \qquad (6)\quad \mu' = \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(\xi + \xi'),$$

$$(7)\quad \xi' = \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)(\lambda + \lambda'),$$

$$(8)\quad \lambda + \varkappa = p^2, \qquad (9)\quad \mu\varkappa + \xi = \frac{q(q+1)}{2}.$$

La solution du système formé par les sept premières conditions n'offre aucune difficulté ; elle donne les huit inconnues comme multiples d'une même indéterminée x, par des coefficients qui ont d'ailleurs de huit à neuf chiffres. Cette indéterminée est supposée égale à 80 dans les nombres donnés par une scolie qui accompagnait l'épigramme dans le manuscrit et que Lessing a également publiée.

Mais ces nombres ne satisfont à aucune des deux dernières équations, qui conduisent à une équation de Pell dont la solution numérique est matériellement impossible, eu égard à la longueur des calculs qu'elle entraînerait.

L'examen du problème « des bœufs », et la question de son authenticité, en tant qu'il est attribué à Archimède, ont fait, en Allemagne, l'objet d'assez nombreux travaux (Leiste, Struve, Klügel, Hermann, Wurm, Nesselmann, Heiberg) : Gauss lui-même parait l'avoir traité à fond, mais il n'a rien publié à ce sujet. En France, il n'y a guère que Vincent (*Nouvelles Annales de Mathéma-*

tiques, t. XIV, XV) qui s'en soit occupé ; mais il ne considère comme authentiques que les trois premières conditions, et rejette toutes les autres, comme ajoutées par des mains relativement modernes.

Le *Zeitschrift für Mathematik und Physik* vient de publier (t. XXV, 1880, *Historisch-literarische Abtheilung*, p. 121-136 et 153-171), de B. Krumbiegel pour la partie philologique, de A. Amthor pour la partie mathématique, une nouvelle étude sur le *Das Problema bovinum des Archimedes*. On doit, à notre sens, la considérer comme définitive.

Sur la question de l'authenticité, les conclusions de cette étude représentent exactement l'opinion que nous avons déjà eu l'occasion d'émettre ailleurs (¹), à savoir que, dans sa forme actuelle, l'épigramme est probablement postérieure à Archimède, mais que, quant au problème lui-même, il est non seulement très possible, mais encore très vraisemblable qu'il est réellement dû au célèbre géomètre de Syracuse.

Sans répéter l'argumentation très serrée du Dr Krumbiegel, je me contenterai d'y ajouter les deux remarques que j'ai faites sur cette question.

L'une est que le passage du Scoliaste de Platon sur le Charmide, qu'Hermann a signalé le premier comme parlant de *ce qu'Archimède a appelé le problème des bœufs*, paraît copié d'un Ouvrage de Geminus, mathématicien vivant au Ier siècle avant notre ère ; on le reconnait en comparant les extraits de Geminus, faits par Proclus dans ses *Commentaires sur le premier Livre des Éléments d'Euclide*, avec ceux qu'a recueillis l'anonyme de la Collection héronienne (éd. Hultsch, p. 248), et où se retrouve le passage en question.

Notre seconde remarque est que la proposition d'un problème impossible comme celui des bœufs concorde, comme trait de caractère chez Archimède, avec l'énoncé qu'il se vante (Préface du Traité des *Spirales*) d'avoir fait de théorèmes faux dans une Lettre à Conon, dans le but de convaincre de mensonge les géomètres qui auraient prétendu en avoir trouvé les démonstrations.

(¹) *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. III, 2e série, dans notre essai sur *L'Arithmétique des Grecs dans Pappus*.

Nous allons parler plus longuement des intéressants résultats obtenus par le Dr Amthor.

Soit x l'indéterminée qui reste après la solution du système des sept premières équations; les deux dernières sont satisfaites en posant

$$x = 3.11.29.4657 y^2,$$
$$2q + 1 = t,$$
$$2.4657 y = u,$$

et en résolvant l'équation de Pell

(10) $$t^2 - 2.3.7.11.29.353 u^2 = 1,$$

de façon que

(11) $$u \equiv 0 \pmod{2.4657}.$$

M. Amthor commence par chercher la plus petite solution (t_1, u_1) de l'équation (10); la racine du déterminant se développe en une fraction continue dont la période régulière a 91 termes; il calcule t_1, qui a 45 figures, et u_1, qui en a 41.

Ces calculs, quoique fastidieux, ne sont pas exorbitants. Dans un essai en cours d'impression sur la *Mesure du cercle d'Archimède* (1), j'ai exposé comme *pouvant* être connue du géomètre de Syracuse une méthode de calculs analogues à ceux qu'entraîne le développement en fractions continues. M'étant proposé, à cette occasion, de traiter l'équation (10), je suis arrivé à une période de 58 termes, et j'ai admis que le calcul de ces termes n'eût été qu'un jeu pour Archimède. Je ne puis croire, à la vérité, qu'il ait eu la patience de calculer t_1 et u_1, comme l'a fait M. Amthor; mais qui a lu l'*Arénaire* ne peut douter que, ayant les éléments de la période, Archimède ne fût en état de déterminer l'ordre (pour nous le nombre des figures) de ces inconnues avec une approximation suffisante pour son but probable, la composition d'un problème qui rebutât tout calculateur.

Quant à satisfaire à la condition (11), il ne me parait guère supposable qu'Archimède se soit préoccupé de savoir quel surcroit de

(1) Il sera publié dans le tome IV (2e série) des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*.

besogne elle eût imposé ; mais il n'en est pas moins intéressant de voir, avec M. Amthor, à quels nombres effrayants elle conduit.

Le persévérant calculateur allemand commence par établir quelques lemmes sur l'équation de Pell $t^2 - Du^2 = 1$.

1. Soit (t_m, u_m) la solution dérivant du développement de la puissance m de $t_1 + u_1\sqrt{D}$, en sorte que

$$t_m + u_m\sqrt{D} = (t_1 + u_1\sqrt{D})^m;$$

on a en général

$$t_{m+n} = t_m t_n + u_m u_n D,$$

$$u_{m+n} = t_n u_m + t_m u_n,$$

et en particulier

$$t_{2m} = t_m^2 + u_m^2 D,$$

$$u_{2m} = 2t_m u_m.$$

2. Si l'on cherche toutes les valeurs de u satisfaisant à l'équation de Pell et divisibles par M, supposé premier, elles sont comprises sous la forme $u_{\alpha\rho}$, u_ρ étant la plus petite d'entre elles, et α étant un nombre entier quelconque.

3. Si M ne divise pas D, ni t_1, ni u_1, on a

$$t_{M-1} \equiv 1, \quad u_{M-1} \equiv 0 \pmod{M},$$

ou

$$t_{M+1} \equiv 1, \quad u_{M+1} \equiv 0 \pmod{M},$$

suivant que D est ou non résidu quadratique par rapport au premier M.

4. Par conséquent, pour trouver ρ, u_ρ étant la plus petite valeur de u satisfaisant à l'équation de Pell et divisible par M, il suffit d'essayer les diviseurs de $M - 1$ ou ceux de $M + 1$, suivant le cas; les calculs sont facilités par l'emploi du lemme **1**.

Pour satisfaire à la condition (11), il n'y a pas à s'inquiéter du facteur 2, car il divise déjà u_1; quant au premier 4657, $D = 4729494$ est non résidu quadratique par rapport à lui. Il faut donc essayer les diviseurs de

$$4658 = 2.17.137.$$

En calculant les résidus de t, u par rapport au module 4657, on trouve que la plus petite solution satisfaisant à la condition (11) est

$$t_{2329}, \quad u_{2329}.$$

M. Amthor se sert ensuite des logarithmes pour déterminer le nombre des chiffres et, par quelques remarques simples, établit que le nombre des bœufs du Soleil, d'après la solution minima, a 206545 figures.

Il suffit de remarquer qu'une page d'une Table de logarithmes de Callet ne contenant guère que 2500 chiffres, il faudrait, à ce format, un Volume de 744 pages pour imprimer les neuf nombres, partiels et total, demandés par l'épigramme.

Quant à l'énormité de pareils nombres, eu égard à nos moyens de mesure, elle dépasse absolument l'imagination; mais ils sont encore bien loin d'atteindre la limite de la *première* période de la numération proposée par Archimède dans l'*Arénaire*, soit $10^{800000000}$.

LETTRE ADRESSÉE A M. HERMITE;

PAR M. AD. STEEN.

MONSIEUR,

Permettez-moi de vous présenter encore une intégration par intégrale définie, cette fois d'une équation différentielle que personne n'a encore traitée, que je sache. Quoique la méthode que j'ai employée dans ma Lettre du mois d'août m'ait paru très exceptionnelle, c'est pourtant essentiellement la même dont je me suis servi ici. Voilà pourquoi je nourris l'espoir de pouvoir l'appliquer désormais plus amplement. Elle est brièvement caractérisée ainsi : par des transformations successives, soit par exemple des différentiations ou des substitutions, on arrive à une équation intégrable, puis on remonte à l'intégration de la proposée par des intégrales multiples qu'il faut en dernier lieu changer en une intégrale définie. Quoique les transformations des deux cas traités jusqu'à ce jour produisent une équation intégrable seulement pour certaines valeurs des constantes, il en a pourtant réussi l'intégration finale pour presque toutes les valeurs de ces constantes.

on trouve

$$z = \frac{dl \int e^{\int P dx} dx}{dx} - P,$$

ce qui rend à l'équation de v la forme

$$v'' + \left(2 \frac{dl \int e^{\int P dx} dx}{dx} - P\right) v' + cv = 0,$$

qui a l'intégrale particulière

$$v = y' \frac{dl \int e^{\int P dx} dx}{dx},$$

dépendante de celle de (1).

Par cette méthode on tire des intégrales connues de l'équation

$$y'' \pm a^2 y = 0$$

facilement celles de

$$v'' + \frac{2}{x} v' \pm a^2 v = 0,$$

puis celles de

$$v'' + \frac{4}{x} v' \pm a^2 v = 0, \quad \ldots,$$

et l'on parvient généralement à l'intégration de

$$v'' + \frac{2p}{x} v' \pm a^2 v = 0,$$

p étant un nombre positif entier.

2. Appliquons la méthode aux équations

$$(3) \quad \begin{cases} y'' - \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{b}\right) y' + cy = 0, \\ v'' + \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{b}\right) v' + cv = \ , \end{cases}$$

pour lesquelles on a

$$y = v' x^a e^{\frac{x^2}{2b}}, \quad v = y' x^{-a} e^{-\frac{x^2}{2b}}.$$

Si l'on peut faire ici

$$\frac{d.lu}{dx} = \frac{\alpha}{x} + \frac{x}{\beta}, \quad u = x^\alpha e^{\frac{x^2}{2\beta}},$$

il faut que l'équation

$$c\int u\,dx = \left(\frac{a-\alpha}{x}+\frac{x}{b}-\frac{x}{\beta}\right)u$$

ou bien celle qui en est tirée par différentiation,

$$c = (a-\alpha)(\alpha+1)x^{-2} + (\alpha+1)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{\beta}\right) + \frac{a-\alpha}{\beta} + \frac{1}{b}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{\beta}\right)x^2,$$

soit identique; α et β sont donc déterminés par les équations

$$(a-\alpha)(\alpha+1) = 0,$$

$$(\alpha+1)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{\beta}\right) + \frac{a-\alpha}{\beta} = c,$$

$$\frac{1}{b}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{\beta}\right) = 0;$$

mais, le nombre des équations surpassant celui des inconnues, il n'est pas généralement possible d'effectuer l'intégration, quels que soient a et b.

Sans entrer dans plus de détails, il suffit ici d'indiquer les deux formes suivantes de la première équation (3), dont on peut trouver les intégrales, savoir

$$y'' - \left(\frac{a}{x}+\frac{cx}{2}\right)y' + cy = 0 \quad \text{avec l'intégrale} \quad y = x^2 + 2\,\frac{a-1}{c},$$

$$y'' - \left(\frac{a}{x}+\frac{cx}{a-1}\right)y' + cy = 0 \quad \text{»} \quad y = e^{\frac{cx^2}{2(a-1)}}.$$

Il s'ensuit pour

$$v'' + \left(\frac{a}{x}+\frac{cx}{2}\right)v' + cv = 0 \quad \text{l'intégrale} \quad v = x^{1-a}e^{\frac{cx^2}{4}},$$

$$v'' + \left(\frac{a}{x}+\frac{cx}{a-1}\right)v' + cv = 0 \quad \text{»} \quad v = \frac{x^{1-a}}{1-a}.$$

Maintenant, il y a lieu de chercher si une forme algébrique ressemblant à celle de deux de ces dernières intégrales convient à des équations plus générales des formes (3). En effet, on trouve

sans difficulté les équations

$$y'' - \left(\frac{a}{x} + \frac{cx}{2p}\right)y' + cy = 0$$

et

$$y'' - \left(\frac{a}{x} + \frac{cx}{a+2p+1}\right)y' + cy = 0,$$

intégrées par des polynômes en x des degrés $2p$ et $a+2p+1$ respectivement, ou plutôt en x^2 des degrés p et $\frac{1}{2}(a+2p+1)$.

3. Les derniers résultats nous mettent sur une nouvelle voie qui mène à l'intégration des équations (3), car on voit que

$$u = y' = xz_1,$$

où z_1 est un polynôme en x^2 du degré $p-1$ ou $\frac{1}{2}(a+2p-1)$. On a donc

$$\frac{d.lu}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{z'_1}{z_1},$$

par conséquent

$$\int u\,dx = \left(a - 1 - \frac{x^2}{b}\right)z_1 - z'_1 x,$$

qui conduit à l'équation

$$z''_1 - \left(\frac{a-2}{x} + \frac{x}{b}\right)z'_1 + \frac{bc-2}{b}z_1 = 0.$$

Or, si $bc = 2p$, p entier positif, la série suivante de substitutions

$$z'_1 = xz_2, \quad z'_2 = xz_3, \quad \ldots, \quad z'_{p-1} = xz_p$$

aboutira à l'équation

$$z''_p - \left(\frac{a-2p}{x} + \frac{cx}{2p}\right)z'_p = 0,$$

ce qui donne

$$z_p = \int x^{a-2p} e^{\frac{cx^2}{4p}}\,dx,$$

partant

$$y = \int x\,dx \int x\,dx \ldots \int x\,dx \int x^{a-2p} e^{\frac{cx^2}{4p}}\,dx.$$

Pour faciliter la transformation de cette expression, qui exige $p+1$

intégrations, posons $x^2 = t$, de sorte qu'on ait

$$y = \frac{1}{2^{p+1}} \int^{p+1} t^{\frac{a-2p-1}{2}} e^{\frac{ct}{4p}} dt^{p+1} = \frac{1}{2^{p+1}[p]} \int_k^{x^2} (x^2 - \alpha)^p \alpha^{\frac{a-2p-1}{2}} e^{\frac{c\alpha}{4p}} d\alpha.$$

On a omis le polynôme en x^2 du degré p provenant par les constantes des intégrations, parce qu'il faut déterminer k de façon que ce polynôme puissere présenter l'intégrale particulière de l'article 2.

Mais laissons de côté ce détail et cherchons directement l'intégrale de la première des équations (3), en faisant dans l'intégrale déjà définie $2p = bc$ et en omettant son coefficient constant, c'est-à-dire supposons

$$y = \int_k^{x^2} (x^2 - \alpha)^{\frac{1}{2}bc} \alpha^{\frac{a-bc-1}{2}} e^{\frac{\alpha}{2b}} d\alpha.$$

Il faut donc trouver une valeur de k qui satisfasse à l'équation

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} & bc(bc-2)x^2 \int_k^{x^2} (x^2-\alpha)^{\frac{1}{2}bc-2} \alpha^{\frac{a-bc-1}{2}} e^{\frac{\alpha}{2b}} d\alpha \\ & + (bc - abc - cx^2) \int_k^{x^2} (x^2-\alpha)^{\frac{1}{2}bc-1} \alpha^{\frac{a-bc-1}{2}} e^{\frac{\alpha}{2b}} d\alpha \\ & \qquad + c \int_k^{x^2} (x^2-\alpha)^{\frac{1}{2}bc} \alpha^{\frac{a-bc-1}{2}} e^{\frac{\alpha}{2b}} d\alpha = 0. \end{aligned} \right.$$

La dernière intégrale se change facilement en

$$cx^2 \int_k^{x^2} (x^2-\alpha)^{\frac{1}{2}bc-1} \alpha^{\frac{a-bc-1}{2}} e^{\frac{\alpha}{2b}} d\alpha - c \int_k^{x^2} (x^2-\alpha)^{\frac{1}{2}bc-1} \alpha^{\frac{a-bc+1}{2}} e^{\frac{\alpha}{2b}} d\alpha,$$

dont le premier terme s'évanouit avec l'avant-dernier de l'équation (4).

Puis on a, par une intégration par parties,

$$\begin{aligned} & \int_k^{x^2} (x^2-\alpha)^{\frac{1}{2}bc-1} \alpha^{\frac{a-bc+1}{2}} e^{\frac{\alpha}{2b}} d\alpha \\ & = 2b \left[(x^2-\alpha)^{\frac{1}{2}bc-1} \alpha^{\frac{a-bc+1}{2}} e^{\frac{\alpha}{2b}} \right]_k^{x^2} \\ & + bc(bc-2) \int_k^{x^2} (x^2-\alpha)^{\frac{1}{2}bc-2} \alpha^{\frac{a-bc+1}{2}} e^{\frac{\alpha}{2b}} d\alpha \\ & - b(a-bc+1) \int_k^{x^2} (x^2-\alpha)^{\frac{1}{2}bc-1} \alpha^{\frac{a-bc-1}{2}} e^{\frac{\alpha}{2b}} d\alpha, \end{aligned}$$

dont le premier terme s'évanouit si $bc > 2$ et $k = -\infty$; le deuxième, multiplié par $-c$, se réduit avec la première de (4) à

$$bc(bc-2)\int_{-\infty}^{x^2}(x^2-\alpha)^{\frac{1}{2}bc-1}\alpha^{\frac{a-bc-1}{2}}e^{\frac{\alpha}{2b}}d\alpha.$$

Après ces réductions, il ne reste dans l'équation (4) que cette dernière intégrale, dont le coefficient

$$bc(bc-2)+bc(1-a)+bc(a-bc+1)$$

est évidemment égal à zéro.

Donc *l'équation*

$$y''-\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{b}\right)y'+cy=0$$

a pour $bc > 2$ *l'intégrale particulière*

$$y=\int_{-\infty}^{x^2}(x^2-\alpha)^{\frac{1}{2}bc}\alpha^{\frac{a-bc-1}{2}}e^{\frac{\alpha}{2b}}d\alpha,$$

et l'on en tire pour l'équation

$$v''+\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{b}\right)v'+cv=0$$

l'intégrale

$$v=y'x^{-a}e^{-\frac{x^2}{2b}}=x^{1-a}e^{-\frac{x^2}{2b}}\int_{-\infty}^{x^2}(x^2-\alpha)^{\frac{1}{2}bc-1}\alpha^{\frac{a-bc-1}{2}}e^{\frac{\alpha}{2b}}d\alpha.$$

Voilà, Monsieur, les choses élémentaires dont je vous importune aujourd'hui. Je ne suis pas sans espoir d'entendre quelque jour votre opinion là-dessus. Je serais assez heureux si ce petit travail vous plaisait aussi bien que le précédent.

Recevez, Monsieur, l'expression de la plus haute considération de votre confrère dévoué. AD. STEEN.

SUR LA SOMMATION DES NOMBRES φ;

PAR M. JOSEPH PEROTT.

Soit h un nombre entier quelconque; on désigne par $\varphi(h)$ le nombre qui indique combien il y a de nombres premiers à h et non supérieurs à h. Si l'on donne à h les valeurs successives

(1) $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \ldots, N, \ldots,$

on obtient les nombres φ correspondants

(2) $1, 1, 2, 2, 4, 2, 6, 4, 6, 4, 10, 4, 12, 6, 8, 8, 16, 6, 8, 8, \ldots \varphi(N), \ldots.$

On voit que la série (2) est des plus irrégulières. Si cependant, au lieu de considérer chaque terme de la série isolément, on prend la somme des N premiers termes, le rapport de cette somme à celle des termes correspondants de la série (1) tend de plus en plus vers une limite constante à mesure qu'on fait croître le nombre N. La démonstration de cette propriété des nombres φ fait l'objet du présent travail.

Un terme quelconque $\varphi(h)$ de la série (2) pouvant être considéré comme indiquant le nombre de fractions irréductibles de dénominateur h, la somme des N premiers termes de la série donnera le nombre de toutes les fractions dont les dénominateurs ne surpassent pas N. Or il est clair qu'on pourra aussi arriver à la connaissance du nombre de ces fractions en partant de la considération de leurs numérateurs. Le nombre de fractions de numérateur k sera évidemment

$$\varphi(N,k) - \varphi(k-1,k),$$

$\varphi(N,k)$ désignant la quantité de nombres non supérieurs à N et premiers à k.

On aura, par conséquent,

$$\sum_{h=1}^{h=N} \varphi(h) = \sum_{k=1}^{k=N} \varphi(N,k) - \sum_{k=1}^{k=N} \varphi(k) = \Phi(N);$$

donc

$$\sum_{h=1}^{h=N} \varphi(h) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=N} \varphi(N,k).$$

Mais nous avons

$$\varphi(N,k) = N - \sum E\left(\frac{N}{p_l}\right) + \sum E\left(\frac{N}{p_l p_m}\right) - \ldots,$$

la sommation s'étendant à tous les facteurs premiers de k.

Par conséquent,

$$(3)\quad \sum_{h=1}^{h=N} \varphi(h) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left\{N^2 - \sum\left[E\left(\frac{N}{p_l}\right)\right]^2 + \sum\left[E\left(\frac{N}{p_l p_m}\right)\right]^2 - \ldots\right\};$$

car chaque terme $E\left(\frac{N}{p_l p_m p_n \ldots}\right)$ figure juste autant de fois dans la somme $\sum_{k=1}^{k=N} \varphi(N,k)$ qu'il y a de nombres non supérieurs à N et divisibles par $p_l p_m p_n \ldots$. Les symboles E de Legendre s'annulant, du reste, toutes les fois que l'argument devient moindre que l'unité, la série (3) s'arrêtera d'elle-même.

Divisons maintenant les deux membres de la formule (3) par N^2; nous aurons

$$\frac{\sum_{h=1}^{h=N} \varphi(h)}{N^2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{N^2} + 1 - \frac{\sum\left[E\left(\frac{N}{p_l}\right)\right]^2}{N^2} + \frac{\sum\left[\left(\frac{N}{p_l p_m}\right)\right]^2}{N^2} - \ldots\right\}$$

ou, en posant $E\left(\frac{N}{p_l p_m p_n \ldots}\right) = \frac{N}{p_l p_m p_n} - \theta_{l,m,n}, \ldots,$

$$\frac{\sum_{h=1}^{h=N} \varphi(h)}{N^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{N^2} + 1 - \sum \frac{1}{p_l^2} + \sum \frac{1}{p_l^2 p_m^2} - \sum \frac{1}{p_l^2 p_m^2 p_n^2}\right. \quad \text{(les dén. } D \leqq N^2\text{)}$$

$$+ \frac{2}{N}\left(\sum \frac{\theta_l}{p_l} - \sum \frac{\theta_{l,m,n}}{p_l p_m} + \sum \frac{\theta l, m, n}{p_l p_m p_n} - \ldots\right) \quad (D \leqq N)$$

$$\left. - \sum \frac{\theta_l^2}{N^2} + \sum \frac{\theta_{l,m}}{N^2} - \sum \frac{\theta_{l,m,n}^2}{N^2} + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \sum \frac{1}{p_l^2} + \sum \frac{1}{p_l^2 p_m^2} - \sum \frac{1}{p_l^2 p_m^2 p_n^2} + \ldots\right)$$

$$+ \frac{1}{2N^2} + \frac{\xi}{N}\left(1 + \sum \frac{1}{p_l} + \sum \frac{1}{p_l p_m} + \sum \frac{1}{p_l p_m p_n} + \ldots\right),$$

où ξ est un nombre moindre que l'unité en valeur absolue.

Mais l'on a toujours

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}<\left(\frac{N}{N-1}\right)^{N}\log N<\frac{N}{N-1}\,e\log N;$$

par conséquent,

$$\frac{\Phi(N)}{N^2}=\frac{1}{2}\left(1-\sum\frac{1}{p_l^2}+\sum\frac{1}{p_l^2p_m^2}-\sum\frac{N=1}{p_l^2p_m^2p_n^2}+\ldots\right)\qquad(D\leqq N^2)$$
$$+\frac{1}{2N^2}+\frac{\xi_1 e\log N}{N-1};$$

donc

$$\lim_{N=\infty}\frac{\Phi(N)}{N^2}=\lim_{N=\infty}\frac{\Phi(N)}{N(N+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{N=\infty}1-\sum\frac{1}{p_l^2}+\sum\frac{1}{p_l^2p_m^2}\qquad(D\leqq N^2)$$
$$=\frac{3}{\pi^2}=0,30396\,35509\,27013\,31433.$$

Le Tableau suivant permettra de juger de l'approximation avec laquelle la fonction $\frac{3N^2}{\pi^2}$ représente les valeurs du symbole $\Phi(N)$ pour les cent premiers nombres naturels :

N	$\Phi(N)$	$\frac{E\left(\frac{6N^2}{\pi^2}\right)}{2}+\frac{1}{4}\left[1-(-1)^{E\left(\frac{6N^2}{\pi^2}\right)}\right]$	N	$\Phi(N)$	$\frac{E\left(\frac{6N^2}{\pi^2}\right)}{2}+\frac{1}{4}\left[1-(-1)^{E\left(\frac{6N^2}{\pi^2}\right)}\right]$
1	1	0	17	96	88
2	2	1	18	102	99
3	4	3	19	120	110
4	6	5	20	128	122
5	10	8	21	140	134
6	12	11	22	150	147
7	18	15	23	172	161
8	22	19	24	180	175
9	28	25	25	200	190
10	32	30	26	212	205
11	42	37	27	230	222
12	46	44	28	242	238
13	58	51	29	270	256
14	64	60	30	278	274
15	72	68	31	308	292
16	80	78	32	324	311

N	$\Phi(N)$	$\frac{E\left(\frac{6N^2}{\pi^2}\right)}{2}+\frac{1}{4}\left[1-(-1)^{E\left(\frac{6N^2}{\pi^2}\right)}\right]$
33	344	331
34	360	351
35	384	372
36	396	394
37	432	416
38	450	439
39	474	462
40	490	486
41	530	511
42	542	536
43	584	562
44	604	588
45	628	616
46	650	643
47	696	671
48	712	700
49	754	730
50	774	760
51	806	791
52	830	822
53	882	854
54	900	886
55	940	919
56	964	953
57	1000	988
58	1028	1023
59	1086	1058
60	1102	1094
61	1162	1131
62	1192	1168
63	1228	1206
64	1260	1245
65	1308	1284
66	1328	1324
67	1394	1364
68	1426	1406
69	1470	1447
70	1494	1489
71	1564	1532
72	1588	1576
73	1660	1620
74	1696	1666
75	1736	1710
76	1772	1756
77	1832	1802
78	1856	1849
79	1934	1897
80	1966	1945
81	2020	1994
82	2060	2044
83	2142	2094
84	2166	2145
85	2230	2196
86	2272	2248
87	2328	2301
88	2368	2354
89	2456	2408
90	2480	2462
91	2552	2517
92	2596	2573
93	2656	2629
94	2702	2686
95	2774	2743
96	2806	2801
97	2902	2860
98	2944	2919
99	3004	2979
100	3044	3039

Lisbonne, le 27 novembre 1880.

contemporains ; nous allons maintenant les juger à notre point de vue actuel.

En première ligne se trouve son *Algorismi tractatus*, qui a été imprimé à Padoue en 1483 et qui, sans être, comme l'a cru M. Chasles, le premier Livre imprimé sur le système décimal (car, à la page 47, M. Favaro cite un traité anonyme de Calcul, publié à Trévise en 1478), n'en doit pas moins être considéré comme un document remarquable au point de vue historique, dont M. Favaro énumère avec soin les éditions successives. Il rapporte aussi les jugements des plus éminents mathématiciens de l'époque ancienne sur ce Livre, et il consacre à cette occasion, une longue digression à la recherche de l'étymologie du mot *algorithmus*. Prosdocimo, toutefois, n'a jamais eu la moindre notion sur cette origine : il définit (p. 73) son livre comme un *liber de numeris; ars numerandi vel introductio in numerum*, telle est l'interprétation habituelle du mot en question. Il compte, d'accord avec les autorités reconnues de son siècle, neuf règles fondamentales (*species*). Dans la sommation des progressions arithmétiques, il distingue les deux cas d'un nombre pair ou impair de termes, et à ce propos son historien s'étend sur les différentes règles données pour cet objet et rapportées dans son travail. Il en est de même relativement à la *mensa Pythagoræ*, qui est décrite sous plusieurs formes diverses. Mais ce qui doit exciter le plus vif intérêt, ce sont les extraits d'un manuscrit de la Bibliothèque bodleyenne d'Oxford que M. Favaro a reproduits dans son Livre. Ce manuscrit renferme non seulement le Traité d'Arithmétique, mais encore six Livres de Géométrie avec figures et un Traité *De motibus corporum supercœlestium*, accompagné de Tables. C'est, du moins, le sens de la description donnée par l'auteur anglais de la découverte du manuscrit, description sur l'exactitude de laquelle M. Favaro élève avec raison des doutes. Il est très vraisemblable que Prosdocimo n'est pas l'auteur de cette Géométrie, et le seul vestige de ses études géométriques parait se réduire à un fragment conservé à Bologne et traitant de la construction d'un parallélogramme équivalent à un triangle. Au contraire, l'Ouvrage d'Astronomie est bien réellement sorti de sa plume, et, d'ailleurs, l'enseignement dont il a été chargé dans les dernières années de sa vie suffit pour établir qu'il s'est beaucoup occupé d'Astronomie : ainsi il a composé un Commentaire sur la

sphère (c'est-à-dire, sur la *Sphère* de Sacro Bosco), un grand Recueil de Tables des mouvements des planètes, formant un Ouvrage détaché, une sorte de Catalogue d'étoiles corrigé ; un écrit astrologique, intitulé *Tractatus de electionibus,* une Table de la marche du Soleil et de la Lune à travers les signes du zodiaque, et deux Mémoires sur l'astrolabe. Enfin il s'est occupé en passant de la partie théorique de la Musique, qui, non seulement à cette époque, mais encore bien longtemps après, était considérée comme faisant partie des Mathématiques appliquées.

Cette monographie, faite avec un soin admirable, apporte à tous les points de vue d'importantes contributions à l'histoire des sciences mathématiques; mais, à d'autres égards, elle a encore un grand mérite : celui de montrer, par un remarquable exemple, comment doivent être écrites les biographies scientifiques.

S.

BOURGUET. — SUR LES INTÉGRALES EULÉRIENNES (Thèse présentée à la Faculté des Sciences).

Ce travail se compose de deux Parties. Dans la première, M. Bourguet expose les travaux de Stirling et de Binet sur la détermination de $l\Gamma(a)$. La seconde forme la partie originale. Elle contient des résultats nouveaux et intéressants, et elle comble une lacune dans la théorie des intégrales eulériennes.

On sait que $\Gamma(a)$ est défini, pour toute valeur de a dont la partie réelle est positive, par l'intégrale définie

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx.$$

Elle jouit de la propriété fondamentale

$$(1) \qquad a\Gamma(a) = \Gamma(a+1),$$

qui sert à définir la fonction dans le reste du plan. $\Gamma(a)$ jouit encore de la propriété

$$(2) \qquad \Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

qui, d'abord démontrée pour le cas où la partie réelle de a est comprise entre o et 1, s'étend à tout le plan au moyen de la relation (1).

M. Prym, en partageant l'intégrale en deux parties,

$$\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}\,dx + \int_1^{\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx$$
$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{1}\,\frac{1}{a+1} + \frac{1}{1.2}\,\frac{1}{a+2} - \ldots + \int_1^{\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx,$$

décompose $\Gamma(a)$ en deux fonctions uniformes, dont la seconde est holomorphe dans tout le plan. Cette dernière, en effet, est égale à

$$\int_1^{\infty} x^{\alpha-1}\cos\beta\, lx\, dx + i\int_1^{\infty} x^{\alpha-1}\sin\beta\, lx\, dx,$$

qui est bien holomorphe dans toute l'étendue du plan.

En désignant la première par $P(a)$ et la seconde par $Q(a)$, on a deux fonctions qui jouissent de la propriété suivante,

$$(3)\qquad \begin{cases} P(a+1) = aP(a) - \dfrac{1}{e}, \\ Q(a+1) = aQ(a) + \dfrac{1}{e}, \end{cases}$$

d'où

$$P(a+1) + Q(a+1) = a[P(a) + Q(a)],$$

et, comme pour toute valeur de a telle que la partie réelle soit positive, on a

$$(4)\qquad \Gamma(a) = P(a) + Q(a);$$

au moyen des relations (2) et (3), la relation (4) s'étend à tout le plan.

$P(a)$ n'a pas d'autres pôles que o, -1, -2, ...; donc

$$\sin a\pi\, P(a)$$

est holomorphe dans tout le plan; par suite, $\sin a\pi\,\Gamma(a)$ est holomorphe dans tout le plan; par suite, $\dfrac{1}{\Gamma(1-a)}$ est aussi holomorphe dans tout le plan, puisque $\dfrac{1}{\Gamma(1-a)} = \dfrac{\sin a\pi}{\pi}\,\Gamma(a)$.

Ainsi $\frac{1}{\Gamma(a)}$, que nous désignons par $G(a)$, peut être développée en série convergente suivant les puissances croissantes de a et pour toutes les valeurs de a. C'est M. Weierstrass qui, le premier, a fait connaître cette propriété de $\Gamma(a)$.

M. Bourguet fait connaître d'abord une limite simple des coefficients du développement.

M. Heine, prenant l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int e^{z} z^{-a}\,dz$$

sur le contour suivant, l'axe des x depuis $-\infty$ jusqu'à une petite distance de l'origine $-\eta$, un cercle autour de l'origine de rayon η, retour vers l'infini par le même chemin, trouve

$$G(a) = \frac{1}{2\pi i}\int e^{z} z^{-a}\,dz.$$

Reprenant la même intégrale sur le même contour en agrandissant seulement la circonférence et lui donnant pour rayon 1, et sachant que les deux intégrales ont la même valeur, puisque les deux contours ne comprennent pas de point critique, il vient

$$\begin{aligned} G(a) &= \frac{\sin a\pi}{\pi}\int_1^{\infty} e^{-\rho}\rho^{-a}\,d\rho + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\cos\omega}\cos[(1-a)\omega + \sin\omega]\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_1^{\infty} e^{-\rho}\left[e^{-a(l\rho-\pi i)} - e^{-a(l\rho+\pi i)}\right]d\rho \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\cos\omega}\cos[(1-a)\omega + \sin\omega]\,d\omega. \end{aligned}$$

En désignant par γ_n et δ_n le coefficient de a^n dans les deux développements, on a

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n}{2\pi i\,\Gamma(n+1)}\int_1^{\infty} e^{-\rho}\left[(l\rho - \pi i)^n - (l\rho + \pi i)^n\right]d\rho,$$

$$\delta_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi\,\Gamma(n+1)}\int_0^{\pi} e^{\cos\omega}\,{\sin \atop \cos}(\omega + \sin\omega)\,\omega^n\,d\omega.$$

Donc, en valeur absolue,

$$\delta_n < \frac{(-1)^{n+1}}{\pi\,\Gamma(n+1)}\,\frac{e\,\pi^{n+1}}{n+1}.$$

Pour calculer la valeur approchée de y_n, il faut dégager son expression des imaginaires. Pour cela, on pose

$$l\rho = r\cos\omega, \qquad \pi = r\sin\omega,$$

et alors il vient

$$y_n = \frac{(-1)^n}{\pi^2\,\Gamma(n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho}\rho\,[(l\rho)^2 + \pi^2]^{\frac{n+2}{2}} \sin n\omega\, d\omega.$$

Le facteur $e^{-\rho}\rho\,[(l\rho)^2 + \pi^2]^{\frac{n+2}{2}}$ n'a qu'un maximum qui correspond à la racine de l'équation

$$(l\rho)^2 - \frac{n+2}{\rho - 1}\,l\rho + \pi^2 = 0.$$

La racine de cette équation va en augmentant avec n.

Pour obtenir une valeur approchée de

$$y_n = \frac{(-1)^n}{\pi^2\,\Gamma(n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho}\rho\,[(l\rho)^2 + \pi^2]^{\frac{n+2}{2}} \sin n\omega\, d\omega,$$

on partage l'intégrale en $\frac{n}{2}$ parties égales, de telle sorte que dans chacune de ces parties $\sin n\omega$ conserve le même signe, l'argument $n\omega$ variant de π.

Soient

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ f,\ i,\ j,\ k,\ l,\ m,\ n,\ \ldots,\ x,\ y,\ z$$

les valeurs absolues des intégrales partielles ; il est clair, puisque le facteur qui accompagne $\sin n\omega$ va en augmentant, passe par un maximum et puis va en diminuant, que ces intégrales sont dans le même cas.

Soit k la plus grande ; on aura

$$\mathrm{A} = (k - l) + (m - n) + \ldots = k - (l - m) - \ldots,$$

$$\mathrm{B} = (k - j) + (i - f) + \ldots = k - (j - i) - \ldots.$$

Toutes les parenthèses étant positives,

$$0 < A < k, \quad 0 < B < k;$$

donc

$$-k < A + B - k < k.$$

Ainsi l'intégrale totale est plus petite, en valeur absolue, que la plus grande des intégrales partielles.

Soit μ le maximum du facteur $e^{-\rho}\rho\left[(l\rho)^2 + \pi^2\right]^{\frac{n+2}{2}}$,

$$\gamma_n < \frac{\mu}{\pi^2\Gamma(n+1)n}\int_0^\pi \sin\omega\, d\omega = \frac{2\mu}{\pi^2 n\,\Gamma(n+1)}.$$

Soient μ, μ' les valeurs correspondant à n et $n+1$,

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{e^{-\rho'}\rho'}{e^{-\rho}\rho}\left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{2}}\left(\frac{l\rho'}{\rho'-1} : \frac{l\rho}{\rho-1}\right)^{\frac{n+2}{2}}\left[\frac{l\rho'}{\rho'-1}(n+3)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Le premier et le troisième facteur sont plus petits que 1; le second s'approche de $e^{\frac{1}{2}}$, en augmentant, donc

$$\frac{\mu'}{\mu} < \left[e\frac{l\rho'}{\rho'-1}(n-3)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Pour $n = 20$, $\left(e\frac{l\rho'}{\rho'-1}\right)^{\frac{1}{2}}$ est sensiblement égal à 1. Donc, pour n supérieur à 20,

$$\frac{\mu'}{\mu} < \sqrt{n+3}.$$

De plus,

$$\mu_{20} < 2\sqrt{1.2\ldots22}.$$

Donc, pour n supérieur à 20,

$$\mu_n < 2\sqrt{1.2\ldots(n+2)}.$$

Donc

$$\gamma_n < \frac{4\sqrt{\Gamma(n+3)}}{\pi^2 n\,\Gamma(n+1)},$$

ce qui est sensiblement égal à $\frac{4}{\pi^2\sqrt{\Gamma(n+1)}}$. Par conséquent,

$$\gamma_n < \frac{4}{\pi^2\sqrt{\Gamma(n+1)}}.$$

M. Bourguet a ainsi trouvé, pour valeur approchée du coefficient de a^{19},

$$0,0000000001240,$$

tandis que la vraie valeur est

$$0,00000000000104.$$

Voici, à présent, comment on obtient les coefficients du développement

$$G(a) = a(a+1)(1 + A_1 a + A_2 a^2 + A_3 a^3 + \ldots).$$

On a, d'après Gauss,

$$G(a) = n^{-a} a(1+a)\left(1+\frac{a}{2}\right)\left(1+\frac{a}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{a}{n}\right).$$

Le facteur

$$\left(1+\frac{a}{2}\right)\left(1+\frac{a}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{a}{n}\right) = 1 + A'_1 a + A'_2 a^2 + \ldots + A'_{n-1} a^{n-1}.$$

Le coefficient A'_i s'obtient en faisant la somme des combinaisons i à i des quantités $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}$. Il est facile de déduire ces coefficients les uns des autres. En effet,

$$i\Sigma a_1 a_2 \ldots a_i = \Sigma a_1 \Sigma a_1 a_2 \ldots a_{i-1} - \Sigma a_1^2 \Sigma a_1 a_2 \ldots a_{i-2} + \ldots \pm \Sigma a_i^i,$$

d'où

$$iA'_i = S_1 A_{i-1} - S_2 A_{i-2} + S_3 A_{i-3} - \ldots \pm S_i.$$

D'autre part,

$$n^{-a} = 1 - \frac{aln}{1} + \frac{a^2(ln)^2}{1.2} - \ldots$$

Donc

$$\frac{G(a)}{a(a+1)} = \left[1 - \frac{aln}{1} + \frac{a^2(ln)^2}{1.2} - \ldots\right](1 + A'_1 a + A'_2 a^2 + A'_3 a^3 + \ldots)$$
$$= 1 + A_1 a + A_2 a^2 + A_3 a^3 + \ldots.$$

loppement de M. Prym :

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+2) &= \mathrm{P}(x+2) + \mathrm{Q}(x+2) \\
&= \mathrm{P}(x+2) + \frac{1}{e}(x+2) + x(x+1)\mathrm{Q}(x) \\
&= \frac{1}{x+2} - \frac{1}{1}\,\frac{1}{x+3} + \frac{1}{1.2}\,\frac{1}{x+3} - \ldots \\
&\quad + \frac{1}{e}(x+2) + c_0 x + \begin{array}{c|c|l} c_1 & x^2 + c_2 & x^3 + \ldots \\ + c_0 & + c_1 & \end{array} \\
&= 1 + \mathrm{B}_1 x + \mathrm{B}_2 x^2 + \ldots.
\end{aligned}$$

Après avoir formé le développement

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{1}\,\frac{1}{x+3} + \frac{1}{1.2}\,\frac{1}{x+4} + \ldots,$$

développement facile, on obtient les coefficients $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots$, par identification. M. Bourguet a ainsi calculé les dix-huit premiers coefficients $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{17}$.

On a

$$\begin{aligned}
c^n &= \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_1^\infty e^{-x} x^{-1} (lx)^n \, dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_1^\infty e^{-x} x^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{lx}{\sqrt{x}}\right)^n dx.
\end{aligned}$$

Or le maximum du facteur $\left(\frac{lx}{\sqrt{x}}\right)$ est $\frac{2}{e}$: donc

$$\begin{aligned}
c_n &< \frac{\left(\frac{2}{e}\right)^n}{\Gamma(n+1)} \int_1^\infty e^{-x} x^{\frac{n}{2}-1} \, dx < \frac{\left(\frac{2}{e}\right)^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \\
&= \frac{2}{n}\left(\frac{2}{e}\right)^n \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma(n+1)} \\
&= \frac{2}{n}\left(\frac{2}{e}\right)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \, \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},
\end{aligned}$$

et, en remplaçant $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$ par la valeur approchée de Laplace,

MÉLANGES.

SUR DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES PROVENANT DE L'INVERSION DES INTÉGRALES DE DEUX FONCTIONS DONNÉES;

PAR M. L. FUCHS, à Heidelberg.

(Mémoire présenté à la Soc. roy. des Sciences de Gœttingue, le 8 janvier 1881.)

Traduit par M. STEPHANOS.

Dans une Communication publiée dans les *Nachrichten* de la Société royale des Sciences de Gœttingue (février 1880, p. 170 et suiv.), j'ai défini des fonctions de plusieurs variables, lesquelles doivent leur origine à l'inversion des intégrales des solutions des équations différentielles linéaires homogènes. J'ai présenté en ce lieu, et avec plus de développements dans le *Journal de Borchardt*, t. 89, p. 151 et suiv. (¹), un exemple de pareilles fonctions, en introduisant certaines restrictions pour le cas des équations différentielles du second ordre. Plus tard j'ai dressé, dans les *Nachrichten* de la Société royale des Sciences de Gœttingue (juin 1880, p. 445 et suiv.) (²), le Tableau des équations différentielles remplissant ces restrictions, et donné en même temps les intégrales de ces équations différentielles.

Ayant porté par la suite mes efforts à trouver les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les équations différentielles linéaires et homogènes du second ordre pour qu'elles puissent donner lieu, par l'inversion mentionnée, à deux fonctions de deux variables indépendantes, telles que toute fonction symétrique de ces fonctions soit une fonction uniforme des deux variables, je suis parvenu à une généralisation du problème, et cela en prenant, au lieu des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre, certaines fonctions présentant un ensemble de caractères particuliers. C'est la solution de ce problème, pour les fonctions ainsi caractérisées, que je me permets de présenter dans ce qui suit.

(¹) *Voir* la traduction de ce Mémoire dans ce *Bulletin*, IV_1, 278.
(²) Cette Note a aussi paru, en traduction, dans ce *Bulletin*, IV_1.

Parmi ces fonctions sont comprises entre autres les solutions des équations différentielles linéaires d'*ordre quelconque* (et par conséquent aussi les fonctions algébriques, lesquelles satisfont toujours à des équations différentielles linéaires), de sorte que dans ce qui suit est contenue aussi la résolution de ce problème particulier : *Trouver de quelle nature doivent être ces solutions pour que, par l'inversion de leurs intégrales, on arrive à des fonctions de deux variables dont les fonctions symétriques soient uniformes.*

I.

Soient $f(z)$, $\varphi(z)$ deux fonctions de z dont le quotient ne soit pas une constante et lesquelles, pour chaque valeur de la variable indépendante, prennent un nombre limité ou illimité de valeurs *déterminées*, tandis que pour chaque valeur $z=a$ de cette variable, pour laquelle elles deviennent infinies ou subissent une ramification, de même que pour $z=\infty$, elles admettent des développements procédant respectivement suivant les puissances entières de $(z-a)^{\frac{1}{n}}$ ou de $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}}$ (n étant un nombre entier positif), et ne présentant qu'un nombre limité de puissances négatives et de produits de telles puissances par des puissances entières positives (et dont les exposants ne surpassent pas un nombre fini) de $\log(z-a)$ ou de $\log\frac{1}{z}$ respectivement. Nous ajouterons encore la restriction que les plus petits exposants des puissances de $z-a$ ou de $\frac{1}{z}$, multipliées par des facteurs logarithmiques, ne doivent surpasser respectivement l'unité négative ou l'unité positive. Les valeurs a seront appelées, dans la suite, *points singuliers* des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$.

Lorsque z accomplit un nombre illimité de circuits, le quotient $\zeta=\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ peut atteindre une valeur indépendante de z. Ces valeurs de ζ seront désignées, par la suite, par la lettre γ. Nous supposerons qu'alors une au moins des fonctions $\int f(z)dz$, $\int\varphi(z)dz$ devient, après le parcours de tous ces circuits, infinie pour toute valeur de z. Si de plus, après l'accomplissement d'un nombre limité de circuits, il arrive que, pour une valeur $z=b$, ζ prend une des

valeurs γ, il faudra de même qu'alors une au moins des fonctions $\int f(z)\,dz$, $\int\varphi(z)\,dz$ devienne infinie pour $z=b$.

Nous pouvons, sans atteindre à la généralité, admettre que, pour chaque point singulier a et pour $z=\infty$, les fractions qui entrent respectivement en exposants dans les diverses puissances de $z-a$ ou de $\frac{1}{z}$ aient un dénominateur commun, et le même pour les deux fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, puisque, si le contraire avait lieu, on pourrait prendre pour dénominateur n le moindre commun multiple des divers dénominateurs.

Un exemple de telles fonctions est fourni par les solutions des équations différentielles linéaires homogènes de l'espèce que j'ai caractérisée dans mon Mémoire publié dans le *Journal de Borchardt*, t. 66, p. 146, éq. (12).

Nous allons maintenant nous proposer la question de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions z_1, z_2 des variables indépendantes u_1, u_2, définies par les équations

$$
(\mathrm{A})\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\int_{\delta_1}^{z_1} f(z)\,dz+\int_{\delta_2}^{z_2} f(z)\,dz=u_1,\\
&\int_{\delta_1}^{z_1} \varphi(z)\,dz+\int_{\delta_2}^{z_2} \varphi(z)\,dz=u_2,
\end{aligned}
\right.
$$

— où δ_1, δ_2 sont des constantes arbitraires pour lesquelles les quantités $f(\delta_1)$, $f(\delta_2)$, $\varphi(\delta_1)$, $\varphi(\delta_2)$ admettent des valeurs déterminées, et où les intégrations prises entre les mêmes limites doivent être effectuées le long d'un même chemin —, soient les racines d'une équation quadratique dont les coefficients sont des fonctions uniformes des variables u_1, u_2 aux environs de tous les couples de valeurs finies de ces variables.

II.

Soient, aux environs de $z_1=\delta_1$, $z_2=\delta_2$,

$$
(1)\qquad \left\{
\begin{aligned}
f(z_1)&=\alpha_0+\alpha_1(z_1-\delta_1)+\ldots,\\
\varphi(z_1)&=\alpha'_0+\alpha'_1(z_1-\delta_1)+\ldots,\\
f(z_2)&=\beta_0+\beta_1(z_2-\delta_2)+\ldots,\\
\varphi(z_2)&=\beta'_0+\beta'_1(z_2-\delta_2)+\ldots;
\end{aligned}
\right.
$$

les équations (A) donnent alors

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha_0(z_1-\delta_1)+\beta_0(z_2-\delta_2)+\ldots=u_1,\\ \alpha'_0(z_1-\delta_1)+\beta'_0(z_2-\delta_2)+\ldots=u_2.\end{cases}$$

Puisque δ_1, δ_2 représentent des quantités arbitraires, et que $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ n'a pas, d'après l'hypothèse, une valeur constante, on peut supposer que la quantité $\alpha_0\beta'_0-\alpha'_0\beta_0$ soit différente de zéro. On obtient alors (Jacobi, *Journal de Crelle*, t. 6, p. 274), pour $z_1-\delta_1$, $z_2-\delta_2$, des développements procédant suivant les puissances positives de u_1, u_2, valables pour les environs de $u_1=0$, $u_2=0$. Ces développements servent alors à définir les fonctions z_1, z_2 dans ce voisinage. En faisant maintenant parcourir aux u_1, u_2 des chemins arbitraires et indépendants entre eux et partant de 0, 0, les fonctions z_1, z_2 décrivent des chemins correspondants en restant holomorphes dans le voisinage des valeurs de u_1, u_2 parcourues, tant qu'aucune des quantités z_1, z_2 ne devient infinie ou ne coïncide avec quelqu'un des points singuliers des fonctions $f(z), \varphi(z)$, et aussi tant qu'aucun des quotients $\zeta_1=\frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)}$, $\zeta_2=\frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$ n'atteint une des valeurs γ, et enfin tant que les z_1, z_2 n'obtiennent des valeurs satisfaisant à l'équation

$$(\text{B})\qquad \Delta=\begin{vmatrix} f(z_1) & f(z_2)\\ \varphi(z_1) & \varphi(z_2)\end{vmatrix}=0.$$

Car, en considérant des valeurs $z_1=b_1$, $z_2=b_2$ soumises aux restrictions précédentes et auxquelles correspondent des valeurs $u_1=v_1$, $u_2=v_2$, on démontrerait, de la même façon que pour le voisinage de $u_1=0$, $u_2=0$, que z_1-b_1, z_2-b_2 peuvent être développées aux environs de $u_1=v_1$, $u_2=v_2$ suivant les puissances entières et positives de u_1-v_1, u_2-v_2.

Puisque u_1, u_2 sont des variables indépendantes entre elles, on n'aura à soumettre à une discussion particulière les positions de $u_1=v_1$, $u_2=v_2$, pour lesquelles il arrive soit qu'une des quantités z_1, z_2 coïncide avec quelqu'un des points singuliers des fonctions $f(z), \varphi(z)$, parmi lesquels se range dans certaines circonstances le point à l'infini, soit qu'une des quantités ζ_1, ζ_2 atteint une des valeurs γ, soit enfin que les z_1, z_2 satisfont à l'équation (B), que *dans*

le cas seulement où les z_1, z_2 arrivent aux valeurs précitées sans qu'il soit nécessaire de supposer quelque relation entre les derniers éléments des chemins suivant lesquels u_1, u_2 parviennent à v_1, v_2.

Lorsque, au contraire, aucune des valeurs indiquées de z_1, z_2 ne peut être atteinte pour $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ sans qu'une relation soit supposée entre les derniers éléments des chemins des variables u_1, u_2, les fonctions z_1, z_2 des variables indépendantes u_1, u_2 doivent prendre en ces positions d'autres valeurs à côté des valeurs exceptionnelles dont nous avons parlé: elles restent donc uniformes tout autour de ces positions tant que u_1, u_2 demeurent indépendantes entre elles, tandis qu'elles deviennent indéterminées pour ces positions mêmes.

Pour éviter toute prolixité, nous remarquons que l'on pourra supposer par la suite que, dans les développements de $f(z)$, $\varphi(z)$ relatifs au voisinage d'un point singulier de ces fonctions, ou d'un point non singulier, ou enfin du point à l'infini, les exposants des plus petites puissances soient les mêmes, et que, lorsque ζ coïncide avec une des valeurs γ, $\int f(z)\,dz$, $\int \varphi(z)\,dz$ deviennent simultanément infinies. En effet, si cela n'avait point lieu, on pourrait prendre

$$f_1(z) = \gamma_{11} f(z) + \gamma_{12} \varphi(z),$$
$$\varphi_1(z) = \gamma_{21} f(z) + \gamma_{22} \varphi(z),$$

$\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ étant des quantités arbitraires. En posant alors

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} w_1 = \gamma_{11} u_1 + \gamma_{12} u_2, \\ w_2 = \gamma_{21} u_1 + \gamma_{22} u_2, \end{cases}$$

les équations (A) deviennent

$$(\mathrm{A}') \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\delta_1}^{z_1} f_1(z)\,dz + \int_{\delta_2}^{z_2} f_1(z)\,dz = w_1, \\ \displaystyle\int_{\delta_1}^{z_1} \varphi_1(z)\,dz + \int_{\delta_2}^{z_2} \varphi_2(z)\,dz = w_2. \end{cases}$$

Les fonctions $f_1(z)$, $\varphi_1(z)$ ont maintenant, parce que $\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{22}$ sont quelconques, la propriété requise, et les fonctions symétriques de z_1, z_2 seront uniformes au voisinage de valeurs déterminées de u_1, u_2, lorsque ces mêmes fonctions sont uniformes au voisinage des valeurs correspondantes de w_1, w_2, et lorsque, d'autre part, les

ξ étant une quantité quelconque et η une quantité infiniment petite d'un ordre supérieur à celui de $(z_1 - b)^{k+1}$, on pourra déterminer ξ de manière que la quantité

$$u_2 - v_2 - \lambda(u_1 - v_1)$$

(où λ désigne une quantité donnée arbitraire) soit infiniment petite d'un ordre supérieur à celui de $(z_1 - b)^{k+1}$. Cette valeur de ξ est donnée, en effet, par l'équation

$$(4) \qquad \xi(\beta'_0 - \lambda\beta_0) + \frac{\alpha'_k - \lambda\alpha_k}{k+1} = 0.$$

Puisque $\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}$ n'est pas une constante, on peut déterminer $z_2 = c$ de manière qu'aucune des équations

$$\beta'_0 - \lambda\beta_0 = 0, \quad \alpha'_k\beta_0 - \alpha_k\beta'_0 = 0$$

ne soit vérifiée. Si λ a une valeur finie, ξ sera alors une quantité finie, et les quantités

$$\beta_0\xi + \frac{\alpha_k}{k+1}, \quad \beta'_0\xi + \frac{\alpha'_k}{k+1}$$

seront différentes de zéro. Par conséquent, $u_1 - v_1$ et $u_2 - v_2$ représentent alors des quantités infiniment petites du même ordre que $(z_1 - b)^{k+1}$, tandis que $\dfrac{u_2 - v_2}{u_1 - v_1}$ prend la valeur arbitrairement donnée λ. Il résulte de là d'abord que z_1, z_2 acquièrent respectivement les valeurs b, c si les derniers éléments des chemins suivant lesquels u_1, u_2 arrivent à v_1, v_2 sont indépendants entre eux.

D'autre part, on obtient des équations (2)

$$(u_2 - v_2)\beta_0 - (u_1 - v_1)\beta'_0 = \frac{1}{k+1}(\alpha'_k\beta_0 - \alpha_k\beta'_0)(z_1 - b)^{k+1},$$

à un infiniment petit d'ordre supérieur près. Puisque le coefficient de $(z_1 - b)^{k+1}$ dans cette équation n'est point nul, on en tire

$$(5) \qquad z_1 - b = \sqrt[k+1]{\frac{(u_2 - v_2)\beta_0 - (u_1 - v_1)\beta'_0}{\alpha'_k\beta_0 - \alpha_k\beta'_0}(k+1)},$$

ce qui montre que z_1 acquiert $k+1$ valeurs différentes de c lorsque

u_1, u_2 circulent respectivement autour de v_1, v_2. Il résulte de là que $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ ne sont pas uniformes aux environs de $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ pour $k \geqq 1$, d'où il s'ensuit que *$f(z)$ et $\varphi(z)$ ne doivent pas s'annuler simultanément pour une valeur b non singulière de z.*

Considérons maintenant un point singulier a tel que l'on ait

$$f(a) = 0, \quad \varphi(a) = 0.$$

D'après les suppositions du § I, les développements de $f(z)$, $\varphi(z)$ pour le voisinage du point a ne contiennent pas de logarithmes dans ce cas. Si ces développements procèdent suivant les puissances entières de $(z-a)^{\frac{1}{n}}$, posons

$$(z-a)^{\frac{1}{n}} = t.$$

Soient, au voisinage de $z = a$,

$$(6) \qquad \begin{cases} f(z) = \alpha_k t^k + \alpha_{k+1} t^{k+1} + \ldots, \\ \varphi(z) = \alpha'_k t^k + \alpha'_{k+1} t^{k+1} + \ldots. \end{cases}$$

En supposant que, lorsque z_1 prend la valeur a, z_2 arrive à un point quelconque non singulier c, et en désignant de nouveau par v_1, v_2 les valeurs correspondantes de u_1, u_2, on établirait, de la même manière que pour le cas où z_1 parvenait à un point non singulier b, cas que nous venons de traiter, que $t_1 = (z_1 - a)^{\frac{1}{n}}$ acquiert aux environs de $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, $k + n$ valeurs différentes de c. *Par conséquent, $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ ne sont pas uniformes aux environs de ces valeurs si $f(z)$ et $\varphi(z)$ s'annulent simultanément pour $z = a$.*

Ainsi se trouve démontrée la proposition énoncée au commencement de ce paragraphe.

Si, dans l'équation (6), on a

$$k + n > 0,$$

$z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ ne pourront être uniformes aux environs de $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ que si l'on a

$$k + n = 1 \quad \text{ou} \quad k = -(n-1).$$

On obtient ainsi la proposition :

II. *L'exposant de la plus petite puissance de $z-a$, dans les développements de $f(z)$, $\varphi(z)$ relatifs au voisinage d'un point singulier a, est un nombre négatif, lequel ou ne surpasse pas l'unité négative ou bien a la valeur* $-\frac{n-1}{n}$ (n étant un nombre entier positif).

Supposons que le plus petit exposant dans les développements de $f(z)$, $\varphi(z)$, relatifs au voisinage de $z=\infty$, soit plus grand que l'unité positive. Ces développements ne doivent pas contenir alors des logarithmes, d'après le § I. Si ces développements procèdent suivant les puissances entières de $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}}$, posons

$$\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}}=t,$$

et soit

$$(7)\qquad \begin{cases} f(z)=\alpha_k t^k+\alpha_{k+1}t^{k+1}+\ldots, \\ \varphi(z)=\alpha'_k t^k+\alpha'_{k+1}t^{k+1}+\ldots. \end{cases}$$

Supposons que z_1 devienne infini, tandis que z_2 vient à coïncider avec un point c arbitraire non singulier, et désignons de nouveau les valeurs correspondantes de u_1, u_2 par v_1, v_2. On prouverait alors, comme pour le cas d'une valeur finie singulière, que $t_1=\left(\frac{1}{z_1}\right)^{\frac{1}{n}}$ prend, aux environs de $u_1=v_1$, $u_2=v_2$, $k-n$ valeurs différentes de c, et par suite que z_1+z_2, $z_1 z_2$ ne sont pas uniformes aux environs de $u_1=v_1$, $u_2=v_2$, si $k-n>1$. Il s'ensuit de là que :

III. *L'exposant de la plus petite puissance de* $\frac{1}{z}$ *dans les développements de* $f(z)$, $\varphi(z)$, *relatifs au voisinage de* $z=\infty$, *est un nombre ne surpassant pas l'unité positive, ou bien il est égal à* $1+\frac{1}{n}$ (n étant un nombre positif).

IV.

Supposons maintenant que z_1, z_2 s'approchent de deux valeurs b_1, b_2, différentes l'une de l'autre, et ne constituant pas des points singuliers, mais satisfaisant à l'équation (B).

Soient aux environs de $z_1 = b_1$, $z_2 = b_2$, respectivement,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} f(z_1) &= \alpha_0 + \alpha_1(z_1 - b_1) + \alpha_2(z_1 - b_1)^2 + \ldots,\\ \varphi(z_1) &= \alpha'_0 + \alpha'_1(z_1 - b_1) + \alpha'_2(z_1 - b_1)^2 + \ldots,\\ f(z_2) &= \beta_0 + \beta_1(z_2 - b_2) + \beta_2(z_2 - b_2)^2 + \ldots,\\ \varphi(z_2) &= \beta'_0 + \beta'_1(z_2 - b_2) + \beta'_2(z_2 - b_2)^2 + \ldots,\end{aligned}\right.$$

où, d'après la proposition I du paragraphe précédent, les α_0 et α'_0, de même que les β_0 et β'_0, ne doivent pas s'annuler simultanément. Ainsi nous pourrons admettre, d'après la remarque de la fin du § II, que α_0, α'_0, β_0, β'_0 soient tous différents de zéro. En supposant qu'à $z_1 = b_1$, $z_2 = b_2$ correspondent les valeurs $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, on obtient, des équations (A),

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} u_1 - v_1 &= \alpha_0(z_1 - b_1) + \beta_0(z_2 - b_2) + \frac{\alpha_1}{2}(z_1 - b_1)^2\\ &\quad + \frac{\beta_1}{2}(z_2 - b_2)^2 + \frac{\alpha_2}{3}(z_1 - b_1)^3 + \frac{\beta_2}{3}(z_2 - b_2)^3 + \ldots,\\ u_2 - v_2 &= \alpha'_0(z_1 - b_1) + \beta'_0(z_2 - b_2) + \frac{\alpha'_1}{2}(z_1 - b_1)^2\\ &\quad + \frac{\beta'_1}{2}(z_2 - b_2)^2 + \frac{\alpha'_2}{3}(z_1 - b_1)^3 + \frac{\beta'_2}{3}(z_2 - b_2)^3 + \ldots.\end{aligned}\right.$$

D'après notre hypothèse, on a la relation

$$(3)\qquad \alpha_0\beta'_0 - \alpha'_0\beta_0 = 0.$$

Lorsque z_1, z_2 s'approchent respectivement des valeurs b_1, b_2 *sans que* l'équation

$$(4)\qquad \alpha_0(z_1 - b_1) + \beta_0(z_2 - b_2) = 0$$

ait lieu, il se trouve que $u_1 - v_1$, $u_2 - v_2$ deviennent infiniment petits du même ordre avec celle des quantités infiniment petites $z_1 - b_1$, $z_2 - b_2$ qui est d'ordre inférieur. Supposons que $z_2 - b_2$ soit d'un ordre égal ou supérieur à celui de $z_1 - b_1$. En multipliant

la première des équations (2) par β'_0, la seconde par β_0, et en faisant la soustraction, on trouve, en vertu de l'équation (3),

$$(5)\quad \begin{cases} \beta'_0(u_1-v_1)-\beta_0(u_2-v_2)=\frac{1}{2}(\alpha_1\beta'_0-\alpha'_1\beta_0)(z_1-b_1)^2 \\ \qquad\qquad +\frac{1}{2}(\beta_1\beta'_0-\beta'_1\beta_0)(z_2-b_2)^2+\ldots. \end{cases}$$

Le premier membre de cette équation est donc d'un ordre supérieur à celui de u_1-v_1 ou u_2-v_2, c'est-à-dire qu'on doit poser

$$(6)\qquad \beta'_0(u_1-v_1)-\beta_0(u_2-v_2)=0.$$

Par conséquent, quels que soient les derniers éléments des chemins suivant lesquels z_1, z_2 parviennent à b_1, b_2, pourvu qu'ils ne soient pas liés entre eux par la relation exprimée par l'équation (4), il arrivera que les derniers éléments des chemins correspondants de u_1, u_2 satisferont invariablement à la relation (6).

Les éléments des chemins de u_1, u_2 mentionnés en dernier lieu ne peuvent être indépendants entre eux que dans le cas où entre les quantités infiniment petites z_1-b_1, z_2-b_2 existe la relation (4), ou, ce qui revient au même, lorsque

$$(7)\qquad t=\alpha_0(z_1-b_1)+\beta_0(z_2-b_2)$$

est une quantité infiniment petite d'un ordre supérieur à celui des quantités z_1-b_1, z_2-b_2 qui sont d'un ordre égal.

En introduisant la notation de l'équation (7) et en posant

$$(8)\qquad -\frac{\alpha_0}{\beta_0}=\varepsilon,\quad \frac{\beta'_0}{\beta_0}=\frac{\alpha'_0}{\alpha_0}=\lambda,$$

les équations (2) deviennent

$$(9)\quad \begin{cases} u_1-v_1=t+\frac{1}{2}[\alpha_1+\beta_1\varepsilon^2](z_1-b_1)^2 \\ \qquad\qquad -\frac{\beta_1}{\beta_0}(z_1-b_1)t+\frac{1}{2}\frac{\beta_1}{\beta_0^2}t^2+\ldots, \\ u_2-v_2=\lambda t+\frac{1}{2}[\alpha'_1+\beta'_1\varepsilon^2](z_1-b_1)^2 \\ \qquad\qquad -\frac{\beta'_1}{\beta_0}(z_1-b_1)t+\frac{1}{2}\frac{\beta'_1}{\beta_0^2}t^2+\ldots. \end{cases}$$

On peut supposer que t devient infiniment petit de manière que l'on ait

$$(10) \qquad t = \xi(z_1 - b_1)^2,$$

ξ étant une quantité arbitraire. Il suit alors des équations (9), à un infiniment petit près,

$$(11) \qquad \frac{u_2 - v_2}{u_1 - v_1} = \frac{\lambda\xi + \frac{1}{2}(\alpha'_1 + \beta'_1\varepsilon^2)}{\xi + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1\varepsilon^2)}.$$

Lorsqu'on fait parcourir à ξ, par une variation continue, toutes les valeurs possibles, $\frac{u_2 - v_2}{u_1 - v_1}$ prend aussi toute valeur possible, de sorte que les z_1, z_2 arrivent à b_1, b_2, quels que soient les derniers éléments des chemins suivant lesquels u_1, u_2 parviennent à v_1, v_2, pourvu, toutefois, que l'équation

$$(12) \qquad \alpha'_1 + \beta'_1\varepsilon^2 - \lambda(\alpha_1 + \beta_1\varepsilon^2) = 0$$

ne soit pas satisfaite, car, autrement, le rapport de $\frac{u_2 - v_2}{u_1 - v_1}$ dans l'équation (11) prend une valeur indépendante de ξ.

D'autre part, il résulte de l'équation (9) qu'en prenant arbitrairement le rapport $\frac{u_2 - v_2}{u_1 - v_1}$ on a, à un infiniment petit d'ordre supérieur près,

$$(13) \quad u_2 - v_2 - \lambda(u_1 - v_1) = \frac{1}{2}[\alpha'_1 + \beta'_1\varepsilon^2 - \lambda(\alpha_1 + \beta_1\varepsilon^2)](z_1 - b_1)^2.$$

Cette équation donnerait ainsi, pour le voisinage de $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, deux valeurs de z différentes de b_2, et, par conséquent, $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ ne pourraient pas être uniformes en ce voisinage sans que l'équation (12) eût lieu.

Par conséquent :

Pour que, la relation (4) étant satisfaite, les $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ soient uniformes, il faut que la relation (12) ait aussi lieu.

En posant

$$\frac{df(z)}{dz} = f'(z), \quad \frac{d\varphi(z)}{dz} = \varphi'(z)$$

et

$$\varphi'(z)f(z) - \varphi(z)f'(z) = F(z), \tag{14}$$

l'équation (12) devient

$$F(b_1)f(b_2)^3 + F(b_2)f(b_1)^3 = 0. \tag{15}$$

Comme nous avons désigné par b_1, b_2 un couple de valeurs arbitraire satisfaisant à l'équation (B), on trouve que :

I. *Pour que* $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ *soient des fonctions uniformes de* u_1, u_2, *il faut que l'équation*

$$F(z_1)f(z_2)^3 + F(z_2)f(z_1)^3 = 0 \tag{C}$$

ait lieu pour tous les couples de valeurs z_1, z_2 *satisfaisant à l'équation* (B).

Définissons maintenant, par l'équation

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \zeta, \tag{D}$$

z comme fonction de ζ. On en déduit

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{f(z)^2}{F(z)}. \tag{E}$$

Si z_1, z_2 appartiennent à deux branches de la fonction z de ζ, on aura

$$\frac{dz_1}{d\zeta} = \frac{f(z_1)^2}{F(z_1)}, \quad \frac{dz_2}{d\zeta} = \frac{f(z_2)^2}{F(z_2)}. \tag{16}$$

De ces deux équations, il suit, au moyen de l'équation (C),

$$\frac{dz_1}{d\zeta}f(z_1) + \frac{dz_2}{d\zeta}f(z_2) = 0. \tag{F}$$

Comme on a, d'autre part,

$$\frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)} = \frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}, \tag{G}$$

l'équation (F) donne aussi

$$(\mathrm{F}') \qquad \frac{dz_1}{d\zeta}\varphi(z_1) + \frac{dz_2}{d\zeta}\varphi(z_2) = 0.$$

Soient

$$z_1 = g_1(\zeta), \quad b_1 = g_1(\alpha),$$
$$z_2 = g_2(\zeta), \quad b_2 = g_2(\alpha).$$

En posant, dans les équations (2),

$$z_1 - b_1 = g_1(\zeta) - g_1(\alpha),$$
$$z_2 - b_2 = g_2(\zeta) - g_2(\alpha),$$

leurs seconds membres, par suite des équations (F), (F′), deviendront identiquement nuls, c'est-à-dire nuls *pour toute valeur de* ζ.

De là, en faisant dans l'équation (2) les substitutions

$$(17) \qquad \begin{cases} z_1 - b_1 = dz_1 = g'_1(\alpha)\, d\zeta, \\ z_2 - b_2 = \delta z_2 = dz_2 + \nu\, dz_2, \\ \qquad dz_2 = g'_2(\alpha)\, d\zeta, \end{cases}$$

où ν est une quantité infiniment petite et $g'_i(\zeta) = \dfrac{dg_i(\zeta)}{d\zeta}$, et ayant égard à ce que t (éq. 7) doit être une quantité infiniment petite d'ordre supérieur, on trouve

$$(18) \qquad \begin{cases} u_1 - v_1 = du_1 = \nu\, dz_2\, f(b_2) + dz_2^2(2\nu + \nu^2)\dfrac{f^2(b_2)}{2} + \ldots, \\ u_2 - v_2 = du_2 = \nu\, dz_2\, \varphi(b_2) + dz_2^2(2\nu + \nu^2)\dfrac{\varphi^2(b_2)}{2} + \ldots. \end{cases}$$

Ainsi les du_1, du_2 sont du même ordre que $\nu\, dz_2$. En multipliant la première des équations (18) par $\varphi(b_2)$ et la seconde par $f(b_2)$, et en faisant la soustraction, on obtient

$$(19) \qquad \varphi(b_2)\, du_1 - f(b_2)\, du_2 = -\nu\, dz_2^2\, \mathrm{F}(b_2) + \ldots.$$

Le second membre est par conséquent du même ordre que $\nu\, dz_2^2$, c'est-à-dire que l'on a

$$(20) \qquad \varphi(b_2)\, du_1 - f(b_2)\, du_2 = 0.$$

Il s'ensuit de là que :

II. *Si l'équation* (C) *est satisfaite pour chaque système de solutions* $z_1 = b_1$, $z_2 = b_2$ *de l'équation* (B), *il ne sera point possible que les* z_1, z_2 *atteignent les valeurs* b_1, b_2 *tant que les derniers éléments des chemins par lesquels les* u_1, u_2 *parviennent à* v_1, v_2 *sont indépendants entre eux.*

V.

Examinons maintenant le cas où, pour $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, on a

$$z_1 = a, \quad z_2 = b,$$

b désignant un point non singulier et a un point singulier pour lequel $\int f(z)\,dz$, $\int \varphi(z)\,dz$ prennent des valeurs finies, en même temps que l'équation (B) est satisfaite par $z_1 = a$, $z_2 = b$.

D'après la proposition II du § III, l'exposant de la plus petite puissance de $z - a$ dans les développements de $f(z)$ et de $\varphi(z)$ pour le voisinage de $z = a$, lesquels, d'après le § I, ne doivent pas contenir de logarithmes, sera de la forme $-\frac{n-1}{n}$ (n étant un nombre entier positif).

En posant donc

$$(1) \qquad \begin{cases} (z-a)^{\frac{1}{n}} = t, \\ n\,f(z)\,t^{n-1} = f_1(t), \quad n\,\varphi(z)\,t^{n-1} = \varphi_1(t), \end{cases}$$

et en faisant, dans les équations (A), les substitutions

$$(2) \qquad \begin{cases} z_1 = a + t_1^n, \quad z_2 = a + t_2^n, \\ \delta_1 = a + \eta_1^n, \quad \delta_2 = a + \eta_2^n, \end{cases}$$

ces équations prennent la forme

$$(\mathrm{A}') \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\eta_1}^{t_1} f_1(t)\,dt + \int_{\eta_2}^{t_2} f_1(t)\,dt = u_1, \\ \displaystyle\int_{\eta_1}^{t_1} \varphi_1(t)\,dt + \int_{\eta_2}^{t_2} \varphi_1(t)\,dt = u_2. \end{cases}$$

Lorsque $z_1 = a$, $z_2 = b$, on a

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \beta = \sqrt{b-a},$$

de sorte que $t = 0$, $t = \beta$ ne peuvent pas être des points singuliers des fonctions $f_1(t)$, $\varphi_1(t)$. Pour que t_1 ne puisse arriver à o, ni t_2 à β qu'avec supposition de quelque relation entre les derniers éléments des chemins suivant lesquels u_1, u_2 arrivent à v_1, v_2, il est nécessaire, d'après une discussion identique à celle du paragraphe précédent, qu'à côté de l'équation

$$(3) \qquad \frac{\varphi_1(0)}{f_1(0)} = \frac{\varphi_1(\beta)}{f_1(\beta)},$$

soit aussi satisfaite l'équation

$$(4) \qquad F_1(0) f_1(\beta)^2 + F_1(\beta) f_1(0)^2 = 0,$$

où

$$(5) \qquad F_1(t) = \varphi_1'(t) f_1(t) - \varphi_1(t) f_1'(t).$$

Or, puisque

$$(6) \qquad F_1(t) = n^2 t^{3(n-1)} F(z),$$

l'équation (4) montre que *l'équation* (C) *doit être aussi satisfaite pour* $z_1 = a$, $z_2 = b$.

Réciproquement, on établirait, comme dans le paragraphe précédent, que, *lorsque cette condition est remplie,* z_1 *et* z_2 *ne peuvent arriver respectivement à* a *et* b *que s'il existe une relation entre les derniers éléments des chemins suivant lesquels* u_1, u_2 *parviennent à* v_1, v_2.

On démontrerait tout à fait de la même manière que :

Si, pour $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, on a

$$z_1 = a_1, \quad z_2 = a_2,$$

a_1, a_2 étant deux points singuliers distincts, dont l'un pourra coïncider avec le point à l'infini, et si l'on suppose que l'équation (B) soit satisfaite par $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2$, et que $\int f(z)\,dz$, $\int \varphi(z)\,dz$ aient pour $z = a_1$, $z = a_2$ des valeurs finies, il se trouve que *la condition nécessaire et suffisante* pour que z_1, z_2 ne puissent atteindre les valeurs indiquées que seulement sous la supposition de certaines rela-

tions entre les derniers éléments des chemins par lesquels u_1, u_2 arrivent en v_1, v_2 *est que l'équation* (C) *soit satisfaite par ce couple de valeurs* $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2$.

VI.

Lorsque pour $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ les z_1, z_2 prennent une même valeur b, il peut se faire que les $f(z_1), f(z_2)$, de même que les $\varphi(z_1), \varphi(z_2)$, atteignent des valeurs différentes. Soient $f(b), \varphi(b)$ ces valeurs pour $z_1 = b$, et $f_1(b), \varphi_1(b)$ pour $z_2 = b$. Si maintenant l'équation (B) est satisfaite pour $z_1 = z_2 = b$, c'est-à-dire si l'on a

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} f(b) & f_1(b) \\ \varphi(b) & \varphi_1(b) \end{vmatrix} = 0,$$

il faut, d'après le raisonnement du § IV, qu'en posant

$$(2) \qquad [F(z_1)]_{z_1=b} = F(b), \quad [F(z_2)]_{z_2=b} = F_1(b),$$

l'équation

$$(3) \qquad F(b) f_1(b)^3 + F_1(b) f(b)^3 = 0$$

soit satisfaite.

L'équation (1) ne peut être satisfaite, dans les circonstances indiquées, que si z, considéré comme fonction de ζ, revient pour un certain circuit de cette dernière variable à sa valeur initiale, sans que les fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ reprennent en même temps leurs valeurs. En supposant que cela soit ainsi, et en désignant par z une valeur de cette variable correspondant à une valeur arbitraire de ζ, par $f(z)$, $\varphi(z)$ les valeurs correspondantes des deux fonctions et par $f_1(z)$, $\varphi_1(z)$ les valeurs qu'elles prennent après le parcours du circuit précité de ζ lorsque z revient à sa valeur initiale, on peut déduire de l'équation (3) que *l'équation*

$$(H) \qquad F(z) f_1(z)^3 + F_1(z) f(z)^3 = 0$$

doit aussi avoir lieu pour toute valeur de z.

On obtiendrait alors, par des considérations analogues à celles du § IV, que z_1, z_2 *ne peuvent pas atteindre la valeur commune tant que les derniers éléments des chemins de* u_1, u_2 *ne remplissent quelque relation.*

Par des considérations analogues à celles du paragraphe précédent, il résulte encore que l'équation (H) a lieu pour des valeurs singulières ou infiniment grandes de z, de même que pour des points non singuliers, et que z_1, z_2 ne peuvent acquérir une valeur commune de cette sorte, sans qu'on ait en même temps $f(z_1)=f(z_2)$, $\varphi(z_1)=\varphi(z_2)$, dans le cas où il n'y a pas de relation entre les derniers éléments des chemins des u_1, u_2.

VII.

En faisant parcourir à u_1, u_2 des chemins arbitraires et en poursuivant les fonctions z_1, z_2 d'une manière continue tout le long de ces chemins, il peut se faire que, pour $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ (où v_1, v_2 désignent des valeurs finies), un au moins des quotients $\frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)}$, $\frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$ acquiert une des valeurs représentées par γ, ou qu'une ou deux des fonctions z_1, z_2 parviennent à des points singuliers des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, pour lesquels au moins un des couples de valeurs

$$\int f(z_1)\,dz_1, \quad \int \varphi(z_1)\,dz_1,$$
$$\int f(z_2)\,dz_2, \quad \int \varphi(z_2)\,dz_2$$

devient infini, sans que les z_1, z_2 aient accompli un nombre illimité de circuits.

Supposons, par exemple, que l'on ait poursuivi les fonctions z_1, z_2 en les développant dans l'intérieur de cercles dont les centres coïncident successivement avec les points des chemins de u_1, u_2, et soient K_1, K_2 les premiers cercles correspondant aux variables u_1, u_2 sur les circonférences desquels se trouvent les points $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$. Les intégrales $\int f(z_1)\,dz_1$, $\int \varphi(z_1)\,dz_1$, $\int f(z_2)\,dz_2$, $\int \varphi(z_2)\,dz_2$ ont alors, dans l'intérieur de ces cercles et à une distance de v_1, v_2 aussi petite que l'on voudra, pas infiniment petite cependant, des valeurs finies.

Soient ainsi $v_1 - \varepsilon_1$, $v_2 - \varepsilon_2$ des valeurs de u_1, u_2 situées respectivement dans l'intérieur des cercles K_1, K_2 et voisines autant que l'on voudra de v_1, v_2, et soient b_1, b_2 les valeurs de z_1, z_2 correspondant à ce couple de valeurs de u_1, u_2. En supposant que les u_1, u_2 viennent respectivement de $v_1 - \varepsilon_1$ à v_1 et de $v_2 - \varepsilon_2$ à v_2 par les

chemins Γ_1, Γ_2, désignons par W_1, W_2 les chemins correspondants de z_1, z_2 menant les z_1, z_2 aux valeurs c_1, c_2. Il est à remarquer que les portions des chemins W_1, W_2 peuvent être infiniment longues, tandis que les traits correspondants sur les chemins Γ_1, Γ_2 sont aussi courts que l'on voudra. En désignant par $v_1 - \varepsilon_1 + \lambda_1$, $v_2 - \varepsilon_2 + \lambda_2$ des valeurs de u_1, u_2 situées respectivement sur Γ_1, Γ_2 entre $v_1 - \varepsilon_1$ et v_1, $v_2 - \varepsilon_2$ et v_2, et par c'_1, c'_2 les valeurs correspondantes de z_1, z_2 situées sur W_1, W_2, il s'ensuit que

$$\sigma_1 = \int_{b_1}^{c'_1} f(z)\,dz + \int_{b_2}^{c'_2} f(z)\,dz,$$

$$\sigma_2 = \int_{b_1}^{c'_1} \varphi(z)\,dz + \int_{b_2}^{c'_2} \varphi(z)\,dz$$

peuvent prendre des valeurs aussi petites que possible.

D'après notre supposition, il peut se faire d'abord que, pour $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, au moins un des quotients $\frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)}$, $\frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$ devient égal à une des valeurs représentées par γ. Il arrive alors, d'après le § II, qu'au moins un des termes de chacune des sommes σ_1, σ_2 devient infini lorsque b_1 et c'_1, b_2 et c'_2 s'approchent de c_1, c_2 en suivant les chemins W_1, W_2, d'où il résulte que l'autre terme devient aussi infini.

En second lieu, il peut se faire qu'une au moins des quantités z_1, z_2 parvient à un point singulier des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, tel qu'au moins un des couples de valeurs

$$\int f(z_1)\,dz_1,\quad \int \varphi(z_1)\,dz_1,\quad \int f(z_2)\,dz_2,\quad \int \varphi(z_2)\,dz_2$$

devient infini, sans que les z_1, z_2 aient accompli un nombre illimité de circuits. Les choses se passent donc comme dans le cas précédent.

Or, puisque σ_1, σ_2 sont aussi petits que l'on voudra, les divers couples de valeurs c'_1, c'_2 sur W_1, W_2 seront aussi peu différents que l'on voudra des couples de valeurs z_1, z_2 satisfaisant aux équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{b_1}^{z_1} f(z)\,dz + \int_{b_2}^{z_2} f(z)\,dz = 0,\\ &\int_{b_1}^{z_1} \varphi(z)\,dz + \int_{b_2}^{z_2} \varphi(z)\,dz = 0.\end{aligned}\right.$$

Mais toute série continue de couples de valeurs z_1, z_2 satisfaisant aux équations (1) satisfait aussi à l'équation

$$(2) \qquad \frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)} = \frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)},$$

ainsi qu'à l'équation (C) ou à l'équation (H). Par conséquent, le couple c'_1, c'_2 aurait dû être aussi peu différent que l'on voudrait d'un couple de valeurs satisfaisant simultanément aux équations (B) et (C) ou bien (H). Mais, d'après les §§ IV-VI, de tels couples de valeurs ne peuvent être atteints que si u_1, u_2 décrivent des chemins dépendants l'un de l'autre.

Comme, d'autre part, les z_1, z_2 ne peuvent pas s'approcher simultanément d'une valeur de l'espèce indiquée lorsque $f(z_1)$ et $f(z_2)$, aussi bien que $\varphi(z_1)$ et $\varphi(z_2)$, tendent simultanément vers une même valeur, sans que les u_1, u_2 deviennent infiniment grands, on obtient la proposition :

En faisant parcourir aux u_1, u_2 des chemins arbitraires, il ne pourra point arriver que pour des valeurs finies de ces variables les z_1, z_2 atteignent des valeurs pour lesquelles au moins un des quotients $\frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)}$, $\frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$ acquiert une des valeurs γ, ou que l'on parvienne à des points singuliers z_1, z_2 des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, pour lesquels l'un au moins des couples de valeurs

$$\int f(z_1)\,dz_1, \ \int\varphi(z_1)\,dz_1, \quad \int f(z_2)\,dz_2, \ \int\varphi(z_2)\,dz_2$$

devient infini, sans que les variables aient accompli un nombre illimité de circuits.

VIII.

Il résulte de l'équation (F) que :

I. *La fonction z de ζ ne peut pas admettre, pour des valeurs arbitraires de cette variable, plus de deux valeurs.*

En effet, si z_1, z_2, z_3 constituaient trois branches différentes de

la fonction z de ζ, on aurait, d'après l'équation (F),

$$\frac{dz_1}{d\zeta}f(z_1)+\frac{dz_2}{d\zeta}f(z_2)=0,$$
$$\frac{dz_1}{d\zeta}f(z_1)+\frac{dz_3}{d\zeta}f(z_3)=0,$$

et, par conséquent,

(1) $$\frac{dz_2}{d\zeta}f(z_2)-\frac{dz_3}{d\zeta}f(z_3)=0.$$

D'autre part, on aurait, d'après la même équation (F),

(2) $$\frac{dz_2}{d\zeta}f(z_2)+\frac{dz_3}{d\zeta}f(z_3)=0.$$

On aurait dû ainsi avoir

$$\frac{dz_2}{d\zeta}f(z_2)=0,\quad \frac{dz_3}{d\zeta}f(z_3)=0,$$

c'est-à-dire il faudrait que z fût indépendant de ζ, ce qui n'a point lieu pour des valeurs arbitraires de ζ.

En divisant l'équation (H) par $F(z)F_1(z)$, et en posant, d'après l'équation (E),

(3) $$\frac{f(z)^2}{F(z)}=\frac{dz}{d\zeta}=\frac{f_1(z)^2}{F_1(z)},$$

il vient

(4) $$\frac{dz}{d\zeta}[f(z)+f_1(z)]=0,$$

ou

(J) $$f(z)+f_1(z)=0.$$

D'après la proposition I, on a

(K) $$z=P(\zeta)+Q(\zeta)\sqrt{R(\zeta)},$$

$P(\zeta)$, $Q(\zeta)$, $R(\zeta)$ étant des fonctions uniformes de ζ.

En posant maintenant

(5) $$f(z)^2=g(\zeta),$$

on déduit de l'équation (J) qu'à chaque couple de valeurs de ζ,

$\sqrt{R(\zeta)}$ correspond une valeur unique pour $g(\zeta)$. De la même manière, à tout couple de valeurs de ζ, $-\sqrt{R(\zeta)}$ correspond une valeur déterminée unique de cette fonction, que nous désignerons par $g_1(\zeta)$. Nous avons alors

$$(6)\qquad \begin{cases} g(\zeta)+g_1(\zeta)=2S(\zeta), \\ \dfrac{g(\zeta)}{\sqrt{R(\zeta)}}-\dfrac{g_1(\zeta)}{\sqrt{R(\zeta)}}=2T(\zeta), \end{cases}$$

où $S(\zeta)$, $T(\zeta)$ représentent des fonctions uniformes de ζ.

En ajoutant maintenant les deux équations (6) après avoir multiplié la seconde par $\sqrt{R(\zeta)}$, on obtient

$$(\mathrm{L})\qquad f(z)^2=g(\zeta)=S(\zeta)+T(\zeta)\sqrt{R(\zeta)}.$$

En posant

$$(\mathrm{K}')\qquad \frac{d\zeta}{dz}=P_1(\zeta)+Q_1(\zeta)\sqrt{R(\zeta)},$$

où $P_1(\zeta)$, $Q_1(\zeta)$ désignent, d'après l'équation (K), des fonctions uniformes de ζ, on déduit de l'équation (F) que

$$(7)\qquad t=\frac{f(z)}{\sqrt{R(\zeta)}\left[P_1(\zeta)+Q_1(\zeta)\sqrt{R(\zeta)}\right]},$$

considéré comme fonction de ζ, reste invariable pour des circuits de ζ ramenant $\sqrt{R(\zeta)}$ en $-\sqrt{R(\zeta)}$. La même propriété appartient donc aussi à t^2. Ainsi t^2 est, d'après l'équation (L), une fonction uniforme de ζ. En posant, d'après cela,

$$(8)\qquad t=\sqrt{R_1(\zeta)},$$

on obtient

$$(\mathrm{L}')\qquad f(z)=\left[Q_1(\zeta)R(\zeta)+P_1(\zeta)\sqrt{R(\zeta)}\right]R_1(\zeta),$$

$R_1(\zeta)$ étant une fonction uniforme et $\sqrt{R_1(\zeta)}$ restant invariable pour des circuits de ζ ramenant $\sqrt{R(\zeta)}$ en $-\sqrt{R(\zeta)}$.

On déduit de l'équation (E) et des équations (K) et (L) que

l'on a

$$\text{(M)} \qquad F(z) = W(\zeta) + U(\zeta)\sqrt{R(\zeta)},$$

où $W(\zeta)$, $U(\zeta)$ sont des fonctions uniformes de ζ.

II. *Les fonctions $f(z)^2$ et $F(z)$ sont donc des fonctions de ζ à deux valeurs, reprenant ou non la même valeur, en même temps que z, pour les divers circuits de ζ.*

IX.

En considérant z comme fonction de ζ, on déduit des équations (C) et (H) que $\frac{f(z)^3}{F(z)}$ n'admet, pour une même valeur de ζ, que deux valeurs égales et de signes contraires. On a donc

$$\text{(N)} \qquad \frac{f(z)^3}{F(z)} = \sqrt{\Psi(\zeta)},$$

$\Psi(\zeta)$ représentant une fonction uniforme de ζ. D'après les équations (7) et (8) du paragraphe précédent, on aura

$$\text{(N')} \qquad \Psi(\zeta) = R(\zeta)R_1(\zeta).$$

Un circuit de ζ ramenant $\sqrt{R(\zeta)}$ en $-\sqrt{R(\zeta)}$ ramène donc aussi $\sqrt{\Psi(\zeta)}$ en $-\sqrt{\Psi(\zeta)}$.

En transformant les équations (A) par l'introduction de la variable ζ, et en désignant par ε_1, ε_2 deux valeurs de ζ correspondant respectivement à $z_1 = \delta_1$, $z_2 = \delta_2$, ces équations deviennent

$$\text{(A')} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_{\varepsilon_1}^{\zeta_1} \sqrt{\Psi(\zeta)}\,d\zeta + \int_{\varepsilon_2}^{\zeta_2} \sqrt{\Psi(\zeta)}\,d\zeta = u_1, \\ &\int_{\varepsilon_1}^{\zeta_1} \zeta\sqrt{\Psi(\zeta)}\,d\zeta + \int_{\varepsilon_2}^{\zeta_2} \zeta\sqrt{\Psi(\zeta)}\,d\zeta = u_2. \end{aligned} \right.$$

X.

Pour les valeurs de ζ, que nous avons représentées par γ, z admet toute valeur possible (*voir* § I); ces valeurs sont, par conséquent,

des points singuliers de la fonction z de ζ (éq. K), pour lesquels un développement de z procédant suivant les puissances croissantes de $\zeta - \alpha$ avec un nombre limité de termes à puissances négatives n'est plus possible. Nous emploierons, pour désigner les points singuliers de cette nature, le nom de *points essentiellement singuliers,* dont s'est servi M. Weierstrass pour le cas des fonctions uniformes (*Abhandlungen der Berliner Akademie*, année 1876, p. 11-15) ([1]).

Puisque les fonctions $P(\zeta)$, $Q(\zeta)$ $R(\zeta)$ admettent pour un point essentiellement singulier toute valeur possible (Weierstrass, *loc. cit.*, p. 59-60), il s'ensuit que $\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \zeta$ doit être indépendant de z pour un tel point.

Par conséquent, les diverses valeurs γ de ζ sont les seuls points essentiellement singuliers de la fonction z de ζ.

Si $\zeta = \alpha$ est une valeur qui ne coïncide avec aucun des points essentiellement singuliers, et $z = a$ une des deux valeurs de z qui lui correspondent d'après l'équation (K), on aura, aux environs de $\zeta = \alpha$,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} z - a = c_{-k}(\zeta - \alpha)^{-\frac{k}{2}} + c_{-(k-1)}(\zeta - \alpha)^{-\frac{k-1}{2}} + \ldots \\ + c_0 + c_1(\zeta - \alpha)^{\frac{1}{2}} + c_2(\zeta - \alpha)^{\frac{2}{2}} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

où le nombre des termes à exposants négatifs est limité ($= k$).

Si maintenant a est un point singulier des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, on aura, d'après le § I, au voisinage de $z = a$,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} f(z)^2 = P_0 + P_1 \log(z - a) + P_2[\log(z - a)]^2 + \ldots \\ + P_\lambda[\log(z - a)]^\lambda, \end{aligned}\right.$$

où $P_0, P_1, \ldots, P_\lambda$ sont développés au voisinage de $z = a$ suivant les puissances entières de $(z - a)^{\frac{1}{n}}$ avec un nombre limité de termes à exposants négatifs.

([1]) Une traduction française de ce Mémoire, par M. E. Picard, a paru dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. VIII, 1879, p. 111 et suiv. (*Note du traducteur.*)

De l'équation (1), on tire

$$(3)\qquad z-a=(\zeta-\alpha)^{-\frac{k}{2}}\chi(\zeta),$$

$\chi(\zeta)$ étant une fonction qui ne s'annule ni ne devient infinie pour $\zeta=\alpha$, et $\log\chi(\zeta)$ étant, par conséquent, développable suivant les puissances entières positives de $(\zeta-\alpha)^{\frac{1}{2}}$.

On a ainsi

$$(4)\qquad \begin{cases} f(z)^2 = P'_0 + P'_1\log(\zeta-\alpha) + P'_2[\log(\zeta-\alpha)]^2 + \ldots \\ \qquad + P'_\lambda[\log(\zeta-\alpha)]^\lambda, \end{cases}$$

en posant

$$(5)\qquad \begin{cases} \left(-\frac{k}{2}\right)^i \{P_i + P_{i+1}(i+1)_1\log\chi(\zeta) \\ \qquad + P_{i+2}(i+2)_2[\log\chi(\zeta)]^2 + \ldots + P_\lambda\lambda_{\lambda-i}[\log\chi(\zeta)]^{\lambda-i}\} = P'_i, \end{cases}$$

où

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-l+1)}{1.2\ldots l} = m_l.$$

Les coefficients $P'_0, P'_1, P'_2, \ldots, P'_\lambda$ sont développables suivant les puissances croissantes à exposants rationnels de $\zeta-\alpha$, avec un nombre limité de termes à exposants négatifs.

Or, d'après la proposition II du § VIII, $f(z)^2$ est une fonction de ζ à deux valeurs; elle n'admet donc, lorsque ζ circule autour de α, que deux valeurs seulement, tandis que le second membre de l'équation (4) prend, par la répétition de ces circuits, une infinité de valeurs. Il suit de là qu'il faut que l'on ait

$$P'_1=0,\quad P'_2=0,\quad \ldots,\quad P'_\lambda=0,$$

d'où

$$(6)\qquad P_1=0,\quad P_2=0,\quad \ldots,\quad P_\lambda=0.$$

Par conséquent, *le développement de $f(z)$ au voisinage de $z=a$ ne contient pas de logarithmes*. Comme maintenant $\varphi(z)^2=\zeta^2 f(z)^2$ est aussi une fonction de ζ à deux valeurs, il suit que *le développement de $\varphi(z)$ ne contient pas non plus de logarithmes*.

Il s'ensuit de l'équation (4) que

$$(7)\qquad f(z)^2 = P'_0,$$

c'est-à-dire que $f(z)^2$ est aussi développable aux environs de $\zeta = 0$ suivant les puissances ascendantes et à exposants rationnels de $\zeta - \alpha$, avec un nombre limité de termes à exposants négatifs.

Par conséquent, $\zeta = \alpha$ *n'est pas un point essentiellement singulier de la fonction* $f(z)^2$ *de* ζ.

Soient maintenant

$$(8)\qquad \begin{cases} f(z) = e_\mu (z-a)^{\frac{\mu}{n}} + e_{\mu+1}(z-a)^{\frac{\mu+1}{n}} + \ldots, \\ \varphi(z) = e'_\mu (z-a)^{\frac{\mu}{n}} + e'_{\mu+1}(z-a)^{\frac{\mu+1}{n}} + \ldots, \end{cases}$$

où e_μ, e'_μ sont différents de zéro. En posant

$$\frac{e'_\mu}{e_\mu} = \alpha,$$

et développant $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ suivant les puissances croissantes de $(z-a)^{\frac{1}{n}}$, on obtient

$$(9)\qquad \zeta - \alpha = \rho_1 (z-a)^{\frac{1}{n}} + \rho_2 (z-a)^{\frac{2}{n}} + \ldots,$$

où

$$\rho_1 = \frac{e_\mu e'_{\mu+1} - e_{\mu+1} e'_\mu}{e_\mu^2}.$$

Si le coefficient ρ_1 n'est point nul, $(z-a)^{\frac{1}{n}}$ est nécessairement uniforme aux environs de $\zeta = \alpha$. Si, au contraire, $\rho_1 = 0$, ρ_2 *ne pourra pas s'annuler*, puisque, autrement, $z - a$ admettrait au voisinage de $\zeta = \alpha$ plus de deux valeurs, ce qui serait en contradiction avec la proposition I du § VIII.

En résumant ce qui précède, on a la proposition :

I. *Les fonctions* z *et* $f(z)^2$ *de* ζ *ont les mêmes points essentiellement singuliers, qui coïncident avec celles des valeurs* $\zeta = \gamma$ *pour lesquelles* $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ *est égal à* γ *pour toute valeur de* z. *Les deux valeurs de* z *qui correspondent à un point* $\zeta = \alpha$ *non essentiellement singulier de la fonction* z *de* ζ *sont soit des points non singu-*

liers des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, soit des points singuliers a tels que les développements de $f(z)$, $\varphi(z)$ relatifs au voisinage de a ne contiennent pas de logarithmes et pour lesquels il n'arrive pas que, dans le développement de $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ suivant les puissances ascendantes de $(z-a)^{\frac{1}{n}}$,

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \alpha + \rho_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \rho_2(z-a)^{\frac{2}{n}} + \ldots,$$

les ρ_1, ρ_2 soient simultanément nuls. A toute valeur de z pour laquelle $\int f(z)\,dz$, $\int \varphi(z)\,dz$ ont des valeurs finies ne correspondent que des points non essentiellement singuliers de la fonction z de ζ.

Il est à remarquer qu'ici le point $z=\infty$ doit être compté parmi les points singuliers.

De l'équation

$$(10) \qquad \zeta - \alpha = \rho_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \rho_2(z-a)^{\frac{2}{n}} + \ldots$$

résulte pour $\frac{dz}{d\zeta}$:

1° Dans le cas où ρ_1 est différent de zéro

$$(11) \qquad \frac{dz}{d\zeta} = (z-a)^{1-\frac{1}{n}}\left[k_0 + k_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \ldots\right];$$

2° Dans le cas cependant où ρ_1 s'annule,

$$(11'') \qquad \frac{dz}{d\zeta} = (z-a)^{1-\frac{2}{n}}\left[\lambda_0 + \lambda_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \ldots\right],$$

où x_0, λ_0 représentent des quantités différentes de zéro.

En désignant par μ l'exposant de la plus petite puissance de $z-a$ dans le développement de $f(z)$ aux environs de $z=a$, on a, d'après la proposition II du § III,

$$\mu = \frac{-n-k+1}{n},$$

k désignant soit o, soit un nombre entier positif. Il s'ensuit main-

nant de l'équation (E) que, dans le cas 1°, on a

$$(12)\qquad \frac{f(z)^2}{F(z)} = (z-a)^{-\frac{k}{n}}\left[k'_0 + k'_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \ldots\right],$$

tandis que, dans le cas 2°,

$$(12^a)\qquad \frac{f(z)^2}{F(z)} = (z-a)^{-\frac{k+1}{n}}\left[\lambda'_0 + \lambda'_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \ldots\right].$$

Dans le cas 1°, on déduit de l'équation (10) que $(z-a)^{\frac{1}{n}}$ est une fonction uniforme de $\zeta-\alpha$,

$$(13)\qquad (z-a)^{\frac{1}{n}} = \mu_1(\zeta-\alpha) + \mu_2(\zeta-\alpha)^2 + \ldots;$$

dans le cas 2°, cependant, $(z-a)^{\frac{1}{n}}$ est une fonction uniforme de $(\zeta-\alpha)^{\frac{1}{2}}$,

$$(14)\qquad (z-a)^{\frac{1}{n}} = \mu'_1(\zeta-\alpha)^{\frac{1}{2}} + \mu'_2(\zeta-\alpha)^{\frac{2}{2}} + \ldots,$$

où μ_1, μ'_1 désignent des quantités différentes de zéro.

Ainsi, d'après l'équation (N), on aura, pour le voisinage de $\zeta=\alpha$, dans le cas 1°,

$$(15)\qquad \sqrt{\Psi(\zeta)} = (\zeta-\alpha)^{-k}[k''_0 + k''_1(\zeta-\alpha) + \ldots],$$

et, dans le cas 2°,

$$(15^a)\qquad \sqrt{\Psi(\zeta)} = (\zeta-\alpha)^{-\frac{k+1}{2}}[\lambda''_0 + \lambda''_1(\zeta-\alpha) + \ldots],$$

où $\varkappa''_0$, λ''_0 sont différents de zéro.

Ces équations ont encore lieu dans le cas où $\zeta=\alpha$ correspond à $z=\infty$ (*voir* la proposition III du § III).

Il suit de là que :

II. *Les points non essentiellement singuliers de la fonction z de ζ sont aussi des points non essentiellement singuliers de la fonction* $\Psi(\zeta)$.

Soit $\zeta=\beta$ un point non essentiellement singulier de la fonction z de ζ, pour lequel $\Psi(\zeta)$ devient infini, et qui soit tel que les deux valeurs de z correspondant à $\zeta=\beta$ ne soient pas parmi les points

singuliers des fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$. Si $z=b$ est une de ces valeurs, il faudra, d'après l'équation (N), que l'on ait $F(b)=0$, et $F(z)$ devra avoir pour développement, au voisinage de $z=b$,

$$(16) \qquad F(z)=(z-b)^l[\nu_0+\nu_1(z-b)+\ldots],$$

où l est un nombre entier positif et ν_0 est différent de zéro. On a ici à distinguer deux cas :

1° $f(b)$ est différent de zéro. Alors l'équation (E) donne, pour le voisinage de $\zeta=\beta$,

$$(17) \qquad \frac{d\zeta}{dz}=(z-b)^l[\nu'_0+\nu'_1(z-b)+\ldots],$$

où ν'_0 est différent de zéro. En intégrant cette équation, on obtient

$$\zeta-\beta=\frac{\nu'_0}{l+1}(z-b)^{l+1}+\ldots.$$

Puisque $z-b$ est une fonction uniforme de $(\zeta-\beta)^{\frac{1}{2}}$, on doit avoir

$$(18) \qquad l=1 \quad \text{et} \quad z-b=\nu''_0(\zeta-\beta)^{\frac{1}{2}}+\nu''_1(\zeta-\beta)^{\frac{2}{2}}+\ldots,$$

ν''_0 étant différent de zéro. En substituant cette valeur de $z-b$ dans $\frac{f(z)^3}{F(z)}$, on trouve, pour le voisinage de $\zeta=\beta$,

$$(19) \qquad \sqrt{\Psi(\zeta)}=\rho_{-1}(\zeta-\beta)^{-\frac{1}{2}}+\rho_1(\zeta-\beta)^{\frac{1}{2}}+\ldots,$$

où ρ_{-1} doit être différent de zéro.

2° Soit $f(b)=0$. Puisque, d'après la proposition I du § III, on ne peut pas avoir en même temps $\varphi(b)=0$, il s'ensuit que, dans ce cas, ζ devient infiniment grand. Si maintenant $\zeta=\infty$ n'est pas du nombre des points essentiellement singuliers de la fonction z de ζ, et si, aux environs de $z=b$, on a

$$f(z)=(z-b)^m[\varepsilon_0+\varepsilon_1(z-b)+\ldots],$$

où ε_0 est différent de zéro, il résulte de l'équation

$$(20) \qquad \frac{f(z)}{\varphi(z)}=\frac{1}{\zeta}$$

que

$$(21) \qquad (z-b)^m[\varepsilon'_0 + \varepsilon'_1(z-b) + \ldots] = \frac{1}{\zeta},$$

où ε'_0 est différent de zéro. Comme $z - b$ est une fonction uniforme de $\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{1}{2}}$ aux environs de $\zeta = \infty$, on voit que l'on doit avoir, soit

$$(18^a) \qquad \begin{cases} m = 1, \\ z - b = \varepsilon''_1\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \varepsilon''_2\left(\frac{1}{\zeta}\right)^2 + \ldots, \end{cases}$$

soit

$$(18^b) \qquad \begin{cases} m = 2, \\ z - b = \varepsilon''_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon''_2\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{2}{2}} + \ldots, \end{cases}$$

ε''_1 étant, dans les deux cas, différent de zéro.

Si $\varphi(b) = \gamma_0$, γ_0 devra être différent de zéro, et l'on aura

$$F(z) = -m\varepsilon_1\gamma_0(z-b)^{m-1} + \ldots,$$

d'où

$$\frac{f(z)^3}{F(z)} = -\frac{\varepsilon_1^3 m}{\gamma_0}(z-b)^{2m+1} + \ldots.$$

En substituant dans cette équation les valeurs (18^a) et (18^b), on trouve que l'on aura, pour le voisinage de $\zeta = \infty$, soit

$$(22) \qquad \sqrt{\Psi(\zeta)} = \rho_3\left(\frac{1}{\zeta}\right)^3 + \rho_4\left(\frac{1}{\zeta}\right)^4 + \ldots,$$

soit

$$(22^a) \qquad \sqrt{\Psi(\zeta)} = \rho_5\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{5}{2}} + \rho_7\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{7}{2}} + \ldots.$$

Par conséquent, dans le cas 2°, $\Psi(z)$ *n'est pas infini.*

Soit maintenant $\zeta = \beta$ une valeur qui, annulant $\Psi(\zeta)$, ne coïncide pas avec quelqu'un des points essentiellement singuliers de la fonction z de ζ, et ayant de plus la propriété que les deux valeurs de z qui lui correspondent ne soient pas parmi les points singuliers des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$. Si b est une des valeurs de z correspondant à $\zeta = \beta$, on devra avoir, d'après l'équation (N), $f(b) = 0$. Mais comme, d'après la proposition I du § III, $\varphi(b)$ ne s'annule pas en même temps, on voit que l'on devrait avoir $\beta = \infty$.

Ainsi, pour le cas où $\zeta = \infty$ est un point non essentiellement singulier de la fonction z de ζ, et étant supposé que $\Psi(\infty)$ est égal à zéro, de plus $z = b$ étant une des valeurs de z qui correspondent à $\zeta = \infty$ [d'après la remarque faite au § II, il ne peut correspondre à $\zeta = \infty$ aucun des points singuliers des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, dans le cas où $\zeta = \infty$ n'est pas un des points essentiellement singuliers de la fonction z de ζ], on parviendrait encore aux mêmes équations (20-22^a).

L'examen qui précède donne la proposition suivante :

III. *Soit $\zeta = \beta$ une valeur finie ne coïncidant avec aucun des points essentiellement singuliers de la fonction z de ζ.*

Si l'une des deux valeurs de z qui correspondent à $\zeta = \beta$ est un point singulier des fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$, et que l'on représente le plus petit exposant de $z - a$, dans les développements des $f(z)$, $\varphi(z)$ relatifs au voisinage de a, par $\frac{-n-k+1}{n}$, k désignant ou zéro ou un nombre entier positif, la fonction $\sqrt{\Psi(\zeta)}$ multipliée par $(\zeta - \beta)^k$ ou par $(\zeta - \beta)^{\frac{k+1}{2}}$ reste au voisinage de $\zeta = \beta$ uniforme et pour $\zeta = \beta$ finie et différente de zéro. On aura à prendre le premier ou le second des multiplicateurs, suivant que z admet aux environs de $\zeta = \beta$ une ou deux valeurs.

La même chose a lieu pour $a = \infty$, si l'on représente par $\frac{n+1-k}{n}$ l'exposant de la plus petite puissance de $\frac{1}{z}$.

Si à $\zeta = \beta$ correspond un point non singnlier $z = b$ des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, et si l'on a

$$\Psi(\beta) = \infty,$$

$(\zeta - \beta)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\Psi(\zeta)}$ sera aux environs de $\zeta = \beta$ uniforme et pour $\zeta = \beta$ finie et différente de zéro.

La fonction $\Psi(\zeta)$ ne peut s'annuler pour aucune valeur finie de ζ. Si $\zeta = \infty$ n'est pas un des points essentiellement singuliers de la fonction z de ζ, $\zeta^3\sqrt{\Psi(\zeta)}$ ou $\zeta^{\frac{5}{2}}\sqrt{\Psi(\zeta)}$ sera uniforme aux environs de $\zeta = \infty$ et finie et différente de zéro pour $\zeta = \infty$, suivant que z admet aux environs de $\zeta = \infty$ une ou deux valeurs.

XI.

Après les discussions des §§ II-VII, il nous reste encore à examiner comment se comportent les z_1, z_2 considérés comme fonctions de u_1, u_2 au voisinage de valeurs $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ pour lesquelles on a

$$z_1 = z_2 = a, \quad f(z_1) = f(z_2) = f(a), \quad \varphi(z_1) = \varphi(z_2) = \varphi(a),$$

lorsque $\int f(z)\,dz$, $\int \varphi(z)\,dz$ ne deviennent pas infinies pour $z = a$, et si l'on suppose que a n'est pas infini, ou qu'il ne coïncide pas avec quelque point singulier des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, soit qu'il coïncide avec quelqu'un de ces points singuliers ou qu'il est infiniment grand.

Si $\zeta = \beta$ est une des valeurs de ζ correspondant à $z = a$, β devra être, d'après la proposition I du § X, différent des points essentiellement singuliers de la fonction z de ζ.

Si a est un point singulier des fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$, il résulterait, d'après les suppositions faites aux §§ I-II, de ce que $\int f(z)\,dz$, $\int \varphi(z)\,dz$ ne doivent pas devenir infinies pour $z = a$, que les développements de $f(z)$ et $\varphi(z)$ pour le voisinage de $z = a$ ne contiennent pas de logarithmes, et, d'après la proposition II du § III, que l'exposant de la plus petite puissance de $z - a$ doit être de la forme $\dfrac{-n+1}{n}$.

La proposition III du § X subsiste donc dans ce cas, si l'on y fait $k = 0$, de sorte que, d'après cette proposition, on aurait, au voisinage de $\zeta = \beta$, soit

$$(1) \qquad \sqrt{\Psi(\zeta)} = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(\zeta - \beta) + \ldots,$$

soit

$$(1^a) \qquad \sqrt{\Psi(\zeta)} = \varepsilon_{-1}(\zeta - \beta)^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon_1(\zeta - \beta)^{\frac{1}{2}} + \ldots,$$

ε_0, ε_{-1} étant différents de zéro.

Si a coïncide avec ∞ ou avec un point non singulier des fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$, et si β a une valeur finie, on trouve encore, d'après la même proposition, que $\sqrt{\Psi(\zeta)}$ admet pour le voisinage de $\zeta = \beta$ un des deux développements (1), (1^a).

Mais, si $\beta = \infty$, on devra avoir soit

$$(2)\qquad \sqrt{\Psi(\zeta)} = \rho_3\left(\frac{1}{\zeta}\right)^3 + \rho_4\left(\frac{1}{\zeta}\right)^4 + \ldots,$$

soit

$$(2')\qquad \sqrt{\Psi(\zeta)} = \rho_5\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{5}{2}} + \rho_7\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{7}{2}} + \ldots,$$

ρ_3 et ρ_5 étant différents de zéro.

Posons, d'après l'équation (K),

$$(3)\qquad \begin{cases} z_1 = P(\zeta_1) + Q(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)}, \\ z_2 = P(\zeta_2) + Q(\zeta_2)\sqrt{R(\zeta_2)}, \end{cases}$$

et, d'après l'équation (N),

$$(4)\qquad \frac{f(z_1)^2}{F(z_1)} = \sqrt{\Psi(\zeta_1)}, \quad \frac{f(z_2)^2}{F(z_2)} = \sqrt{\Psi(\zeta_2)}.$$

Conformément à notre supposition, on aura

$$z_1 = z_2 = a \quad \text{pour} \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \beta,$$

de sorte que $\sqrt{R(\zeta_1)}$ et $\sqrt{R(\zeta_2)}$ admettent pour $\zeta_1 = \zeta_2 = \beta$ le même signe. Par conséquent, $\frac{dz_1}{d\zeta_1}$, $\frac{dz_2}{d\zeta_2}$ ont aussi pour $\zeta_1 = \zeta_2 = \beta$ la même valeur. Mais, comme il a été supposé que $f(z_1) = f(z_2) = f(a)$, il résulte de l'équation (E) et des équations (4) que les $\sqrt{\Psi(\zeta_1)}$, $\sqrt{\Psi(\zeta_2)}$ admettent le même signe pour $\zeta_1 = \zeta_2 = \beta$.

Les substitutions (3) transforment les équations (A) en celles (A_1), et l'on obtient de ces dernières pour le voisinage de $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$:

1° Lorsque l'équation (1) a lieu,

$$(5)\qquad \begin{cases} u_1 - v_1 = \varepsilon_0(t_1 + t_2) + \frac{\varepsilon_1}{2}(t_1^2 + t_2^2) + \ldots, \\ u_2 - v_2 = \beta\varepsilon_0(t_1 + t_2) + \frac{\beta\varepsilon_1 + \varepsilon_0}{2}(t_1^2 + t_2^2) + \ldots, \end{cases}$$

étant posé, pour abréger,

$$(6)\qquad \zeta_1 - \beta = t_1, \quad \zeta_2 - \beta = t_2.$$

Puisque les termes de ces deux séries sont de la forme

$$\text{const.}(t_1^m + t_2^m),$$

on peut, en introduisant les variables

$$(7) \qquad t_1 + t_2 = w_1, \quad t_1^2 + t_2^2 = w_2,$$

présenter ces séries sous forme de développements procédant suivant les puissances entières positives de w_1, w_2 :

$$(8) \qquad \begin{cases} u_1 - v_1 = \varepsilon_0 w_1 + \dfrac{\varepsilon_1}{2} w_2 + \ldots, \\ u_2 - v_2 = \beta\varepsilon_0 w_1 + \dfrac{\beta\varepsilon_1 + \varepsilon_0}{2} w_2 + \ldots, \end{cases}$$

où nous n'avons noté que les termes du premier degré.

Puisque $\varepsilon_0(\beta\varepsilon_1 + \varepsilon_0) - \beta\varepsilon_0\varepsilon_1 = \varepsilon_0^2$ est différent de zéro, il résulte de la proposition de Jacobi, citée au § II, que l'on peut des équations (8) obtenir w_1 et w_2 en séries procédant suivant les puissances entières positives de $u_1 - v_1$, $u_2 - v_2$. Ainsi w_1 et w_2 sont uniformes aux environs de $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, et, par conséquent, $\zeta_1 + \zeta_2$ et $\zeta_1\zeta_2$ le sont aussi.

2° Lorsque l'équation (1^a) est remplie, on a

$$(5^a) \qquad \begin{cases} u_1 - v_1 = 2\varepsilon_{-1}(t_1 + t_2) + \dfrac{2}{3}\varepsilon_1(t_1^3 + t_2^3) + \ldots, \\ u_2 - v_2 = 2\beta\varepsilon_{-1}(t_1 + t_2) + \dfrac{2}{3}(\beta\varepsilon_1 + \varepsilon_{-1})(t_1^3 + t_2^3) + \ldots, \end{cases}$$

étant posé, pour abréger,

$$(6^a) \qquad (\zeta_1 - \beta)^{\frac{1}{2}} = t_1, \quad (\zeta_2 - \beta)^{\frac{1}{2}} = t_2.$$

Les termes de ces deux séries sont de la forme

$$\text{const.}(t_1^{2m+1} + t_2^{2m+1}).$$

Tous ces termes sont divisibles par $t_1 + t_2$. Si $u_1 - v_1$, $u_2 - v_2$, t_1, t_2 deviennent donc infiniment petits, les termes immédiatement suivants à $2\varepsilon_{-1}(t_1 + t_2)$ et $2\beta\varepsilon_{-1}(t_1 + t_2)$ respectivement deviennent des infiniment petits d'ordre supérieur à celui de ces dernières quantités. Par conséquent, $u_1 - v_1$, $u_2 - v_2$ sont du même ordre que $t_1 + t_2$. En soustrayant maintenant la seconde des

équations (5^a) de la première multipliée par β, on trouve que

$$\beta(u_1 - v_1) - (u_2 - v_2)$$

doit être un infiniment petit d'un ordre supérieur à celui de $t_1 + t_2$, et par suite d'un ordre supérieur à celui de $u_1 - v_1$ ou de $u_2 - v_2$, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$(9) \qquad \beta(u_1 - v_1) - (u_2 - v_2) = 0.$$

Par conséquent, ζ_1, ζ_2 n'arrivent à une même valeur β que lorsque la relation (9) a lieu entre les derniers éléments des chemins suivant lesquels u_1, u_2 parviennent à v_1, v_2.

3° Dans le cas où l'équation (2) a lieu, on a

$$(5^b) \qquad \begin{cases} u_1 - v_1 = -\frac{1}{2}\rho_3(t_1^2 + t_2^2) - \frac{1}{3}\rho_4(t_1^3 + t_2^3) - \ldots, \\ u_2 - v_2 = -\rho_3\,(t_1 + t_2) - \frac{1}{2}\rho_4(t_1^2 + t_2^2) - \ldots, \end{cases}$$

en posant

$$(6^b) \qquad \frac{1}{\zeta_1} = t_1, \quad \frac{1}{\zeta_2} = t_2.$$

En introduisant dans les séries (5^b) les variables

$$(7^a) \qquad t_1 + t_2 = w_1, \quad t_1^2 + t_2^2 = w_2,$$

on peut les présenter sous la forme de développements procédant suivant les puissances entières positives de w_1, w_2 :

$$(8^a) \qquad \begin{cases} u_1 - v_1 = -\frac{1}{2}\rho_3 w_2 + \ldots, \\ u_2 - v_2 = -\rho_3 w_1 - \frac{1}{2}\rho_4 w_2 - \ldots. \end{cases}$$

Il résulte du théorème cité de Jacobi que les w_1, w_2 peuvent être développés au voisinage de $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ suivant les puissances entières positives de $u_1 - v_1$, $u_2 - v_2$. Ainsi w_1, w_2, de même que $\zeta_1 + \zeta_2$, $\zeta_1\zeta_2$, seront uniformes pour le même voisinage.

4° Lorsqu'enfin l'équation (2^a) a lieu, on a

$$(5^c) \qquad \begin{cases} u_1 - v_1 = -\frac{2}{3}\rho_5(t_1^3 + t_2^3) - \frac{2}{5}\rho_7(t_1^5 + t_2^5) - \ldots, \\ u_2 - v_2 = -2\rho_5(t_1 + t_2) - \frac{2}{3}\rho_7(t_1^3 + t_2^3) - \ldots, \end{cases}$$

étant posé

$$(6^e)\qquad \zeta_1^{-\frac{1}{2}} = t_1,\quad \zeta_2^{-\frac{1}{2}} = t_2.$$

Tous les termes de ces séries sont divisibles par $t_1 + t_2$. Si donc $u_1 - v_1$, $u_2 - v_2$, t_1, t_2 deviennent infiniment petits, $u_1 - v_1$ sera d'un ordre supérieur à celui de $t_1 + t_2$, tandis que $u_2 - v_2$ sera du même ordre que $t_1 + t_2$. Par conséquent, il existe aussi dans ce cas une relation entre les derniers éléments des chemins suivant lesquels u_1, u_2 parviennent à v_1, v_2. Il ne pourra donc pas se faire que pour des chemins *arbitraires* de u_1, u_2 les ζ_1, ζ_2 deviennent simultanément infinis.

Au voisinage maintenant de $\zeta = \beta$, dans le cas où l'équation (1) a lieu, ainsi qu'au voisinage de $\zeta = \infty$, lorsque l'équation (2) est vérifiée, la fonction $\sqrt{\Psi(\zeta)}$ est uniforme, et par conséquent aussi $\sqrt{R(\zeta)}$, d'après une remarque du § IX.

Si donc, sous les mêmes conditions, aux valeurs $\zeta_1 = \zeta_2 = \beta$ ou $\zeta_1 = \zeta_2 = \infty$ correspond le couple de valeurs $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, les fonctions $\sqrt{R(\zeta_1)}$, $\sqrt{R(\zeta_2)}$ ne doivent pas changer leur signe lorsque les u_1, u_2, tout en restant à une distance suffisamment petite des v_1, v_2, circulent autour de ces points, et, par conséquent, les fonctions

$$G(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)} + G(\zeta_2)\sqrt{R(\zeta_2)},\quad G(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)}.G(\zeta_2)\sqrt{R(\zeta_2)}$$

seront uniformes au même voisinage si $G(\zeta)$ représente une fonction uniforme de ζ. En désignant donc par z_1 et z_2 les valeurs de z qui correspondent, d'après les équations (3), aux deux couples de valeurs

$$\zeta_1,\ \sqrt{R(\zeta_1)}\quad \text{et}\quad \zeta_2,\ \sqrt{R(\zeta_2)},$$

il résulte que $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ seront uniformes aux environs des valeurs de u_1, u_2 pour le voisinage desquelles $\zeta_1 + \zeta_2$, $\zeta_1 \zeta_2$ sont uniformes.

XII.

Il ressort des développements qui précèdent que, sous la supposition faite au § II, les fonctions z_1, z_2 des variables u_1, u_2 définies par les équations (A) sont les racines d'une équation quadratique,

dont les coefficients sont uniformes pour des valeurs finies des variables arbitraires u_1, u_2. Si l'on désigne par $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ des quantités arbitraires, les quantités $\gamma_{11} u_1 + \gamma_{12} u_2$, $\gamma_{21} u_1 + \gamma_{22} u_2$ sont finies pour tout couple de valeurs finies de u_1, u_2, et deviennent infinies lorsqu'une au moins de ces dernières quantités devient infinie. Les fonctions $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ sont donc des fonctions uniformes des variables u_1, u_2 pour toutes les valeurs finies de ces variables, indépendamment de la supposition du § II.

En résumant maintenant les recherches des §§ II-VII et XI, on obtient le résultat suivant :

Pour que les fonctions z_1, z_2 des variables arbitraires et indépendantes entre elles u_1, u_2, définies par les équations (A), *satisfassent à une équation quadratique dont les coefficients soient uniformes pour toutes les valeurs finies de ces variables, étant supposé que les fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ aient les propriétés indiquées au* § I, *les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes :*

Les deux fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ ne doivent pas s'annuler pour une même valeur finie de z.

L'exposant de la plus petite puissance de $z - a$ dans le développement de $\gamma f(z) + \delta \varphi(z)$, où γ et δ sont des constantes arbitraires, pour le voisinage d'un point singulier a des fonctions $f(z), \varphi(z)$, doit être un nombre négatif, ne surpassant pas l'unité négative ou bien ayant la valeur $-1 + \frac{1}{n}$ (n étant un nombre entier positif).

D'autre part, l'exposant de la plus petite puissance de $\frac{1}{z}$ dans le développement de $\gamma f(z) + \delta \varphi(z)$ relatif au voisinage de $z = \infty$ doit être un nombre ne surpassant pas l'unité positive ou bien ayant la valeur $1 + \frac{1}{n}$ (n étant un nombre entier positif).

La fonction z de ζ définie par l'équation (D) *ne doit pas avoir plus de deux valeurs* [éq. (K)], *tandis que $f(z)$ considérée comme fonction de ζ doit avoir les propriétés exprimées par les équations* (L), (L').

Heidelberg, décembre 1880.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

RESAL (H.). — TRAITÉ DE MÉCANIQUE GÉNÉRALE, 6 vol. in-8°. — Paris, Gauthier-Villars (¹).

M. Resal vient de faire paraître le sixième et dernier Volume de son *Traité de Mécanique générale*. Nous n'avons pas cru devoir faire, à mesure qu'ils paraissaient, l'analyse des Volumes de cet Ouvrage considérable, qui résume la plus grande partie de nos connaissances en Mécanique rationnelle et appliquée.

Dans le premier Volume, l'auteur prend pour point de départ la partie rationnelle de son *Traité de Cinématique pure*, conformément aux idées de Poncelet. Il reproduit à ce sujet un grand nombre de théorèmes, dont une bonne partie est due à l'auteur; sans entrer dans trop de détails, nous pouvons faire remarquer qu'il expose d'une manière simple et élégante la théorie de Newton sur les perturbations des planètes censées situées dans le plan de l'équateur, et il en fait une heureuse application à la question soulevée par Poisson et relative à une accélération perturbatrice dirigée en sens inverse du mouvement et proportionnelle au carré de la vitesse.

La théorie des mouvements relatifs de Coriolis a reçu une grande extension de la part de l'auteur, qui, à l'aide de théorèmes très ingénieux, est parvenu à simplifier considérablement cette théorie, que l'on ne pouvait aborder auparavant que très difficilement.

Entrant dans le domaine de la Dynamique, M. Resal s'affranchit du théorème de d'Alembert, qui n'a presque rien de commun avec la signification qu'on lui attribue aujourd'hui et que l'on pourrait

(¹) *Traité de Mécanique générale*, comprenant les Leçons professées à l'École Polytechnique et à l'École des Mines, par M. H. RESAL, membre de l'Institut, ingénieur en chef des Mines, adjoint au Comité d'Artillerie pour les études scientifiques. 6 volumes in-8° (Paris, Gauthier-Villars). Cet Ouvrage se divise en trois Sections :

Mécanique rationnelle. Tome I, avec 66 fig., 1873, et Tome II, avec 56 fig., 1874.

Mécanique appliquée (moteurs et machines). Tome III, avec 213 fig., 1875, et Tome IV, avec 200 fig., 1876.

Constructions. Tome V, avec 308 fig., 1880, et Tome VI, avec 519 fig. et 5 pl., 1881.

appeler avec juste raison le théorème de Laplace et Lagrange, chacun de ces illustres géomètres travaillant à l'insu de l'autre. Une interprétation de la vitesse de l'extrémité de l'axe qui représente le moment des quantités de mouvement permet à l'auteur d'établir, sans transformation de coordonnées, les équations d'Euler relatives au mouvement d'un solide autour d'un point fixe, du mouvement de la toupie, etc. M. Resal termine son premier Volume par une théorie très simple du mouvement relatif d'un solide par rapport à un système invariable, avec son application aux phénomènes terrestres.

Dans son deuxième Volume, M. Resal, en s'occupant du frottement, donne notamment l'explication des rotations périmétriques de M. Sire et du mouvement de glissement d'une bille sur un tapis (théorème de J.-A. Euler, fils du célèbre analyste).

L'auteur reproduit ensuite la théorie de l'équilibre intérieur des corps, en en faisant l'application à la poussée des terres et à la partie fondamentale de la théorie de l'élasticité. Abandonnant cette théorie, dont jusqu'à présent on n'a pu tirer un grand parti, l'auteur a cru devoir reprendre les idées de Bernoulli, Coulomb et Navier sur l'élasticité et dont Poisson a pu tirer un excellent parti en s'occupant des vibrations des prismes.

L'auteur a traité avec beaucoup de soin la mécanique des fluides. En Hydrostatique, il a exposé d'une manière simple, d'après les idées de Laplace et de Poisson, les principes fondamentaux de la capillarité. En Hydrodynamique, il a introduit les résultats de Svanberg sur l'écoulement d'un liquide pesant par un orifice pratiqué au sommet d'un vase de révolution autour d'un axe vertical et la théorie bien simplifiée de Meyer relative au mouvement d'un corps, dans un fluide pesant indéfini. L'auteur s'occupe ensuite de cette demi-science que l'on appelle l'Hydraulique, qui rentre surtout dans l'art de l'ingénieur et sur laquelle nous ne croyons pas devoir nous arrêter. Le Volume se termine par la Thermodynamique, exposée avec une grande simplicité et que M. Resal a introduite le premier en France, en 1860, sous le titre de *Commentaire*, dans un Mémoire publié dans les *Annales des Mines*.

On peut ajouter qu'il a établi les formules fondamentales de la Balistique intérieure, dont M. Sarrau a tiré depuis un excellent parti. Dans un Appendice nous trouvons quelques Notes intéressantes, savoir : 1° *De l'influence du vent sur le mouvement des*

projectiles; 2° *De l'influence de la résistance de l'air sur le mouvement du pendule à oscillations elliptiques,* recherche basée sur une théorie originale d'un mode particulier de perturbations; 3° *Sur les points d'échappement d'un élément matériel mobile sur une courbe fixe;* 4° *Sur le choc de deux corps libres,* théorie qui a reçu depuis une si belle extension de la part de M. Darboux.

A partir de son troisième Volume, nous ne voyons plus dans M. Resal qu'un savant ingénieur qui cherche à relier la théorie avec la pratique. En ce qui concerne la première Section, relative aux transmissions de mouvement dans les machines, nous nous bornerons à signaler une théorie analytique originale du balancier et accessoires de Watt, une théorie complète des coulisses, empruntée à Zeuner, mais qui nous paraît beaucoup plus simple, enfin une théorie des coulisses des bateaux à vapeur du lac Léman. L'auteur s'occupe ensuite des volants, et à ce sujet il est allé plus loin que Coriolis, qui, par une analyse assez compliquée et combinée avec des épures (XXIe Cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*), avait cherché à tenir compte de l'inertie des pièces oscillantes. Par une approximation bien suffisante, M. Resal a su vaincre toutes les difficultés et même tenir compte de la détente dans une machine à vapeur. L'auteur expose ensuite une théorie complète des régulateurs ordinaires et isochrones, du régulateur pneumatique de Larivière, de la stabilité des locomotives et des mécanismes de l'horlogerie.

Le Tome IV est consacré à l'étude des moteurs animés, hydrauliques, à vent et thermiques. Nous nous bornerons à mentionner des théories complètes du bélier hydraulique, de l'utile intervention des réservoirs d'air, dans les conduits des enveloppes des cylindres des machines à vapeur, du profil rationnel des segments d'un piston, des fonds plats et compensateurs des chaudières.

Dans son cinquième Volume on voit que M. Resal, comme il le reconnaît lui-même, se lance de plus en plus dans la pratique, et par nécessité; car, sur les entrefaites, il est devenu professeur de Construction à l'École Nationale des Mines. Quoique n'ayant pas beaucoup de sympathie pour les sciences peu rationnelles, nous nous permettrons toutefois de dire que M. Resal a donné une formule nouvelle relativement à la flexion des pièces circulaires (qui, comme cas particulier, rentre dans celle des prismes), ce qui lui permet de ré-

soudre toutes les questions relatives à ces pièces non fermées ou fermées. Nous trouvons également dans cette Partie des théories intéressantes des chaînes à maillons plats, des chaînes de sûreté des chemins de fer, des bandages des roues, des véhicules des chemins de fer, une application très ingénieuse de la flexion circulaire au tracé des arcs de cercle d'un grand rayon au moyen d'un instrument dont il est l'inventeur, des ressorts de suspension des véhicules des chemins de fer, de la flexion et de la torsion simultanées des pièces planes ou gauches, des ressorts à boudin.

Nous ne nous arrêterons pas à l'exposition des détails techniques de la construction qui se trouve dans ce Volume. La seule chose que nous ayons à signaler est relative à la poussée et à la butée des terres. M. Resal est parvenu, par l'Analyse, à résoudre la question, quelle que soit la forme continue ou discontinue du profil du terrain; on ne connaissait jusqu'ici à ce sujet que l'épure de Poncelet, qui exige que l'on sache bien dessiner et que l'on ait beaucoup de patience.

En tête du Tome VI se trouve le Chapitre des voûtes. En ce qui concerne les voûtes en berceau, M. Resal donne d'abord le tracé dû à Huygens d'une anse de panier à trois centres, puis le tracé d'une anse de panier à un nombre quelconque d'après la méthode élégante et trop peu connue de feu Michal, inspecteur général des Ponts et Chaussées, enfin celui de la courbe à onze centres du pont de Neuilly, résultant d'une règle empirique de Perronet. Plus loin, nous remarquons une théorie originale relative à la pression exercée par une voûte en construction sur son centre. Les conditions de stabilité d'une voûte sont exposées d'abord en faisant usage des courbes de pression de Moreley et Méry, puis d'après les principes de Coulomb, dont les généraux Audoy, Poncelet et le colonel Petit ont fait de si intéressantes applications. A ce sujet, l'auteur démontre un théorème nouveau dont nous ne croyons pas devoir reproduire l'énoncé et qui a pour but de faire ressortir l'analogie qui existe entre les méthodes de Méry et de Coulomb. Nous signalerons enfin : 1° les théories nouvelles relatives à la flexibilité des plates-bandes et des voûtes en dôme, aux tirants en fer employés dans la construction des voûtes pour en assurer la stabilité; 2° les résultats des expériences de M. de la Gournerie sur les voûtes biaises et qui ont pour objet de faire disparaître l'idée ab-

RUBINI (R.). — COMPLEMENTO DI CALCOLO INFINITESIMALE. — Napoli, 1880. Br. in-8°, 167 pages.

(Analyse faite par l'auteur.)

Mon but, en rédigeant cet Ouvrage, a été d'exposer le plus clairement possible les nouvelles méthodes d'intégration au moyen du *Calcul des opérations*, dues aux géomètres anglais et surtout à Boole. On doit à cet auteur des procédés très ingénieux pour intégrer les équations linéaires à coefficients constants ou variables, aussi bien que les équations aux dérivées partielles et les équations à plusieurs variables aux différences finies et aux différences mêlées.

A mon avis, le plus important et le plus ingénieux des procédés inventés par Boole est celui qui s'applique à l'intégration des équations linéaires. Par un changement de la variable indépendante, on parvient quelquefois à réduire la question à la résolution d'un système d'équations *binômes* (d'après la dénomination du même auteur) de la forme symbolique (¹)

$$(a) \qquad u_r - q_r\varphi(D)e^t u_r = U,$$

lesquelles ne sont que du premier ordre lorsque le symbole $D = \frac{d}{dt}$ est de la forme $\frac{\alpha D + \beta}{\alpha_1 D + \beta_1}$.

Par un changement de la variable dépendante, on ramène l'intégration de l'équation donnée (a) à la résolution de deux équations de condition

$$(b) \qquad u = P_r \frac{\varphi(D)}{\psi(D)} v, \quad V = \left[P_r \frac{\varphi(D)}{\psi(D)}\right]^{-1} U,$$

et à l'intégration de l'équation symbolique

$$(c) \qquad v - q_r\psi(D)e^t v = V,$$

laquelle est d'un ordre inférieur à celui de la proposée. La première des équations (b) conduit généralement à une différentia-

(¹) *Complemento di Calcolo infinitesimale*, p. 63.

tion successive, et la seconde à une intégration, sans que le cas contraire puisse se présenter. On commence par déterminer V par la seconde des équations (*b*); puis on passe à l'intégration de l'équation (*c*) pour obtenir *v*; enfin l'on détermine *u* par la première équation (*b*). Les équations (*b*) font connaître si l'équation proposée peut s'intégrer en termes finis.

Ce procédé singulier ne s'applique qu'aux équations qui peuvent prendre la forme binôme (*a*); mais Boole lui-même a montré comment parfois, en introduisant une quantité indéterminée, on peut ramener une équation *non binôme* à une équation binôme ([1]).

Quand l'équation proposée n'est pas intégrable en termes finis, Boole a donné une belle méthode pour l'intégration par séries, et il a formulé une règle pour les cas où la méthode générale tombe en défaut. Cette règle, dont l'éminent analyste a cru pouvoir s'attribuer la découverte, est comprise tout entière dans un procédé employé pour la première fois par Euler, ainsi que je l'ai fait voir dans une Note présentée à l'Académie des Sciences de Naples ([2]).

Mon Ouvrage ne renferme aucune théorie qui m'appartienne, si ce n'est ce qui concerne la détermination des constantes dans des cas exceptionnels ([3]).

J'ai cru néanmoins qu'il était de la plus grande importance de mettre à la portée des étudiants la connaissance des nouvelles méthodes, qui, j'en ai la certitude, par leur simplicité et leur généralité (autant du moins que le calcul inverse est praticable), trouveront place dans les applications du Calcul aux sciences physico-mathématiques.

Je n'ai pas introduit dans mon Ouvrage certaines applications de la méthode qui m'ont paru exiger des démonstrations plus rigoureuses que celles que l'on connaît jusqu'ici. R. R.

---

(1) *Complemento*, p. 92.

(2) *Intorno ad un' assertiva di Boole* (*Rendic. della R. Accad. delle Sc. fis. e matem.*, t. XIX; anno 1880.

(3) *Complemento*, §§ 35 et 39.

MÉLANGES.

ÉTUDE SUR LE TRIANGLE HARMONIQUE;

PAR M. CHARLES HENRY.

HISTORIQUE.

1. Le 27 décembre 1694, Leibniz écrivait au marquis de l'Hospital : « J'avais pris plaisir... de chercher les sommes des séries des nombres, et je m'étais servi pour cela des différences sur un théorème assez connu, qu'une série décroissant à l'infini, son premier terme est égal à la somme de toutes ses différences. Cela m'avait donné ce que j'appelais le *triangle harmonique,* opposé au triangle arithmétique de M. Pascal. Car M. Pascal avait montré comment on peut donner les sommes des nombres figurés qui proviennent en cherchant les sommes et les sommes des sommes des termes de la progression arithmétique naturelle, et moi je trouvai que les fractions des nombres figurés sont les différences et les différences des différences des termes de la progression harmonique naturelle, c'est-à-dire des fractions

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,$$

et qu'ainsi on peut donner les sommes des séries des fractions figurées comme

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\ldots,$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\ldots.$$

Reconnaissant donc cette grande utilité des différences et voyant que par le calcul de M. Descartes l'ordonnée de la courbe peut être exprimée, je vis que trouver les quadratures ou les sommes des ordonnées n'est autre chose que trouver une ordonnée de la quadratrice dont la différence est proportionnelle à l'ordonnée donnée. Je reconnus aussi bientôt que trouver les tangentes n'est autre chose

que différentier, et trouver les quadratures n'est autre chose que sommer, puorvu qu'on suppose les différences incomparablement petites. Je vis aussi que, nécessairement, les grandeurs différentielles se trouvent hors de la fraction et hors du *vinculum*, et qu'ainsi on peut donner les tangentes sans se mettre en peine des irrationnelles et des fractions. Et voilà l'histoire de l'origine de ma méthode (¹). »

Dans un opuscule intitulé *Historia et origo Calculi differentialis*, publié seulement en 1846 par M. Gerhardt (²), nous trouvons quelques détails complémentaires. C'est dans le courant de l'année 1672 que Leibniz eut l'idée du triangle harmonique, et c'est Huygens qui lui proposa de trouver la somme d'une série décroissante de fractions, les numérateurs étant des unités et les dénominateurs des nombres triangulaires. Huygens avait pu calculer cette somme à la suite d'entretiens avec Hudde sur les probabilités. Leibniz la trouva égale à 2, ce qui concordait avec le résultat de Huygens et avec la vérité. Il découvrit, par le même procédé, les sommes des séries de fractions dont les dénominateurs sont des nombres figurés quelconques, et dans la suite, ayant pris connaissance du triangle arithmétique de Pascal, il donna, par analogie, à son procédé d'investigation le nom de *triangle harmonique*. L'illustre géomètre revient avec quelques détails sur ce triangle dans une Note intitulée *Nova Algebræ promotio*, publiée également par M. Gerhardt (³); au contraire, l'auteur y fait une simple allusion dans une de ses lettres à Oldenbourg, imprimées dans le *Commercium epistolicum* (⁴), et le mentionne rapidement dans son opuscule *De vera proportione circuli* (⁵). Cette conception, qui joua un si grand rôle dans la création du Calcul différentiel, est donc une révélation toute récente de l'érudition, essentiellement digne à ce point de vue de l'attention des géomètres.

(¹) *Leibnizens Mathematische Schriften*, Band II, p. 259.

(²) *Historia et origo Calculi differentialis a Leibnitio conscripta;* Hannoveræ, 1846. — *Leibnizens Mathematische Schriften*, Band I, p. 404.

(³) *Leibnizens Mathematische Schriften*, Band III, p. 174.

(⁴) *Commercium epistolicum*, nouvelle édition. Paris, 1856, p. 91.

(⁵) *Leibnitii Opera*, éd. Dutens, t. III, p. 143.

CONSTRUCTIONS DU TRIANGLE HARMONIQUE.

2. De même que le triangle arithmétique, le triangle harmonique peut se construire de trois manières.

Première construction. — Écrivons sur une ligne horizontale la série harmonique de 1 à $\frac{1}{9}$ par exemple; retranchons la deuxième fraction de la première, la troisième de la deuxième, la quatrième de la troisième, etc., nous avons la deuxième ligne du triangle. Opérons sur cette deuxième ligne comme nous avons opéré sur la première, nous aurons la troisième ligne, et ainsi de suite; chaque ligne contiendra une fraction de moins que la précédente jusqu'à la neuvième ligne, qui n'en contiendra évidemment plus qu'une.

Construction (a).

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{72}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{168}$	$\frac{1}{252}$		
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{1}{280}$	$\frac{1}{504}$			
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{280}$	$\frac{1}{630}$				
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{168}$	$\frac{1}{504}$					
$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{252}$						
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{72}$							
$\frac{1}{9}$								

Deuxième construction. — Au lieu d'écrire la série harmonique sur une ligne horizontale, écrivons-la sur une ligne oblique; pro-

cédons comme précédemment et écrivons les différences sur des lignes parallèles à la première; nous avons alors une deuxième construction du triangle harmonique, qui offre sur la construction (*a*) l'avantage de mieux faire ressortir les symétries numériques.

Construction (*b*).

$$\frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{5} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{7} \quad \frac{1}{42} \quad \frac{1}{105} \quad \frac{1}{140} \quad \frac{1}{105} \quad \frac{1}{42} \quad \frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{8} \quad \frac{1}{56} \quad \frac{1}{168} \quad \frac{1}{280} \quad \frac{1}{280} \quad \frac{1}{168} \quad \frac{1}{56} \quad \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{9} \quad \frac{1}{72} \quad \frac{1}{252} \quad \frac{1}{504} \quad \frac{1}{630} \quad \frac{1}{504} \quad \frac{1}{282} \quad \frac{1}{72} \quad \frac{1}{9}$$

Troisième construction. — Écrivons les neuf premiers termes de la série harmonique sur une ligne verticale; retranchons la deuxième fraction de la première, nous aurons la première fraction de la deuxième colonne; retranchons la troisième fraction de la deuxième, nous aurons la deuxième fraction de la deuxième colonne, etc.; retranchons la deuxième fraction de la deuxième colonne de la première fraction de la même colonne, nous aurons la première fraction de la troisième colonne, et ainsi de suite; chaque colonne contenant un terme de moins que la précédente jusqu'à la neuvième, qui n'en contient évidemment qu'un.

C'est sur la construction (*c*) que nous étudierons les propriétés du triangle harmonique, sans nous attarder aux démonstrations.

Construction (*c*).

$\frac{1}{1}$								
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$						
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$					
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$				
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$			
$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{7}$		
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{168}$	$\frac{1}{280}$	$\frac{1}{280}$	$\frac{1}{168}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{8}$	
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{72}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{504}$	$\frac{1}{630}$	$\frac{1}{504}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{72}$	$\frac{1}{9}$

PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE HARMONIQUE.

3. Théorème I. — *Dans un triangle harmonique, un terme quelconque est égal à la différence de tous les termes de la colonne précédente jusqu'au terme placé sur la même ligne que lui ou à la différence de tous les termes au-dessus de lui, moins le terme placé à gauche de lui.*

Désignant par $\frac{1}{f}$ une fraction figurée quelconque, par l'exposant n le numéro de la colonne, par l'indice r le rang de la fraction dans la colonne, nous avons

$$(1)\quad \frac{1}{f_1^{n-1}} - \frac{1}{f_2^{n-1}} - \ldots - \frac{1}{f_r^{n-1}} = \frac{1}{f_{r-1}^n} = \frac{1}{f_1^n} - \frac{1}{f_2^n} - \ldots - \frac{1}{f_{r-2}^n} - \frac{1}{f_r^{n-1}},$$

d'où l'on déduit

$$(2)\quad \frac{1}{f_r^n} = \frac{1}{f_n^r},$$

c'est-à-dire :

posant égal au rang de cette ligne, plus la somme des sommes des dénominateurs de toutes les lignes précédentes à partir de la deuxième.

5. De même, on peut facilement établir les propositions suivantes :

THÉORÈME IV. — *Dans chaque ligne du triangle harmonique, le rapport d'un terme* $\frac{1}{f_{r+1}^{n-1}}$ *au terme* $\frac{1}{f_r^n}$ *est égal au rapport des nombres qui expriment les rangs de ces termes, comptés l'un avant* $\frac{1}{f_r^n}$, *l'autre après* $\frac{1}{f_{r+1}^{n-1}}$, *à partir de l'extrémité de la ligne,* c'est-à-dire que

$$(4) \qquad \frac{1}{f_{r+1}^{n-1}} = \frac{r}{f_r^n(n-1)}.$$

THÉORÈME V. — *Le rapport de deux termes consécutifs appartenant à une colonne d'ordre* n, *dans le cas de* $n > 1$, *et de rangs* r *et* $r+1$, *est égal à l'inverse du premier terme d'ordre* $n+r$, *divisé par* r, c'est-à-dire

$$(5) \qquad \frac{\frac{1}{f_r^n}}{\frac{1}{f_{r+1}^n}} = \frac{f_1^{n+r}}{r}.$$

THÉORÈME VI. — *La colonne* $n^{\text{ième}}$ *du triangle harmonique présente l'ordre* $(n+1)^{\text{ième}}$ *des fractions figurées divisées par* n.

6. De l'observation en particulier des deux premières colonnes du triangle, on tire la série bien connue de Leibniz :

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n},$$

ou, dans le cas de $n = \infty$,

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \ldots.$$

De cette série, qui est le principe du calcul des différences, on déduit :

Corollaire I. — La somme $\sum \frac{1}{m^2} + \sum \frac{1}{m^3} + \sum \frac{1}{m^4} + \ldots$, dans laquelle m marque successivement tous les nombres à partir de 2, converge vers l'unité. En effet,

$$\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \ldots,$$

$$\frac{1}{2.3} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \ldots,$$

$$\frac{1}{3.4} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

donc

$$\sum \frac{1}{m^2} + \sum \frac{1}{m^3} + \sum \frac{1}{m^4} + \ldots = 1. \tag{6}$$

Corollaire II. — De cette équation se déduit celle-ci :

$$\sum \frac{1}{m^n - 1} = 1, \tag{7}$$

dans laquelle n prend toutes les valeurs possibles et m est soumis à la condition de n'être pas puissance.

On a, pour $m = 1, 2, 3, \ldots, \infty$,

$$\sum \frac{1}{m^n - 1} = \sum \frac{1}{m^2 - 1} + \sum \frac{1}{m^3 - 1} + \sum \frac{1}{m^4 - 1} + \ldots;$$

or

$$\sum \frac{1}{m^2 - 1} = \sum \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^4} + \frac{1}{m^6} + \ldots \right),$$

$$\sum \frac{1}{m^3 - 1} = \sum \left(\frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^6} + \frac{1}{m^9} + \ldots \right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

mais les seconds membres des équations précédentes sont évidem-

ment égaux à $\sum \frac{1}{m^2} + \sum \frac{1}{m^3} + \ldots$; l'équation (7) est donc démontrée : elle est connue sous le nom de *théorème de Goldbach*.

Si l'on met les égalités du corollaire I sous la forme

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots,$$
$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on a en général

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{r}{n} &= \left(\frac{r}{n+r}\right)^1 + \left(\frac{r}{n+r}\right)^2 + \left(\frac{r}{n+r}\right)^3 + \ldots, \\ \frac{r}{n-r} &= \left(\frac{r}{n}\right)^1 + \left(\frac{r}{n}\right)^2 + \left(\frac{r}{n}\right)^3 + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Si, dans cette dernière formule, on fait $r = 1$, il vient

$$\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots,$$

c'est-à-dire :

Corollaire III. — Un terme quelconque de la série harmonique est égal à la somme de toutes les puissances à l'infini du terme suivant.

Dans le cas $r = 1$, on voit également que

$$\frac{r}{n} - \frac{r}{n+r} = \frac{r}{n}\,\frac{r}{n+r},$$

c'est-à-dire :

Corollaire IV. — La différence de deux termes consécutifs de la série harmonique est égale à leur produit.

Mais si

$$(9)\qquad \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \left(\frac{1}{n}\right)^4 + \ldots,$$

de même

$$(10)\quad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n^2+n} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 - \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \left(\frac{1}{n}\right)^4 - \left(\frac{1}{n}\right) + \ldots.$$

Dans les équations (9) et (10), donnons successivement à n toutes les valeurs à partir de 2; on voit que le premier membre de l'équation (9) représente successivement toutes les fractions triangulaires à partir de $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire que la limite de la somme des inverses des puissances à l'infini est 1, ce qui est le corollaire I. On voit en outre que le premier membre de l'équation (10) représente successivement chaque fraction triangulaire à partir de $\frac{1}{6}$. Donc la somme des inverses des puissances paires, moins la somme des inverses des puissances impaires, est égale à $\frac{1}{2}$; d'où l'on conclut (résultat confirmé par les Tables) :

Corollaire V. — La somme des inverses des puissances paires tend vers $\frac{3}{4}$ et la somme des inverses des puissances impaires tend vers $\frac{1}{4}$.

7. Comparons entre elles deux colonnes quelconques du triangle, nous avons

$$\frac{1}{f_1^n}+\frac{1}{f_2^n}+\frac{1}{f_3^n}+\ldots+\frac{1}{f_r^n}=\frac{1}{f_1^{n-1}}-\frac{1}{f_{r+1}^{n-1}},$$

$$\frac{1}{f_{r+1}^n}+\frac{1}{f_{r+2}^n}+\frac{1}{f_{r+3}^n}+\ldots+\frac{1}{f_{r+r'}^n}=\frac{1}{f_{r+1}^{n-1}}-\frac{1}{f_{r+r'+1}^{n-1}},$$

et ainsi de suite.

En ajoutant membre à membre, on obtient

$$\frac{1}{f_1^n}+\frac{1}{f_2^n}+\frac{1}{f_3^n}+\frac{1}{f_4^n}+\ldots+\frac{1}{f_r^n}+\frac{1}{f_{r+1}^n}+\ldots+\frac{1}{f_{r+r'}^n}=\frac{1}{f_1^{n-1}}-\frac{1}{f_{r+r'+1}^{n-1}}.$$

Dans cette équation, lorsque le premier membre devient infini, la fraction $\frac{1}{f_{r+r'+1}^{n-1}}$ est remplacée par d'autres fractions qui tendent vers zéro; on a donc

$$\sum\frac{1}{f_r^n}=\frac{1}{f_r^{n-1}}, \tag{11}$$

c'est-à-dire que *la somme d'une infinité de termes d'une colonne*

à partir du $r^{\text{ième}}$ terme est égale au $r^{\text{ième}}$ terme de la colonne d'ordre immédiatement antérieur; autrement dit le théorème énoncé par Leibniz :

THÉORÈME VII. — *Dans une série décroissant à l'infini, le premier terme est égal à la somme de toutes ses différences.*

Remarque. — La première colonne contient les fractions figurées de tous les ordres postérieurs au second; on peut donc exprimer toujours les fractions figurées de tous ces ordres en sommes de triangulaires et celles-ci toujours en sommes d'elles-mêmes. Dans ce dernier cas, on a

$$(12)\qquad \frac{1}{f_n^2} = \frac{1}{f^2_{n(n+1)}} + \frac{1}{f^2_{n(n+1)+1}} + \frac{1}{f^2_{n(n+1)+2}} + \dots$$

Si, dans la formule (11), on posait $n = 1$, on obtiendrait

$$(13)\qquad \sum \frac{1}{f_r^1} = \frac{1}{0},$$

c'est-à-dire l'expression symbolique de cette importante remarque de Bernoulli, que *la série harmonique continuée à l'infini est divergente.*

Et comme on a pour toutes les valeurs de r :

$$\frac{r}{f_r^1} = 1,$$

on peut énoncer ce théorème

THÉORÈME VIII. — *Une série à termes positifs est divergente si le produit d'un terme par son indice ne décroît pas lorsque l'indice augmente.*

Mais on a

$$\frac{r^n}{f_{r^n}^1} = \dots = \frac{r^3}{f_{r^3}^1} = \frac{r^2}{f_{r^2}^1} = \frac{r}{f_r^1} = 1,$$

et de même que

$$\frac{1}{f_r^n} < 1,$$

de même

$$\frac{r^p}{f^n_{r^p}} < \ldots < \frac{r^3}{f^n_{r^3}} < \frac{r^2}{f^n_{r^2}} < \frac{r}{f^n_r} < 1;$$

donc :

THÉORÈME IX (¹). — *On ne modifie pas la divergence ou la convergence d'une série si l'on remplace cette série par une autre série formée en multipliant chaque terme de la première par son indice, et en prenant, dans cette nouvelle série, les termes affectés des puissances successives du premier indice.*

Remarque. — On pourrait placer ici toutes les règles de convergence qui empruntent leurs caractères et leurs preuves à la considération des différences; mais cette revue n'offrirait aucun intérêt, le triangle harmonique ne pouvant apporter aux démonstrations de ces règles, généralement simples, aucune simplification.

8. Si, dans l'équation (11), on donne successivement à n toutes les valeurs, on voit, en appliquant le théorème VI, que :

La somme de la série des inverses des nombres triangulaires est égale à 2;

La somme de la série des inverses des nombres pyramidaux est égale à $\frac{3}{2}$;

La somme de la série des inverses des nombres figurés du cinquième ordre est égale à $\frac{4}{3}$;

La somme de la série des inverses des nombres figurés du sixième ordre est égale à $\frac{5}{4}$;

c'est-à-dire qu'en général on a, en appliquant le corollaire du théorème I,

$$(14) \qquad \sum \frac{1}{f^a} = \frac{\frac{1}{f^1_{n-1}}}{\frac{1}{f^1_n}}.$$

(¹) Ce théorème, ordinairement attribué à Cauchy, a été énoncé pour la première fois dans sa généralité par Le Besgue (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. IV, p. 66).

THÉORÈME X. — *La somme des fractions figurées d'ordre $n+1$ est égale au quotient de deux fractions consécutives d'ordre 2, de rang $n-1$ et n.*

De ce théorème découle directement cette proposition :

Corollaire. — La somme du triangle harmonique est un triangle infini dans lequel chaque ligne exprime la somme de la colonne correspondante dans le premier, ou encore une colonne numérique infinie dans laquelle chaque terme exprime le quotient de deux termes consécutifs de la première colonne du triangle harmonique, c'est-à-dire qu'on a

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{n}+\dfrac{1.2}{n(n+1)}+\dfrac{1.2.3}{n(n+1)(n+2)}+\ldots \\ \qquad \dfrac{1.2.3.\,.k}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}+\ldots=\infty. \end{array}\right.$$

Au contraire, l'expression

$$1-\frac{1}{n}+\frac{1.2}{n(n-1)}-\frac{1.2.3}{n(n-1)(n-2)}+\ldots+\frac{1.2.3.4\ldots n}{n(n-1)(n-2)\ldots 2.1},$$

dans laquelle les termes sont respectivement les inverses des termes de la suivante

$$(1-1)^n=0=1-\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\ldots,$$

est finie dans le cas où n est pair, nulle dans le cas où n est impair.

Remarque. — La suite terminée

$$\frac{1}{n}+\frac{1.2}{n(n+1)}+\frac{1.2.3}{n(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{1.2.3\ldots k}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}$$

est le rappport de deux progressions de produits de termes consécutifs, et il est facile d'en exprimer la somme.

Soient

$$\begin{array}{ccccccccc} a_0 & a & b & c & d & \ldots & h & k & l \quad l_0, \\ \alpha_0 & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \ldots & \zeta & \varkappa & \lambda \quad \lambda_0, \end{array}$$

deux progressions dans lesquelles a_0 et α_0 désignent les termes

avant a et α, l_0 et λ_0 les termes après l et λ; on a

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\alpha_0} - 1 &= \frac{a-\alpha_0}{\alpha_0}\,1,\\
\frac{ab}{\alpha_0\alpha} - \frac{a}{\alpha_0} &= \frac{b-\alpha}{\alpha_0}\,\frac{a}{\alpha},\\
\frac{abc}{\alpha_0\alpha\beta} - \frac{ab}{\alpha_0\alpha} &= \frac{c-\beta}{\alpha_0}\,\frac{ab}{\alpha\beta},\\
\frac{abcd}{\alpha_0\alpha\beta\gamma} - \frac{abc}{\alpha_0\alpha\beta} &= \frac{d-\gamma}{\alpha_0}\,\frac{abc}{\alpha\beta\gamma},\\
\frac{abcd\ldots ll_0}{\alpha_0\alpha\beta\gamma\ldots\varkappa\lambda} - \frac{abc\ldots l}{\alpha_0\alpha\beta\ldots\varkappa} &= \frac{l_0-\lambda}{\alpha_0}\,\frac{abc\ldots hkl}{\alpha\beta\gamma\ldots\zeta\varkappa\lambda};
\end{aligned}$$

donc, en ajoutant et retranchant,

$$(16)\quad \frac{a}{\alpha} + \frac{ab}{\alpha\beta} + \frac{abc}{\alpha\beta\gamma} + \ldots + \frac{abc\ldots l}{\alpha\beta\gamma\ldots\lambda} = \frac{\alpha_0}{a-\alpha_0}\left(\frac{abc\ldots ll_0}{\alpha_0\alpha\beta\ldots\varkappa\lambda} - 1\right) - 1.$$

ce qui est la somme de la suite $\frac{1}{n} + \frac{1.2}{n(n+1)} + \ldots$ généralisée.

TRANSFORMATION DU TRIANGLE HARMONIQUE EN TRIANGLE ARITHMÉTIQUE.

9. L'expression

$$(17)\qquad \frac{\dfrac{1}{f_r^n}\cdot\dfrac{1}{f_{r+1}^n}\cdot\dfrac{1}{f_{r+2}^n}\cdots}{\dfrac{1}{f_{r+1}^n}\cdot\dfrac{1}{f_{r+2}^n}\cdot\dfrac{1}{f_{r+3}^n}\cdots} = \frac{f_{r+1}^n}{f_r^n}\cdot\frac{f_{r+2}^n}{f_{r+1}^n}\cdot\frac{f_{r+3}^n}{f_{r+2}^n}\cdots$$

est un nombre indéterminé. Si, dans le second membre de cette égalité, on prend d'abord le premier facteur, puis le premier et le deuxième facteur, en général deux facteurs consécutifs, on obtient les termes successifs de l'ordre correspondant dans le triangle arithmétique. Mais on remarque que le rang de chaque nombre, dans la colonne du triangle arithmétique obtenu, est d'une unité inférieur au rang véritable de ce nombre dans la série figurée. Les termes d'ordre n et de rang r du triangle harmonique, tel qu'il est construit, correspondent aux termes d'ordre n et de rang $r-1$ du triangle arithmétique obtenu; autrement dit, les termes de rang r

et d'ordre $n-1$ de notre triangle harmonique correspondent aux termes de rang r et d'ordre n du triangle arithmétique ordinaire. Il y a donc dans le triangle harmonique une colonne de moins que dans le triangle arithmétique complet, ce qui était déjà impliqué par le théorème VI. Celle qui manque au triangle arithmétique obtenu est la première, renfermant les nombres figurés du premier ordre, c'est-à-dire les unités dont les nombres naturels sont les sommes. Celle qui manque à notre triangle harmonique est la première qui renferme les fractions figurées de premier ordre dont les termes de la série harmonique sont les différences. Or chacune de ces fractions du premier ordre est évidemment une quantité indéterminée et pouvant croître au delà de toute limite, c'est-à-dire infinie. Les fractions figurées du premier ordre sont donc infinies, ce que la formule (13) exprimait déjà symboliquement.

De la divergence de la série harmonique se déduisent facilement les propositions suivantes :

La somme des termes impairs de la série harmonique est infinie.

La somme des termes pairs de la série harmonique est infinie.

La somme $\sum \frac{1}{ax+r}$, *dans laquelle* x *égale successivement* $1, 2, 3, \ldots \infty$, *est infinie.*

10. Désignons par F_r^{n+1} un entier figuré de rang r et d'ordre $n+1$, et par f_r^{n+1} le dénominateur de la fraction figurée de rang et d'ordre correspondants; on a évidemment

$$(18)\qquad F_r^{n+1} = \frac{f_r^{n+1}}{f_{r-1}^{n+1}} \frac{f_{r-1}^{n+1}}{f_{r-2}^{n+1}} \cdots \frac{f_2^{n+1}}{f_1^{n+1}}.$$

Mais

$$f_r^{n+1} = nF_r^{n+1} = n(F_1^n + F_2^n + F_3^n + \ldots + F_r^n);$$

donc l'équation (1) devient, après réduction et interversion des facteurs dans le second membre,

$$(19)\qquad \left\{ \begin{aligned} & F_1^n + F_2^n + F_3^n + \ldots + F_r^n \\ & \quad = \frac{F_1^n + F_2^n}{F_1^n} \frac{F_1^n + F_2^n + F_3^n}{F_1^n + F_2^n} \frac{F_1^n + F_2^n + F_3^n + F_4^n}{F_1^n + F_2^n + F_3^n} \frac{F_1 + F_2^n + F_3^n + \ldots + F_r^n}{F_1^n + F_2^n + \ldots + F_{r-1}^n} \end{aligned} \right.$$

Cette expression est le type de transformation de toute progression arithmétique en produit, et en général de toute série en produit d'un nombre infini de facteurs, et réciproquement.

TRIANGLE HARMONIQUE GÉNÉRALISÉ.

11. Au lieu de supposer la raison égale à 1, nous pouvons la supposer quelconque. Nous avons alors la construction (d) du triangle harmonique

$\frac{1}{a}$								
$\frac{1}{b}$	$\frac{r}{ab}$							
$\frac{1}{c}$	$\frac{r}{bc}$	$\frac{2r}{abc}$						
$\frac{1}{d}$	$\frac{r}{cd}$	$\frac{2r}{bcd}$	$\frac{6r}{abcd}$					
$\frac{1}{e}$	$\frac{r}{de}$	$\frac{2r}{cde}$	$\frac{6r}{bcde}$	$\frac{24r}{abcde}$				
$\frac{1}{f}$	$\frac{r}{ef}$	$\frac{2r}{def}$	$\frac{6r}{cdef}$	$\frac{24r}{bcdef}$	$\frac{120r}{abcdef}$			
$\frac{1}{g}$	$\frac{r}{fg}$	$\frac{2r}{efg}$	$\frac{6r}{defg}$	$\frac{24r}{cdefg}$	$\frac{120r}{bcdefg}$	$\frac{720r}{abcdefg}$		
$\frac{1}{h}$	$\frac{r}{gh}$	$\frac{2r}{fgh}$	$\frac{6r}{efgh}$	$\frac{24r}{defgh}$	$\frac{120r}{cdefgh}$	$\frac{720r}{bcdefgh}$	$\frac{5040r}{abcdefgh}$	
$\frac{1}{k}$	$\frac{r}{hk}$	$\frac{2r}{ghk}$	$\frac{6r}{fghk}$	$\frac{24r}{efghk}$	$\frac{120r}{defghk}$	$\frac{720r}{cdefghk}$	$\frac{5040r}{bcdefghk}$	$\frac{40320r}{abcdefghk}$

Nous obtenons ces nouvelles formules

$$\left\{\begin{array}{l} \sum \frac{1}{ab} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{k}\right), \\ \sum \frac{1}{abc} = \frac{1}{2r}\left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{hk}\right), \\ \sum \frac{1}{abcd} = \frac{1}{3r}\left(\frac{1}{abc} - \frac{1}{ghk}\right). \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

et celles-ci

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\ldots, \\ \dfrac{1}{2ab}=\dfrac{1}{abc}+\dfrac{1}{bcd}+\ldots, \\ \dfrac{1}{3abc}=\dfrac{1}{abcd}+\dfrac{1}{bcde}+\ldots, \\ \dfrac{1}{4abcd}=\dfrac{1}{abcde}+\dfrac{1}{bcdef}+\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

qui ne sont autre chose que la généralisation des séries suivantes, auxquelles Stirling ramenait toutes les autres, celles dans lesquelles n et r croissent suivant une loi quelconque :

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{z(z+1)}+\dfrac{1}{(z+1)(z+2)}+\ldots, \\ \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{z(z+1)}=\dfrac{1}{z(z+1)(z+2)}+\dfrac{1}{z(z+1)(z+2)(z+3)}+\ldots, \\ \dfrac{1}{3}\,\dfrac{1}{z(z+1)(z+2)}=\dfrac{1}{z(z+1)(z+2)(z+3)} \\ \qquad\qquad +\dfrac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)}+\ldots, \\ \dfrac{1}{4}\,\dfrac{1}{z(z+1)(z+2)(z+3)}=\dfrac{1}{z(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)} \\ \qquad\qquad +\dfrac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)(z+5)}+\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

desquelles il déduit

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{z^2+nz}=\dfrac{1}{z(z+1)}+\dfrac{1-n}{z(z+1)(z+2)}+\dfrac{(2-n)(1-n)}{z(z+1)(z+2)(z+3)} \\ \qquad +\dfrac{(3-n)(2-n)(1-n)}{z(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)}+\ldots \end{cases}$$

et

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{z^2}=\dfrac{1}{z(z+1)}+\dfrac{1}{z(z+1)(z+2)}+\dfrac{1.2}{z(z+1)(z+2)(z+3)}+\ldots, \\ \dfrac{1}{z^3}=\dfrac{1}{z(z+1)(z+2)}+\dfrac{3}{z(z+1)(z+2)(z+3)} \\ \qquad +\dfrac{11}{z(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)}+\ldots, \\ \dfrac{1}{z^4}=\dfrac{1}{z(z+1)(z+2)(z+3)}+\dfrac{6}{z(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)} \\ \qquad +\dfrac{35}{z(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)(z+5)}+\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Nous renverrons, pour ces transformations, à la première partie du Traité : *Methodus differentialis sive Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum*, Londini, MDCCLXIV.

Aux généralisations précédentes se rattachent les élégantes considérations qui conduisent directement aux propriétés de la fonction Γ; mais ces considérations sont trop connues pour être transcrites ici ([1]), et les pages précédentes, qu'il serait possible d'étendre presque indéfiniment, sont un témoignage suffisant de l'importance du triangle harmonique.

SUR UN THÉORÈME DE M. MITTAG-LEFFLER ET SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS UNIFORMES;

PAR M. WEIERSTRASS.

1. Dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Stockholm ([2]) pour l'année 1877, M. Mittag-Leffler a donné quelques théorèmes très remarquables qui font suite aux recherches que j'ai publiées dans les *Mémoires de l'Académie de*

([1]) *Voir* J.-A. Serret, *Traité de Calcul intégral*, p. 186.

([2]) *Öfversigt af kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar*, 1877 (voir *Bulletin*, III_2, 269).

Berlin, pour l'année 1876, sur les fonctions analytiques uniformes d'une variable. Parmi ces théorèmes, le plus important est le suivant, sur lequel je vais insister, parce qu'il m'a servi à compléter sur plusieurs points essentiels les résultats de mon travail.

Soient données :

1° *Une suite indéfinie de grandeurs déterminées*

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ \ldots,$$

toutes inégales et satisfaisant à la condition

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = \infty;$$

2° *Une suite indéfinie de fonctions rationnelles d'une variable x,*

$$f_1(x), \ f_2(x), \ f_3(x), \ \ldots,$$

telles que $f_\nu(x)$ soit infinie au point a_ν et seulement en ce point, et s'annulant en outre pour $x = \infty$.

On peut toujours construire une fonction analytique uniforme $\mathrm{F}(x)$ *dont le point ∞ soit un point singulier essentiel, qui soit infinie aux points $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$, et seulement en ces points, telle enfin que la différence*

$$\mathrm{F}(x) - f_\nu(x)$$

ait au point $x = a_\nu$ une valeur finie, la fonction $\mathrm{F}(x)$ *pouvant se mettre, dans un domaine déterminé autour de ce point, sous la forme*

$$f_\nu(x) + \mathfrak{P}(x - a_\nu) \quad (^1).$$

M. Mittag-Leffler prouve ce théorème en montrant que, des fonctions données

$$f_1(x), \ f_2(x), \ f_3(x), \ \ldots,$$

on peut déduire une suite d'autres fonctions rationnelles

$$\mathrm{F}_1(x), \ \mathrm{F}_2(x), \ \mathrm{F}_3(x), \ \ldots,$$

---

(1) Le symbole $\mathfrak{P}(x)$ désigne, comme dans le Mémoire classique de M. Weierstrass, une série procédant suivant les puissances entières et positives de x.

telles que les différences

$$F_1(x)-f_1(x),\ F_2(x)-f_2(x),\ F_3(x)-f_3(x),\ \ldots$$

soient des fonctions entières de x ou des constantes, telles enfin que la série indéfinie

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$$

converge uniformément, à l'exception des points $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ d'où il suit que cette série représente une fonction $F(x)$ ayant les propriétés demandées.

On peut former les fonctions $F_\nu(x)$ d'une façon plus simple que n'a fait M. Mittag-Leffler, et par suite simplifier notablement la démonstration de son théorème.

Imaginons une suite indéfinie de quantités positives

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \ldots$$

dont la somme ait une valeur finie, et désignons par ε une certaine quantité arbitraire et soumise à la seule condition d'être positive et inférieure à 1.

Si maintenant, pour une valeur déterminée de ν, on a $a_\nu = 0$, on prendra

$$F_\nu(x) = f_\nu(x);$$

mais, si a_ν est différent de zéro, on développera $f_\nu(x)$ en une série procédant suivant les puissances de x,

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} x^\mu,$$

qui converge pour toutes les valeurs de x qui satisfont à la condition

$$\left|\frac{x}{a_\nu}\right| < 1 \quad [1];$$

on peut maintenant déterminer un nombre entier m_ν tel que, pour

[1] Le symbole $|a|$ désigne le module de la quantité a.

les valeurs de x qui satisfont à la condition

$$\left|\frac{x}{a_\nu}\right| \leqq \varepsilon,$$

le module de

$$\sum_{\mu=m_\nu}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} x^\mu$$

soit plus petit que ε_ν (¹).

Ce nombre m_ν étant déterminé, on prendra

$$F_\nu(x) = f_\nu(x) - \sum_{\mu=0}^{m_\nu - 1} A_\mu^{(\nu)} x^\mu.$$

On doit remarquer qu'il faut prendre $F_\nu(x) = f_\nu(x)$ quand $m_\nu = 0$ et que l'on a

$$F_\nu(x) = x^{m_\nu} \varphi_\nu(x),$$

$\varphi_\nu(x)$ étant une fonction rationnelle qui, de même que $f_\nu(x)$, devient infinie seulement pour $x = a_\nu$, et qui s'annule pour $x = \infty$.

Soient maintenant x_0 une valeur quelconque, mais finie et déterminée de x, qui n'appartienne pas à la suite

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,$$

(¹) Après avoir pris une quantité positive ε_0 inférieure à 1, mais supérieure à ε, on déterminera une quantité g telle que pour toute valeur de x dont le module est égal à $\varepsilon_0 |a_\nu|$ on ait

$$|f_\nu(x)| \leqq g;$$

on a alors

$$|A_\mu^{(\nu)}| \leqq g\, |\varepsilon_0 a_\nu|^{-\mu},$$

et par conséquent, si $\left|\dfrac{x}{a_\nu}\right| < \varepsilon$,

$$|F_\nu(x)| = \left|\sum_{\mu=m}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} x^\mu\right| \leqq g \sum_{\mu=m}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^\mu \quad \text{ou} \quad \frac{g}{1-\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m,$$

d'où l'on voit que l'on peut prendre pour m_ν la plus petite valeur de m qui rende $\dfrac{g}{1-\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \left(\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m$ inférieur à ε_ν.

et ρ une quantité positive assez petite pour que, parmi les valeurs de x qui satisfont à la condition

$$|x - x_0| \leqq \rho,$$

il ne se trouve aucune des quantités a_1, a_2, a_3, ...; on peut, en désignant par δ une quantité donnée, aussi petite qu'on le veut, trouver un nombre entier r tel que pour toutes ces valeurs de x, et pourvu que ν soit égal ou supérieur à r, on ait

$$\left|\frac{x}{a_\nu}\right| \leqq \varepsilon,$$

$$|F_\nu(x)| < \varepsilon_\nu,$$

et, par conséquent,

$$\left|\sum_{\nu=r}^{\infty} F_\nu(x)\right| < \delta.$$

La série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$$

converge donc et converge uniformément, pour toutes les valeurs de x qui satisfont à la condition

$$|x - x_0| \leqq \rho;$$

elle peut donc, d'après un théorème connu, être mise sous la forme d'une série ordinaire procédant suivant les puissances entières et positives de $x - x_0$.

Si maintenant a_λ est l'une quelconque des quantités a_1, a_2, a_3, ..., et si l'on prend ρ assez petit pour qu'aucune de ces quantités, sauf a_λ, ne se trouve parmi les valeurs de x pour lesquelles on a

$$|x - a_\lambda| \leqq \rho,$$

il résulte de ce qui précède que pour ces valeurs de x la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x) - F_\lambda(x)$$

converge uniformément et qu'elle peut être mise sous la forme

$$\mathfrak{P}(x - a_\lambda),$$

en sorte que l'on a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x) = F_\lambda(x) + \mathfrak{P}(x-a_\lambda) = f_\lambda(x) + \mathfrak{P}_1(x-a_\lambda).$$

En résumé, la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$$

définit une fonction $F(x)$ qui jouit des propriétés énoncées dans le théorème de M. Mittag-Leffler.

Il convient de faire encore la remarque suivante : si $G(x)$ désigne une fonction entière quelconque de x, rationnelle ou transcendante, et si l'on pose

$$\overline{F(x)} = F(x) + G(x),$$

$\overline{F(x)}$ jouit, comme $F(x)$, des propriétés qui viennent d'être établies; inversement, si $\overline{F(x)}$ et $F(x)$ sont deux telles fonctions, leur différence est une fonction entière de x.

2. Soit maintenant $F(x)$ une fonction analytique uniforme de x, n'ayant pas d'autre point singulier essentiel que le point ∞ et devenant infinie pour un nombre quelconque de valeurs de la variable

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots.$$

Si ces valeurs sont en nombre infini, on les supposera ordonnées de façon que

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = \infty.$$

Si a_ν est un infini multiple de la fonction $F(x)$, d'ordre l_ν, on pourra, dans un domaine déterminé autour du point a_ν, mettre

$$(x-a_\nu)^{l_\nu} F(x)$$

sous la forme

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} C_\mu^{(\nu)} (x-a_\nu)^\mu,$$

et, si l'on pose

$$f_\nu(x) = \sum_{\mu=0}^{l_\nu - 1} C_\mu^{(\nu)}(x - a_\nu)^{-l_\nu+\mu},$$

on aura

$$F(x) = f_\nu(x) + \mathfrak{P}(x - a_\nu),$$

$f_\nu(x)$ étant une fonction rationnelle de x, qui devient infinie seulement pour $x = a_\nu$ et qui s'annule pour $x = \infty$.

Si maintenant des fonctions

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots$$

on déduit les fonctions

$$F_1(x),\ F_2(x),\ F_3(x),\ \ldots,$$

comme il a été expliqué dans le paragraphe précédent, en prenant toutefois

$$F_\nu(x) = f_\nu(x),$$

si le nombre des infinis de $F(x)$ est fini, la différence

$$F(x) - \sum_\nu F_\nu(x)$$

ne sera infinie pour aucune valeur finie de x, et l'on aura

$$F(x) = \sum_\nu F_\nu(x) + G(x),$$

où $G(x)$ est une fonction entière de x.

Si l'on met $G(x)$ sous la forme $\sum_\nu g_\nu(x)$, en désignant par $g_1(x)$, $g_2(x)$, ... des fonctions rationnelles entières de x, et si l'on pose

$$\mathfrak{F}_\nu(x) = F_\nu(x) + g_\nu(x),$$

on aura

$$F(x) = \sum_\nu \mathfrak{F}_\nu(x);$$

par conséquent, *toute fonction analytique uniforme qui n'a pas*

de points singuliers essentiels à distance finie peut être mise sous la forme d'une somme de fonctions rationnelles de la variable x, dont chacune n'a qu'un seul infini situé à distance finie.

Cette proposition n'était connue jusqu'à présent que pour les fonctions rationnelles et pour quelques fonctions transcendantes.

3. Des deux théorèmes démontrés dans les paragraphes précédents on déduit aisément les propositions suivantes :

A. *Soient données :*

1° *Une quantité déterminée c et une suite indéfinie de quantités*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

différentes de c, toutes différentes entre elles et satisfaisant à la condition

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = c;$$

2° *Une suite indéfinie de fonctions rationnelles*

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$$

telles que $f_\nu(x)$ n'ait pas d'autre infini que $x = a_\nu$ et s'annule pour $x = c$.

On peut toujours former une fonction analytique uniforme $\mathrm{F}(x)$, *avec le seul point singulier essentiel c, ne devenant infinie qu'aux points $a_1, a_2, a_3, \ldots$, et cela de telle sorte que*

$$\mathrm{F}(x) - f_\nu(x)$$

ait une valeur finie au point $x = a_\nu$.

Cette fonction $\mathrm{F}(x)$ *peut être mise sous la forme*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{F}_\nu(x),$$

où $\mathrm{F}_\nu(x)$ *est une fonction rationnelle qui peut être mise sous la forme*

$$f_\nu(x) + \mathrm{G}_\nu\left(\frac{1}{x-c}\right).$$

B. *Toute fonction analytique uniforme* $\mathrm{F}(x)$ *avec le seul*

point singulier essentiel c peut être mise sous la forme d'une somme de fonctions rationnelles de la variable x, telles que chacune de ces fonctions n'ait qu'un seul infini différent du point c.

Ces théorèmes se déduisent de ceux qui sont démontrés nos 1 et 2, si l'on pose

$$\frac{1}{x-c} = x'.$$

et que l'on regarde $F(x)$ comme une fonction de x'.

Le théorème B fait suite aux théorèmes développés dans les nos 2 et 3 de mon Mémoire.

4. Dans ce même Mémoire, j'ai donné (n° 7) deux expressions générales pour une fonction analytique uniforme d'une variable x ayant n points singuliers essentiels $c_1, \ldots, c_n$, à savoir :

$$(1) \qquad \frac{\sum_{\lambda=1}^{n} G_\lambda\left(\frac{1}{x-c_\lambda}\right)}{\sum_{\lambda=1}^{n} G_{n+\lambda}\left(\frac{1}{x-c_\lambda}\right)},$$

$$(2) \qquad \frac{\prod_{\lambda=1}^{n} G_\lambda\left(\frac{1}{x-c_\lambda}\right)}{\prod_{\lambda=1}^{n} G_{n+\lambda}\left(\frac{1}{x-c_\lambda}\right)} R^*(x),$$

où $R^*(x)$ est une fonction rationnelle de x ne pouvant devenir nulle ou infinie qu'aux points $c_1, \ldots, c_n$.

Si maintenant on désigne par $F(x; c)$ une fonction analytique uniforme de x avec le seul point singulier essentiel c, l'expression (2) peut se mettre sous la forme

$$(2_1 a) \prod_{\lambda=1}^{n} F_\lambda(x; c_\lambda).$$

L'expression

$$(3) \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} F_\lambda(x; c_\lambda)$$

représente aussi une fonction uniforme avec n points singuliers essentiels $c_1, \ldots, c_n$; mais les moyens employés dans le Mémoire cité ne suffisent pas pour démontrer que chaque fonction semblable peut être représentée sous la forme (3), proposition que je veux démontrer maintenant à l'aide du théorème A (3).

Soit $F(x)$ une fonction quelconque de x, de la nature définie plus haut; on partagera le *champ* de la variable x en n parties telles que chacune d'elles contienne dans son intérieur un de ces points $c_1, \ldots, c_n$, et que sur le contour commun à deux parties $F(x)$ ait toujours une valeur finie. Désignons par C_λ la région où se trouve c_λ.

Supposons maintenant que, pour une valeur déterminée de λ, C_λ contienne un nombre infini de points singuliers non essentiels de la fonction considérée, à savoir

$$a_1^{(\lambda)}, \quad a_2^{(\lambda)}, \quad a_3^{(\lambda)}, \quad \ldots,$$

et que ces points soient rangés de façon que

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu^{(\lambda)} = c_\lambda,$$

On déterminera une suite de fonctions rationnelles

$$f_1^{(\lambda)}(x), \quad f_2^{(\lambda)}(x), \quad f_3^{(\lambda)}(x), \quad \ldots$$

telles que $f_\nu^{(\lambda)}(x)$ ne devienne infinie qu'au point $x = a_\nu^{(\lambda)}$, et telles que, la différence

$$F(x) - f_\nu^{(\lambda)}(x)$$

ayant en ce point une valeur finie $f_\nu^{(\lambda)}$, s'annule pour $x = c_\lambda$. D'après le théorème A (3), on peut construire une fonction uniforme $F^{(\lambda)}(x)$ admettant le seul point singulier essentiel c_λ, devenant infinie seulement aux points $a_1^{(\lambda)}$ $a_2^{(\lambda)}$, $a_3^{(\lambda)}$, $\ldots$, telle enfin que la différence

$$F^{(\lambda)}(x) - f_\nu^{(\lambda)}(x)$$

ait au point $x = a_\nu^{(\lambda)}$ une valeur finie. Il suit de là que la fonction

$$F(x) - F^{(\lambda)}(x)$$

n'a, à l'intérieur et sur le contour de C_λ, aucun autre point singulier essentiel que c_λ.

Si maintenant C_λ ne contient qu'un nombre fini de points singuliers non essentiels de la fonction $F(x)$, à savoir

$$a_1^{(\lambda)},\quad a_2^{(\lambda)},\quad \ldots,$$

on posera

$$F^{(\lambda)}(x) = f_1^{(\lambda)}(x) + f_2^{(\lambda)}(x) + \ldots,$$

les fonctions $f_1^{(\lambda)}(x), f_2^{(\lambda)}(x), \ldots$ ayant la même signification que plus haut; $F^{(\lambda)}(x)$ ne deviendra infinie qu'aux points $a_1^{(\lambda)}, a_2^{(\lambda)}, \ldots,$ et la fonction

$$F(x) - F^{(\lambda)}(x)$$

ne possède encore, à l'intérieur et sur le contour de C_λ, aucun autre point singulier essentiel que c_λ.

Dans le cas, enfin, où C_λ ne contiendrait aucun point singulier non essentiel de la fonction $F(x)$, on posera

$$F^{(\lambda)}(x) = 0.$$

Les fonctions $F^{(1)}(x), \ldots, F^{(n)}(x)$ étant ainsi déterminées, l'expression

$$F(x) - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} F^{(\lambda)}(x)$$

est une fonction uniforme de x, qui n'a pas d'autres points singuliers (essentiels ou non) que les points $c_1, \ldots, c_n$, et peut ainsi être mise (n° 5 du Mémoire cité) sous la forme

$$\sum_{\lambda=1}^{n} G_\lambda\left(\frac{1}{x - c_\lambda}\right),$$

où $G_\lambda\left(\frac{1}{x - c_\lambda}\right)$ est une fonction entière de $\frac{1}{x - c_\lambda}$.

Si l'on pose maintenant

$$F_\lambda(x; c_\lambda) = F^{(\lambda)}(x) + G_\lambda\left(\frac{1}{x - c_\lambda}\right),$$

on aura

$$F(x) = \sum_{\lambda=1}^{n} F_\lambda(x; c_\lambda).$$

Puisque les fonctions $F^{(\lambda)}(x)$, $G_\lambda\left(\frac{1}{x - c_\lambda}\right)$, dans tout le champ de la variable x, ne possèdent pas de point singulier essentiel autre que le point c_λ, il en est de même de la fonction $F_\lambda(x; c_\lambda)$; d'ailleurs, de la supposition que $F(x)$ a n points singuliers essentiels il résulte nécessairement que c_λ en est un.

Il faut remarquer que deux des fonctions $F_1(x; c_1)$, $F_2(x; c_2)$, ... n'ont pas d'infinis communs.

La proposition qui vient d'être établie au moyen du théorème communiqué par M. Mittag-Leffler n'est démontrée dans mon Mémoire que pour le cas où la fonction $F(x)$ n'a pas, ou a un nombre fini, de points singuliers non essentiels (*voir* le n° 5).

Si l'on met maintenant chacune des fonctions $F_\lambda(x; c_\lambda)$ sous la forme B (3), on obtient une nouvelle expression générale d'une fonction analytique uniforme ayant un nombre fini de points singuliers essentiels ; cette expression se présente sous la forme d'une série infinie, dont les termes sont tous des fonctions rationnelles de la variable x. Cette série converge uniformément pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à une région qui ne contient, ni à son intérieur ni sur ses limites, aucun des points singuliers de la fonction $F(x)$.

QUELQUES FRAGMENTS D'APOLLONIUS DE PERGE;

PAR M. PAUL TANNERY.

I. Dans son commentaire sur le premier Livre des *Éléments* d'Euclide [1], Proclus fait dix citations différentes d'Apollonius de Perge.

Les deux suivantes ne présentent qu'un intérêt secondaire :

P. 71, 19 : « C'est ainsi qu'Archimède dans ses Livres *Sur la sphère et le cylindre,* qu'Apollonius et tous les autres semblent employer comme des principes accordés les théorèmes démontrés dans cet Ouvrage (les *Éléments*). »

---

(1) *Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii,* edit. Friedlein. Leipzig, 1873.

P. 356,8 : « Ainsi Apollonius montre quelle est la caractéristique (τὸ σύμπτωμα) de chaque conique. »

Deux autres indiquent des écrits perdus du grand géomètre alexandrin :

P. 74,28 : « Comme ce qui concerne les *irrationnelles non classées* dont Apollonius a poursuivi l'étude. » Il s'agit de l'Ouvrage que Woepcke a essayé de restituer d'après les indications d'un manuscrit arabe ([1]).

P. 105,5 : « L'hélice, dont toutes les parties sont similaires et peuvent coïncider entre elles, comme le démontre Apollonius dans son écrit *Sur la vis* ([2]). » Et plus bas, p. 105,5 : « Cette hélice est à parties similaires (ὁμοιομερής), comme l'a démontré Apollonius. »

Mais il est six de ces citations qui renferment de véritables fragments d'un travail, également perdu, relatif aux *Éléments,* et sur lequel l'attention n'a point encore été appelée, malgré le caractère spécial de ces fragments, et l'intérêt qu'ils nous paraissent offrir.

Fr. 1 (Proclus, 100, 6-19).

« Disons aussi, avec Apollonius, que nous avons la notion de la ligne lorsque nous disons de mesurer seulement la longueur d'une route ou d'un mur; car alors nous ne pensons pas en plus à la largeur, mais nous ne tenons compte que de la distance dans un seul sens ; tandis que, si nous mesurons une aire, nous considérons la surface ; si un puits, le solide. Dans ce dernier cas, nous réunissons ensemble toutes les distances pour dire que le puits est de tant, en longueur, en largeur et en profondeur. Les sens peuvent d'ailleurs nous donner une perception de ligne lorsque nous regardons les séparations des endroits

([1]) *Mémoires présentés à l'Académie des Sciences,* t. XIV, p. 658-720.

([2]) Περὶ τοῦ κοχλίου. M. Cantor (*Vorlesungen über Geschichte der Matematik,* Leipzig, 1880, p. 296) dit que le contenu de cet écrit est complètement inconnu. D'après Pappus, livre VIII, le κοχλίας est notre vis sans fin (ὁ καλούμενος ἄπειρος κοχλίας), dont il décrit d'ailleurs l'emploi, soit pour engrener une roue dentée, soit pour produire un mouvement rectiligne longitudinal. Pappus invoque d'ailleurs (édit. Hultsch, 1110, 20) Apollonius au sujet de la construction de la vis. Il est donc clair que l'écrit cité par Proclus renfermait au moins la théorie géométrique de l'hélice.

éclairés et de ceux qui sont dans l'ombre, soit sur la Lune, soit sur la Terre. Car il y a là un intermédiaire sans dimension suivant la largeur, mais qui s'étend en longueur entre la lumière et l'ombre. »

Fr. 2 (Proclus, 123, 16-17). — Comp. 124, 18, et 125, 17.

« Apollonius définit l'angle la contraction (συναγωγή) en un seul point d'une surface ou d'un solide sous une ligne ou une surface brisée. »

Fr. 3 (Proclus, 194, 25, et 195, 5).

« Soit en effet A = B et B = C : je dis que A = C. Puisque, en effet, A = B occupe le même lieu que lui, et puisque B = C occupe le même lieu que ce dernier, A occupera le même lieu que C. Ils sont donc égaux. »

Comp. 183, 13 : « Apollonius a vainement essayé de donner des démonstrations des axiomes. » 183, 18 : « Apollonius voulant montrer la vérité de l'axiome que les choses égales à une même sont égales entre elles. » 194, 10 : « Il s'en faut de beaucoup que nous approuvions le géomètre Apollonius pour les prétendues démonstrations qu'il a données des axiomes, *en se posant comme l'antagoniste d'Euclide.* » 194, 21 : « La démonstration qu'Apollonius croit avoir trouvée pour le premier axiome. »

Fr. 4 (Proclus, 279, 16, et 280, 4).

« Apollonius de Perge divise comme suit par moitié une droite limitée donnée. Soit AB la droite limitée qu'il s'agit de diviser par moitié. De A comme centre, avec AB pour rayon, décrivez un cercle; puis de B comme centre, avec BA comme rayon, un autre cercle; joignez les intersections des cercles, CD. Cette droite divise AB par moitié. En effet, menez CA, CB; toutes deux sont égales à AB; CD est commun, et DA = DB pour les mêmes raisons. Donc $\widehat{ACD} = \widehat{BCD}$, en sorte que AB est partagé par moitié d'après le 4. »

Remarque. — La construction d'Apollonius est au fond iden-

tique à celle d'Euclide (I, 10), mais celui-ci la présente comme construction sur AB d'un triangle équilatéral ACB et comme division par moitié de l'angle en C. Apollonius ne refait que la première partie de la démonstration et s'arrête quand on peut la compléter d'après le texte d'Euclide. « Le 4 » est la proposition I, 4, d'Euclide sur l'égalité de deux triangles ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, proposition sur laquelle il faut, en effet, s'appuyer pour démontrer que AB est effectivement partagé par moitié, soit en E. Car, dirons-nous avec Euclide, puisque AC = CB, que CE est commun, les deux côtés AC, CE sont égaux aux deux BC, CE chacun à chacun, et les angles compris ACE = BCE. Donc les bases AE = BE. Donc, etc.

Fr. 5 (Proclus, 282, 8-19).

« Apollonius élève de cette manière la perpendiculaire. Sur AC soit D quelconque, et sur CB ([1]), CE = CD. De D comme centre, avec ED pour rayon, décrivez un cercle; puis de E comme centre, avec DE pour rayon, un autre cercle ; menez FC : je dis qu'elle est à angle droit; car, si l'on mène FD, FE, elles seront égales ; d'ailleurs, DC = CE et FC est commun, de sorte que les angles en C seront égaux d'après le 8. Donc ils sont droits. »

Remarque. — « Le 8 » est la proposition I, 8 d'Euclide (égalité de deux triangles dont les trois côtés sont égaux chacun à chacun). La construction d'Apollonius est encore identique au fond à celle d'Euclide (I, 11), qui la présente comme formation sur DE du triangle équilatéral DEF. Les deux démonstrations sont de même identiques au fond.

Fr. 6 (Proclus, 335, 16, et 336, 5).

« Nous n'approuvons pas la construction d'Apollonius ([2]), car elle a besoin de théorèmes du Livre III. Prenant l'angle quelconque CDE, et la droite AB de D comme centre, avec CD pour rayon,

---

([1]) Prolongement de AC; le point C est celui auquel il faut élever la perpendiculaire à la droite AB. Plus loin, F est l'intersection des deux cercles décrits.

([2]) Construire en A, sur la droite AB, un angle égal à un angle donné CDE.

il décrit l'arc CE, et de même, de A comme centre, avec AB pour rayon, l'arc FB; puis, prenant l'arc FB = arc CE, il mène AF et fait voir que les angles en A et D sont égaux comme interceptant des arcs égaux. Il a dû, au reste, prendre AB = CD pour que les cercles soient égaux. »

Remarque. — La construction d'Euclide (I, 23) est celle d'un triangle égal à un triangle dont il a les trois côtés. Avec la sienne, Apollonius pouvait évidemment composer une démonstration analogue à celle d'Euclide et n'avait certes pas besoin de recourir aux propositions 27 et 28 du Livre III des *Éléments :* « 28. Dans des cercles égaux, des droites égales sous-tendent des arcs égaux, etc. — 27. Dans des cercles égaux, les angles interceptant des arcs égaux sont égaux, qu'ils soient au centre ou à la circonférence. » En présence de l'affirmation de Proclus sur le texte d'Apollonius, il faut admettre que ce dernier avait démontré, dans son préambule aux *Éléments* que nous révèlent les fragments 1, 2, 3, les premières parties de ces propositions III, 27, 28.

II. Les trois derniers fragments semblent indiquer qu'Apollonius avait entrepris, non pas de refondre le corps même des *Éléments,* œuvre déjà classique de son temps, mais d'en donner comme une édition revue et corrigée, où, respectant le numérotage connu, il avait au moins essayé de rétablir en divers points la déduction logique naturelle, trop souvent masquée sous l'ordre artificiel (¹) adopté par Euclide. A cet égard, il ne faisait que devancer les modernes.

Mais pour cette édition il avait composé un préambule relatif aux définitions et aux axiomes. Ce préambule semble avoir été passablement développé et, puisque la définition de l'angle solide (fr. 2) y était comprise, devait embrasser tous les concepts des divers Livres des *Éléments,* en sorte qu'il pouvait d'ailleurs être utilisé comme manuel, en dehors de l'étude de la Géométrie théorique, par exemple pour celle de la Géométrie pratique. Il pourrait donc, dans une certaine mesure, être comparé à l'écrit

(¹) Nous n'employons pas ce mot dans un sens de blâme; si nous constatons un fait indéniable, nous n'en sommes que plus portés à regarder surtout le premier Livre des *Éléments* comme un chef-d'œuvre de composition.

Heronis definitiones, p. 1-40 de l'édition de Héron de Hultsch (Berlin, 1864).

Mais tandis que ce dernier écrit, dont le véritable auteur est d'ailleurs postérieur à Posidonius, n'est qu'une pure compilation des diverses définitions données par les différents auteurs ([1]), et que nous aurons même par suite à y rechercher des fragments d'Apollonius, l'œuvre de ce dernier devait sans doute former un ensemble homogène et bien ordonné. Enfin et surtout, le fragment 1 nous en indique un caractère tout spécial.

L'opinion commune est que nulle part on ne trouve, dans les écrits des géomètres du temps classique, un mot qui ne soit pas complètement indispensable pour leurs démonstrations ([2]). Ici nous voyons, au contraire, l'homme qui a porté le plus haut la Science antique sortir hardiment de l'ornière commune, pour entrer dans une voie où, cette fois, les modernes ne l'ont guère suivi jusqu'à présent; nous le voyons, dans le but de mieux préciser le caractère des concepts fondamentaux, ne pas craindre d'abandonner le domaine de l'abstraction mathématique et de faire appel aux notions concrètes et aux données de l'expérience vulgaire.

La singularité même de ce fragment nous autorise donc à rechercher, soit dans Proclus, soit dans Héron, les passages qui présentent le même caractère et à les restituer à Apollonius. Pour procéder avec quelque suite dans cette recherche, il suffit de remarquer que, dans l'ordre d'idées où s'était placé le réformateur, il devait partir, non pas du point, comme Euclide, mais du solide. Ici c'est à la seconde source qu'il faut recourir. Entre les définitions 1 et 2 du Livre XI des *Éléments*, nous y trouvons intercalé un texte que je n'hésite point à faire remonter à Apollonius, quoique le savant éditeur en suspecte la dernière phrase comme une glose postérieure au recueil du pseudo-Héron.

Fr. 8 (Héron, 11, 10-17).

« Un solide est ce qui possède trois dimensions. On appelle

([1]) On y retrouve, à côté de celles d'Euclide, toutes celles qu'a conservées Proclus et dont la plupart sont anonymes. Celles de Posidonius sont relatives au σχῆμα, aux parallèles et à la division des trapèzes.

([2]) Comp. Hankel, *Zur Geschichte der Mathematik*. Leipzig, 1874, p. 393.

solides soit les corps, soit les lieux. Ainsi le corps mathématique est ce qui a dimension suivant trois sens, tandis que, simplement dit, un corps est ce qui, outre la dimension dans trois sens, est susceptible de résistance. »

De même pour la définition de la surface :

Fr. 9 (Héron, 10, 12).

« La surface est ce qui a dimension suivant deux sens. »

Fr. 10 (Proclus, 114, 20-25).

« Nous avons la notion de la surface lorsque nous mesurons les aires et que nous en déterminons les limites en longueur et en largeur. Nous la percevons en quelque sorte lorsque nous considérons les ombres; car celles-ci, n'ayant point de profondeur, puisqu'elles ne peuvent pénétrer dans l'intérieur de la terre, ne possèdent qu'une largeur et une longueur. »

Fr. 11 (Héron, 10, 16-20).

« Ainsi l'on pense comme surface toute ombre et toute couleur, et de là les Pythagoriens appelaient la surface *couleur* (χροά). On pense aussi comme telle ce suivant quoi se fait le contact de l'air à la terre ou à tout autre corps solide, ou de l'air à l'eau, ou de l'eau au gobelet ou à tout autre récipient. »

Pour celle de la ligne, en dehors du fragment 1 :

Fr. 12 (Héron, 8,5).

« La ligne est ce qui a dimension dans un seul sens (1). »

Fr. 13 (Héron, 8,8-18).

« On peut dire qu'une ligne est, par exemple, ce qui sépare la lumière solaire de l'ombre, ou l'ombre de la partie éclairée, ou

(1) Lire τὸ ἐφ' ἓν διάστατον et non τὸ ἓν δ.

120, 10.) — Héron, 9, 2-3) : « La ligne droite est celle dont toutes les parties peuvent coïncider entre elles de toutes manières. » (Comp. Proclus, 110, 20)]. Ne pouvons-nous pas à bon droit regarder tout ce qui appartient à cet ordre d'idées comme dérivant de l'Ouvrage d'Apollonius ?

Toutefois ce n'était qu'un côté de la question, et il avait dû l'envisager sous d'autres faces, en développant les concepts du plan et de la ligne droite. Les fragments sur la surface et la ligne en général supposent en effet les notions concrètes correspondantes pour les mesures pratiques, ce qui revient au fond aux définitions euclidiennes. Mais Euclide, pour donner une forme mathématique à ces notions, s'est vu obligé d'introduire le concept de l'égalité comme connu sans définition. Apollonius, au contraire, comme il est évident d'après le fragment 3, définissait l'égalité d'après l'occupation du même lieu, c'est-à-dire la coïncidence, ce qui nous ramène bien, d'ailleurs, aux définitions ci-dessus du plan et de la droite.

Il est clair que les propriétés correspondantes devaient dès lors être mises en lumière pour la sphère et le cercle. Pour la première de ces figures, Héron donne trois définitions : celle d'Euclide (XI, 14), par génération suivant révolution d'un demi-cercle, vient en dernier lieu ; la première est la descriptive classique de Théodose de Tripoli ; la deuxième, au contraire, semble bien répondre au procédé apollonien, de combiner les notions vulgaires avec l'exactitude des concepts mathématiques.

Héron, 24, 13-14 : « La sphère est une figure solide exactement ronde, en sorte que les distances à partir du milieu soient partout égales. »

De cette définition et d'une autre analogue pour le cercle, Apollonius, après avoir distingué le concave et le convexe (Héron, 17, 16), pouvait immédiatement déduire l'*homœomérie* de ces figures et quelques autres de leurs propriétés les plus simples, notamment, pour le cercle, la proposition (non démontrée par Euclide, I, déf. 17) que le diamètre partage par moitié le cercle et la circonférence, celles que laisse supposer le fragment 6, et même leurs réciproques, que si une figure jouit de l'une de ces propriétés, cette figure est un cercle ; c'est à cet ordre d'idées que semble se rapporter, dans Héron (15, 26 et 16, 1), la phrase corrompue suivante :

« On peut dire aussi que le cercle est une ligne [1] telle que toutes les parties égales correspondent toujours à des intervalles (cordes) égaux. »

IV. Mais ces développements ne pouvaient être complétés qu'après la définition de l'angle (fr. 2). Nous la retrouvons dans Héron, avec quelque différence.

Héron, 11, 19-20 : « L'angle est une contraction effectuée en un point sous une surface ou ligne brisée. »

14, 8-11 : « Une surface est brisée sur une ligne lorsqu'en la prolongeant elle ne retombe pas sur elle-même ; on la pense prolongée lorsqu'elle ne semble pas arrêtée dans son développement en longueur. On pense de même un plan prolongé. »

11, 20-26 : « On dit qu'une ligne est brisée lorsqu'en la prolongeant elle ne retombe pas sur elle-même.

» Des angles, les uns sont plans, les autres solides ; les plans ou solides sont d'ailleurs rectilignes ou non. »

12, 1, 8, 9 : « L'angle plan est en général une contraction en un point sous une ligne brisée. »

14, 4, 7 : « L'angle solide est en général une contraction de solide sous un point. »

14, 12-16 : « On appelle en particulier *angles solides rectilignes* ceux dont les surfaces formant ces angles sont comprises sous des angles plans rectilignes, comme ceux des pyramides, des solides polyèdres et des cubes ; *non rectilignes* ceux pour lesquels il en est autrement, comme pour l'angle d'un cône. »

La définition conservée par Proclus ne permettrait point de faire ainsi simplement la distinction entre les angles solides et les angles plans ; car, au sens de cette définition, il semble bien que pour deux génératrices d'un cône, outre l'angle plan qu'elles comprennent, on doive considérer aussi des angles de surface conique. L'abandon de ce point de vue est également prouvé par une définition (Héron, 14, 4-5) de l'angle solide comme contraction, non plus de solide (Apollonius), mais de surface.

Néanmoins, dans les textes ci-dessus, on doit faire remonter à

---

[1] On pourrait lire : λέγεται δὲ καὶ ἄλλως κυκλικὴ (au lieu de κύκλος) γραμμὴ ἥτις κ. τ. λ., « que la ligne circulaire est telle que, etc. »

Apollonius probablement les définitions des lignes et surfaces brisées, sûrement le concept de l'angle solide au sommet du cône, qui est étranger à Euclide. Quant à l'angle dièdre, les anciens n'en ont jamais élaboré la notion que sous le terme d'*inclinaison* (κλίσις).

V. Il serait imprudent de pousser plus loin nos conjectures sur les définitions d'Apollonius ; reste à parler de son travail sur les axiomes.

On sait qu'après les définitions du premier Livre d'Euclide se trouve un certain nombre de propositions classées, les unes comme postulats (αἰτήματα), les autres comme notions communes ou axiomes.

Du temps de Geminus (1er siècle avant J.-C.), que Proclus compile, la question de l'authenticité du classement de ces propositions était aussi embrouillée qu'aujourd'hui. En tout cas, ce critique ne reconnaissait comme postulats que les trois relatifs à la construction de la droite et du cercle, dont le caractère particulier semble garantir l'adoption comme tels par Euclide, et leur inscription par lui en tête des propositions.

Il est bien douteux, au contraire, que l'auteur des *Éléments* se soit jamais proposé de réunir en tête de son Livre les divers lemmes qu'il a admis comme accordés dans le cours de ses propositions. S'il avait fait ce travail, il eût certes évité d'en accroître autant le nombre, et surtout de prendre comme axiomes des théorèmes dont la démonstration est facile. La collection n'a donc été faite qu'après lui, et elle le fut dans différents ordres d'idées, comme le montrent les divergences qui existent relativement au nombre et au classement de ces axiomes (¹).

Toutefois, ce travail put être fait dès avant Apollonius, qui trouva ainsi soulevée la question du perfectionnement à apporter sur ce point à l'œuvre classique.

Rien n'indique que le grand géomètre alexandrin ait touché aux trois postulats de construction; il est clair au contraire, d'après le fragment 3, qu'il prend comme définition de l'égalité

(¹) Nous admettrons le numérotage de l'édition de Gregory, uniquement parce qu'il est le plus complet.

l'axiome VIII (les choses qui coïncident sont égales entre elles), et probable dès lors qu'il définit de même le plus grand et le plus petit d'après l'axiome IX (le tout est plus grand que la partie).

Il lui était ainsi facile de démontrer les trois axiomes suivants, seuls reconnus par Proclus comme axiomes avec VIII et IX :

I. Les choses égales à une même sont aussi égales entre elles (fr. 3).

II. Si à des choses égales on ajoute des choses égales, les sommes sont égales.

III. Si de choses égales on retranche des choses égales, les restes sont égaux.

Il démontrait de même les suivants :

IV. Si à des choses inégales on ajoute des choses égales, les sommes sont inégales.

V. Si de choses inégales on retranche des choses égales, les restes sont inégaux.

VI. Les doubles d'une même chose sont égaux entre eux.

VII. Les moitiés d'une même chose sont égales entre elles.

Au contraire, nous n'avons aucune trace de la façon dont il pouvait envisager la théorie des parallèles et le fameux axiome XI, encore considéré par Proclus comme un théorème restant à démontrer ([1]).

Quant aux prétendus axiomes X, l'égalité de tous les angles droits, XII, que deux droites ne peuvent limiter un espace, le premier est certainement un théorème oublié par Euclide ; le

---

([1]) Proclus ne rapporte que le travail de Ptolémée sur cette question, travail qu'il critique et qui, en effet, renferme des paralogismes. Il tente lui-même ou plutôt emprunte à quelque anonyme une démonstration fondée sur le lemme que, si une droite en rencontre une autre, elle rencontrera toutes les parallèles menées dans le plan à cette dernière.

second, lemme admis dans I, 4, pouvait être considéré par comme rentrant dans le premier postulat.

L'égalité des angles droits a probablement été démontrée] Apollonius, sinon avant lui ; mais on peut douter qu'il procé par l'absurde, comme Proclus (188, 22, et 189, 10) ; quant dernier axiome, sa vérité semble découler immédiatement de façon dont nous avons admis qu'Apollonius définissait la droi Proclus (239, 6-16) en donne une démonstration incomplète, il admet que la coïncidence n'a pas lieu au delà des deux poi supposés communs. Mais il est facile de corriger cette démo tration, obtenue en décrivant un cercle ayant son centre à l'un points communs et passant par l'autre, puis en admettant que t diamètre partage le cercle en parties égales. Il nous paraît éga ment assez douteux que cette démonstration remonte à Ap lonius.

En résumé, le célèbre auteur des *Coniques* a essayé d'imprir la marque de son génie sur les questions soulevées par les princi de la Géométrie. Si la forme trop peu classique de son travail a sans doute la raison prédominante du profond oubli dans leq sont tombées ses tentatives, elles n'en sont pas moins à signa comme témoignant, dans l'antiquité, de courants d'idées analog à ceux de temps plus modernes, et d'un effort sérieux pour échap au joug d'une tradition, en réalité bien plus ancienne qu'Eucli et d'autant plus difficile à briser.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BRODIE (B.-C.), F. R. S., professeur de Chimie à l'Université d'Oxford. — Le calcul des opérations chimiques, soit une méthode pour la recherche, par le moyen de symboles, des lois de la distribution du poids dans les transformations chimiques; traduit de l'anglais par le Dr A. Naquet. — 1 vol. in-4°. Paris, Gauthier-Villars, 1879.

C'est venir un peu tard sans doute pour parler d'un Livre qui a été publié depuis plusieurs années déjà, d'autant plus que la traduction dont il s'agit, avant de paraitre en Volume, avait été insérée dans le *Moniteur scientifique* du Dr Quesneville (novembre 1878, mars et avril 1879). Mais le sujet est d'une nature tellement originale, et d'autre part il semble avoir attiré si peu jusqu'à présent l'attention des mathématiciens français, qu'on nous pardonnera, nous l'espérons du moins, ce défaut d'actualité, plus apparent que réel.

C'est du reste le danger des publications de cette nature, de passer quelquefois au milieu de l'inattention générale, malgré l'intérêt très positif qu'elles peuvent présenter. Sur la seule inspection du titre : « C'est de la Chimie ! » s'écrient volontiers les mathématiciens, et ils passent à une occupation plus sérieuse selon eux ; en feuilletant le Volume et le trouvant tout rempli de formules algébriques : « Ce sont des Mathématiques ! » déclarent les chimistes, et ils retournent à leur laboratoire.

Naguère, au siècle dernier même, les sciences étaient loin d'avoir produit les innombrables résultats qu'on peut constater aujourd'hui, et les esprits les plus éminents ne dédaignaient pas d'associer des études très diverses ; ils embrassaient les branches les plus variées parfois du savoir humain, et ils y marquaient leur trace par des découvertes empreintes d'une idée de généralisation extrême.

De nos jours il n'en est plus ainsi. Nous sommes embarrassés sans doute par l'excès même de nos richesses ; personne ne saurait s'assimiler la somme énorme des vérités scientifiques acquises ; pour produire, il faut se spécialiser, s'attacher, non pas même à une science, mais à une section particulière de telle ou telle

science, ce qui conduit volontiers à négliger le reste. C'est là une tendance fâcheuse au point de vue de la coordination philosophique des connaissances humaines et qui finirait par amener dans l'avenir une certaine stérilité. Nous avons la confiance que malgré tout une réaction salutaire ne tardera pas à se produire dans le sens dont nous parlons, d'autant plus qu'elle se manifeste déjà quelque peu dans les autres pays. Mais, pour revenir à notre sujet, il faut reconnaître qu'en France, actuellement, il y a peu de mathématiciens qui s'intéressent à la Chimie et peu de chimistes s'occupant de Mathématiques.

Ici, c'est au point de vue mathématique, à peu près exclusivement, que nous voulons essayer de rendre compte de l'Ouvrage de M. Brodie. Notre complète incompétence au point de vue chimique, que nous confessons en la regrettant fort, nous interdirait aussi bien l'éloge que le blâme. Mais, en laissant de côté toute appréciation sur ce point, il reste un calcul symbolique d'une espèce nouvelle, créé pour apporter une méthode rationnelle de représentation des faits chimiques, à la place des notations en vigueur. Cette Algèbre spéciale mérite certainement qu'on ne la laisse pas passer inaperçue ; il y a là une tentative éminemment intéressante et très philosophique ; mais, en raison même de son objet, le nouveau calcul ne pourra produire des résultats vraiment efficaces et appréciables qu'à partir du jour où les chimistes auront entrepris de se l'assimiler.

Il nous semble donc que le D[r] Naquet a donné un bon exemple et fait œuvre scientifique dans le sens le plus élevé du mot en présentant au public français la traduction du *Calcul des opérations chimiques*.

L'Ouvrage se compose de deux Mémoires distincts.

Dans le premier, qui renferme huit Sections, M. Brodie, se plaçant en dehors de toute hypothèse *a priori*, et ayant seulement pour but la représentation des phénomènes, débute par un certain nombre de définitions sur les *poids* (il désigne par le mot *poids* une portion déterminée de matière pondérable). Il distingue les poids *uniques*, les *groupes* de poids, les poids *composés* et les poids *simples*. Il appelle enfin *distribution de poids* l'opération par laquelle un poids composé se résout en ses composants, ce qui le conduit à la notion des poids *distribués* et *non distribués*.

Il considère ensuite toute opération chimique comme s'accomplissant sur l'unité d'espace et donnant pour résultat un *poids*, et il représente ces opérations par des symboles $x_1, x_2, \ldots$, répondant aux poids $A_1, A_2, \ldots$ qui résultent des opérations correspondantes.

Vient, après cela, la notion d'*identité* entre deux opérations, pour laquelle on emploie le signe $=$, puis l'introduction des signes $+$ et $-$, qui se définissent tout naturellement et sont soumis aux mêmes règles que celles de l'Algèbre ordinaire. Le symbole chimique o représente l'absence de poids.

Un poids composé, si les poids composants sont x, y, se représente par le symbole $\varphi = xy$. C'est ce qu'on pourrait appeler la multiplication chimique, dont on établit les propriétés, pareilles à celles de la multiplication algébrique. L'auteur résume ces notions en disant que les signes xy, (xy), $x+y$, $(x+y)$ représentent ces mêmes opérations se faisant *successivement, conjointement, séparément* ou *collectivement*.

Le symbole 1 s'introduit dans ce calcul, où il a une grande importance, comme la représentation de l'unité d'espace, et on a $x^0 = 1$; quant au signe ∞, il représente la totalité de l'univers pondérable.

Les poids étant les seuls éléments à considérer pour constater l'identité des opérations, on se trouve conduit aux équations chimiques fondamentales $xy = x + y$, $\frac{x}{y} = x - y$, d'où l'on tire en particulier $1 = 0$ et $0 = 1 = 2 = \ldots = n$. Ces conséquences peuvent paraître répugnantes et paradoxales à qui s'attache trop à la signification des symboles ordinaires ; mais elles n'en sont pas moins justifiées et se prêtent à la représentation des faits. L'Algèbre chimique se trouve faire à peu près du signe 1 ce que l'arithmétique fait du zéro. Il reste à bien tracer les règles à suivre dans le nouveau calcul, ce qui est l'objet essentiel de l'Ouvrage.

On appelle *facteur premier* le symbole d'un poids simple, et les symboles de deux poids simples l'un par rapport à l'autre sont dits *premiers entre eux*. De là suivent une série de déductions présentant avec la théorie arithmétique des nombres premiers l'analogie la plus curieuse, et spécialement le symbole d'un poids composé entier $\varphi = a^n b^{n_1} c^{n_2} \ldots$.

Partant de ces propriétés, l'auteur se propose, pour chaque

problème particulier, d'exprimer les symboles chimiques au moyen d'un nombre entier de facteurs premiers, en s'appuyant sur les données fournies par l'expérience, et cela avec le plus petit nombre possible de facteurs premiers. La méthode qu'il indique, dans sa généralité, vaut la peine d'être résumée très sommairement ici.

Si les symboles chimiques $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sont reliés par n équations de la forme

$$m\varphi + m'\varphi_1 + m''\varphi_2 + \ldots = 0,$$

$m, m', m'', \ldots$ étant des symboles numériques, on pose

$$\varphi = a^p b^{p_1} c^{p_2} \ldots, \quad \varphi_1 = a^q b^{q_1} c^{q_2} \ldots, \quad \varphi_2 = a^r b^{r_1} c^{r_2} \ldots, \quad \ldots.$$

Alors $p, q, r, p_1, q_1, r_1, \ldots$ sont reliés par un système d'équations de la forme

$$mp + m'q + m''r + \ldots = 0, \quad mp_1 + m'q_1 + m''r_1 + \ldots = 0, \quad \ldots.$$

La question est alors ramenée à la recherche des solutions en nombres positifs entiers des valeurs $p, q, r, p_1, q_1, r_1, \ldots$ qui satisfont à ces équations indéterminées. Le nombre des formes admissibles est de plus limité par la condition que les facteurs $a, b, c, \ldots$ soient les symboles de poids réels, condition qui s'exprime encore sous forme analytique.

Voilà certes une application de l'Analyse indéterminée aussi ingénieuse que surprenante. M. Brodie s'en sert, dans les Sections suivantes de son étude, pour construire les équations chimiques, d'après les données fournies par l'expérience. Cette partie relevant plus spécialement du domaine chimique, nous sommes obligé de la passer presque sous silence. Nous nous bornerons à signaler la formule que l'Analyse indéterminée conduit à assigner au chlore, en partant de la décomposition de l'acide chlorhydrique. α étant le symbole de l'hydrogène et χ un facteur premier, on trouve : acide chlorhydrique, $\alpha^{1+t}\chi^{1+t_1}$; chlore, $\alpha^{1+2t}\chi^{2(1+t_1)}$, avec les conditions $t \leqq 17$, $t_1 \geqq 0$, et par suite $\alpha\chi^2$ est le symbole le plus simple du chlore. Pour l'iode, le brome et certains autres corps, interviennent des résultats semblables. Il est certain que, le jour où l'on viendrait à reconnaître que le chlore, l'iode et le brome sont des corps composés renfermant de l'hydrogène, il y aurait là un tel triomphe pour les doctrines de M. Brodie, qui n'en ont

dès à présent une grande valeur, en tant que procédés pour la représentation des phénomènes.

Dans une conclusion qui termine le premier Mémoire, l'auteur s'applique à caractériser l'esprit de sa méthode et à montrer combien elle est indépendante de toute théorie hypothétique et de la théorie atomique spécialement.

Le second Mémoire, intitulé *De l'analyse des faits chimiques*, a plus particulièrement pour objet l'application de l'instrument symbolique dont la construction est indiquée dans le premier. Il débute par une Introduction *sur la loi des nombres pairs*, dont l'objet essentiel est de justifier l'hypothèse fondamentale du système, en vertu de laquelle l'unité d'hydrogène est toujours un poids simple non distribué, dont le symbole doit être par conséquent un facteur premier α.

En appliquant les procédés de raisonnement indiqués dans le premier Mémoire, on reconnaît qu'il n'y a réellement à hésiter qu'entre les symboles α et α^2 pour la représentation de l'hydrogène ; mais l'hypothèse α^2 se prêterait à toute une série de composés dont l'existence serait en contradiction avec la loi des nombres pairs de Laurent et Gerhardt, et cela motive l'exclusion de cette hypothèse. On trouve enfin une critique des exceptions (déjà indiquées dans le premier Mémoire) qui sembleraient mettre en défaut le système symbolique proposé ; de là des objections et des difficultés que l'auteur s'attache à réfuter. Nous regrettons de ne pouvoir insister sur cette partie très intéressante et nous pourrions dire très littéraire de l'Ouvrage ; mais les questions qui s'y trouvent traitées relèvent soit de la Chimie, soit de la logique pure, bien plutôt que du domaine mathématique.

Nous allons désormais suivre, Section par Section, les matières exposées dans le corps du second Mémoire, et nous efforcer d'en présenter l'analyse, en y mettant la clarté compatible avec les limites fort restreintes d'un simple compte rendu.

La Section I est intitulée *Sur les équations chimiques*. Le type d'une équation chimique est $\nu = m\varphi + m'\varphi_1 + m''\varphi_2 + \ldots = 0$, d'où résulte, comme on l'a vu plus haut, un certain système d'équations indéterminées. En général, on ne peut multiplier une telle équation par un symbole chimique, et cette impossibilité restrein[illegible] à un très haut degré le calcul symbolique dont nous nous occu-

pons; mais on démontre assez facilement que cette opération est possible lorsque l'on a la condition $m + m' + \ldots = 0$. Une équation $\nu = 0$ qui remplit cette condition est appelée *équation chimique normale*. Un très grand nombre d'équations chimiques satisfont d'elles-mêmes à cette condition; mais on peut rendre normale une équation chimique quelconque en lui ajoutant un symbole numérique convenable, ce qui peut se faire, puisque ce symbole désigne l'absence de poids. Une fois cette transformation effectuée, il devient licite de multiplier ou de diviser les équations par un symbole chimique. Par exemple, l'équation fondamentale $xy = x + y$ n'est pas normale. Elle le devient en l'écrivant $1 + y = x + y$ ou $(x - 1)(y - 1) = 0$, et l'on démontre la formule plus générale $A(x - a)(y - b)(z - c)\ldots = 0$, A étant un symbole chimique. C'est grâce à cette réduction aux formes normales que l'on arrive à la parfaite coïncidence des propriétés du symbole chimique 1 avec le symbole arithmétique représenté par le même signe.

Comme exemple bien simple, l'auteur prend l'équation

$$2\alpha^m \nu^m = 3\alpha + \alpha^n \nu^n.$$

On peut l'écrire

$$(\alpha^m \nu^{m_1})^2 = \alpha^3 \alpha^n \nu^{n_1}$$

et la traiter par l'analyse indéterminée, comme on l'a vu plus haut, ce qui donne

$$(1) \qquad 2m = 3 + n$$

et

$$(2) \qquad 2m_1 = n_1.$$

Autrement, donnons-lui la forme normale $2 + 2\alpha^m \nu^{m_1} = 3\alpha + \alpha^n \nu^{n_1}$. Si l'on y fait $\nu = 1$, elle donne

$$2 = \frac{\alpha(2\alpha^{m-1} - \alpha^{n-1} - 1)}{\alpha - 1},$$

expression dont la vraie valeur pour $\alpha = 1$ est

$$2m - 2 - n + 1 = 2m - n - 1;$$

donc

$$2m - n - 1 \quad \text{ou} \quad 3m - n = 3.$$



Si au contraire on fait d'abord $\alpha = 1$, on a

$$-1 = \frac{\nu^{m_1} - \nu^{n_1}}{\nu^{m_1} - 1},$$

ou, en prenant la vraie valeur pour $\nu = 1$,

$$-1 = \frac{m_1 - n_1}{m_1},$$

c'est-à-dire $2m_1 = n_1$. On retombe donc par cette méthode sur les deux relations (1) et (2).

Après avoir remarqué le bénéfice qu'on obtient non seulement au point de vue algébrique, mais même au point de vue concret, lorsqu'on rend normale une équation chimique, l'auteur insiste sur ce fait qu'on peut substituer un poids simple à un autre poids simple, sans altérer l'équation. Pour les substitutions à effectuer à la place du symbole 1, il y a un intérêt très grand (sur lequel peut-être l'auteur n'insiste pas assez) à donner aux équations une forme homogène, en écrivant par exemple l'équation fondamentale $1 + xy = x + y$ sous cette forme-ci :

$$1^2 + xy = x.1 + y.1.$$

La Section II traite *des faits chimiques simples et composés.* Une équation chimique peut être envisagée non seulement comme une assertion relative à l'identité de certains poids, mais comme un moyen d'enregistrer un *fait chimique*, en appelant ainsi tout changement survenu dans la composition chimique des unités de matière. On distingue les faits chimiques en faits *simples* et *composés*, ces définitions étant essentiellement relatives et un fait composé dans un certain système de faits pouvant fort bien être considéré comme simple dans un autre système. La Section se termine par un certain nombre d'exemples propres à éclaircir ces notions.

La Section III, *Sur les causes des faits chimiques*, a pour objet l'étude des opérations au moyen desquelles les faits se produisent, ou des *causes* de ces faits. Analytiquement, la cause d'un fait est caractérisée par la substitution réciproque de deux symboles a et x ; un même fait peut être rapporté à deux ou plusieurs causes indifféremment ; il peut aussi reconnaître deux ou plusieurs causes



concourant simultanément à sa production, c'est-à-dire résulter de 2, 3, ..., n substitutions. Les symboles $x, y, z, \ldots$ sont appelés les *variables*, et ceux qu'on met à leur place, $a, b, c, \ldots$, les *valeurs* de ces variables. Il nous semble que l'auteur néglige un peu trop de développer ces définitions, qui semblent présenter quelque chose d'incomplet, en raison de la réciprocité entre $x, y, z, \ldots$ et $a, b, c, \ldots$; mais cela s'éclaircit par les applications ultérieures. Un poids *constant* est celui qui ne subit aucune substitution dans un système de faits déterminé.

Toutes ces notions se traduisent algébriquement par autant de propriétés correspondantes que doivent présenter les équations chimiques. Mais, réciproquement, toute racine d'une équation chimique ne saurait être interprétée comme la cause d'un fait, pas plus que les racines d'une équation qui traduit un problème de Géométrie ou de Mécanique ne sont toutes nécessairement des solutions réelles de ce problème, susceptibles d'une interprétation concrète.

Dans cet ordre d'idées vient en premier lieu l'étude de l'équation $\mathrm{A}xy + \mathrm{A}ab = \mathrm{A}ya + \mathrm{A}xb$; on arrive à y satisfaire soit par la substitution réciproque de a à x, soit par celle de b à y. Le fait chimique qu'elle représente est donc susceptible d'être rapporté à deux causes, et l'équation peut s'écrire

$$u = \mathrm{A}(x - a)(y - b) = 0.$$

Le fait chimique $-u$ est défini l'*inverse* du fait u.

Toutes les équations chimiques ainsi formées le sont au moyen des facteurs premiers représentant des poids simples. Une certaine part, dans la construction de ces équations, est donc laissée à l'hypothèse, laquelle s'appuie elle-même sur des considérations d'ordre expérimental.

L'équation que nous venons de considérer peut affecter la forme

$$\mathrm{A}(x - a)(y - a) = 0,$$

résultant de la condition $a = b$, et aussi la forme $\mathrm{A}(x - a)^2 = 0$, résultant de $a = b$ et $x = y$. On peut aussi avoir $a = 1$, d'où $\mathrm{A}(x - 1)(y - b) = 0$; une des causes du fait est la substitution à x d'un « non-poids » ; on donne le nom de *transférence* à une substitution de cette espèce. Ainsi le fait ci-dessus a pour cause soit la transférence de x, soit la substitution de b à y. Enfin la

constante A peut être remplacée par 1. Des exemples éclaircissent toutes ces particularités.

La fin de la Section III est consacrée à l'examen des équations

$$A(x-a)(y-b)(z-c)=0,$$
$$A(x-a)(y-b)(z-c)(v-d)=0$$

et des particularités qu'elles peuvent présenter. Il n'y a là rien qui mérite véritablement d'être plus spécialement analysé au point de vue de la méthode algébrique, après ce que nous avons dit ci-dessus.

Pour la même raison nous passerons également sous silence la Section IV, *Exemples d'analyse élémentaire des faits*, qui est très digne d'intérêt pour les chimistes et dont l'étude peut jeter beaucoup de lumière sur les théories précédentes, mais qui ne rentre pas directement dans la catégorie des notions dont l'analyse importe au public mathématique, le seul auquel nous nous adressions ici.

Nous avons hâte d'arriver à la Section V et dernière, *Sur l'analyse théorique d'un fait chimique*, qui offre un intérêt mathématique tout spécial. Elle débute par un nouvel examen approfondi des équations du second et du troisième ordre écrites plus haut, en considérant les substitutions variées auxquelles elles répondent, et dont l'interprétation concrète est éminemment curieuse. On trouve aussi cette remarque, déjà faite plus haut, qu'un symbole de poids simple quelconque peut être substitué à 1, pris pour symbole de poids simple, de façon à rendre l'équation homogène.

L'auteur définit ensuite une *congruence chimique;* deux fonctions chimiques sont dites *congrues par rapport à une substitution* si elles acquièrent la même valeur lorsque dans chacune d'elles on opère cette substitution. La substitution est appelée *module* et la valeur commune *résidu*. On représentera une congruence chimique par la notation

$$f(x)\equiv R,\ \mathrm{mod}(x-a),$$

et, plus généralement,

$$f(x,y,z,\ldots)\equiv R,\ \mathrm{mod}(x-a)\ \mathrm{mod}(y-b)\ \mathrm{mod}(z-c)\ldots.$$

[illegible] congruence $f(x)\equiv R$ mod $(x-a)$, si l'on remplace x

par $a + (x - a)$, $f(x)$ est une fonction rationnelle et entière de $x - a$, de la forme

$$A_0 + A_1(x - a) + \ldots + A_n(x - a)^n;$$

on en déduit

$$f(a) = A_0, \quad A_0 = R \quad \text{et} \quad f(x) = f(a) + A_1(x - a),$$

en vertu d'un principe antérieurement établi. En faisant $x = a$, on obtient $A_1 = f'(a)$. Cette notion s'étend au cas de deux ou plusieurs symboles variables. Par exemple, la congruence

$$f(x, y, z) \equiv f(a, b, c), \ \text{mod}\,(x - a) \,\text{mod}\,(y - b) \,\text{mod}\,(z - c)$$

donne

$$\begin{aligned} f(x, y, z) \equiv f(a, b, c) & \\ & + f'_a(a, b, c)(x - a) + f'_b(a, b, c)(y - b) \\ & + f'_c(a, b, c)(z - c). \end{aligned}$$

Le rapprochement, sinon l'identité, entre l'idée de congruence chimique et celle de congruence numérique se fait de lui-même et justifie largement le système de notation adopté.

L'analyse théorique d'un fait chimique produit par un nombre quelconque de substitutions consiste dans l'énumération de tous les faits chimiques différents qui résultent de ces substitutions d'une manière quelconque et dont le fait soumis à l'analyse est le total. Ce problème se présente dans toute congruence chimique. Pour l'aborder, l'auteur fait cette remarque, éminemment philosophique, que le théorème de Taylor, tout à fait indépendant de l'interprétation des symboles, s'appuie exclusivement au fond sur les lois commutative et distributive de la multiplication, $xy = yx$, $x(y + z) = xy + xz$, démontrées pour les symboles chimiques. De là il tire cette conséquence que la congruence

$$f(x) \equiv f(a) \ \text{mod}(x - a)$$

entraine l'équation

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) & \\ & + \frac{1}{2!} f''(a)(x - a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x - a)^n, \end{aligned}$$

qui se décompose ainsi, en raison des propriétés concrètes antérieurement établies :

$$f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)=0, \quad \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2=0, \quad \ldots,$$
$$\frac{1}{n!}f^{n)}(a)(x-a)^n=0.$$

Toutes ces équations, individuellement considérées, font connaître les phases successives par lesquelles on obtient le résultat indiqué dans la première d'entre elles.

Pour ne pas exagérer la longueur de ce compte rendu et comme nous avons pour objet de mettre sous les yeux du lecteur l'esprit de la méthode bien plutôt que les éléments mêmes de cette théorie, nous ne ferons que mentionner l'extension toute logique du théorème de Taylor aux cas de deux ou de plusieurs variables.

Ces considérations conduisent à une définition nouvelle de l'équation chimique normale, fondée sur les propriétés des dérivées successives du premier membre. Ces diverses dérivées, de même que le premier membre lui-même, doivent toutes s'annuler séparément lorsqu'on remplace par 1 les facteurs premiers que l'équation contient. Cette seconde définition, résultant de l'analyse, est plus exacte et plus complète que la définition antérieurement exprimée.

On se trouve ainsi mis en possession d'une théorie générale systématique du mode de production des faits chimiques, tout fait chimique résultant de certaines transférences de poids simples, et beaucoup de faits, simples en apparence, doivent être logiquement considérés comme composés de nombreux autres faits, parmi lesquels il y a lieu de distinguer ceux qui sont réalisables et ceux qui peuvent ne pas l'être. Le problème général de l'analyse des faits chimiques est donc ainsi résolu.

L'Ouvrage se termine par deux Notes critiques de M. Naquet et une de M. Brodie, mais dont nous n'avons pas à parler, car les matières traitées par les deux savants sont dans un ordre d'idées se rapportant à la Chimie pure. Notre tâche se trouve donc terminée, et nous n'ajouterons plus que peu de mots pour caractériser l'œuvre dont nous avons essayé de donner un aperçu.

Les tentatives de cette nature, c'est-à-dire ayant pour objet la constitution systématique d'un ensemble de symboles et de règles

de calcul pour représenter un ordre de faits scientifiques, nous semblent dignes au plus haut degré d'attirer l'attention des savants. L'application pratique peut en être plus ou moins facile, la fécondité peut en être plus ou moins grande ; dans le cas particulier dont il s'agit ici, par exemple, on ne pourra, encore une fois, décider sur ces points que du jour où les chimistes auront entrepris l'étude de cette Algèbre particulière, au lieu de s'en tenir à leurs formules habituelles.

Mais ce qui est certain, c'est que l'idée à laquelle obéit l'inventeur est de nature à placer sous son vrai jour l'interprétation philosophique de l'Algèbre, prise dans son acception la plus élevée et la plus étendue. Une Algèbre est une véritable langue écrite, dont les symboles et les règles dérivent des faits qu'il s'agit d'interpréter, et, lorsque l'on considère, dans l'Algèbre usuelle, les règles de calcul auxquelles on doit se conformer, ce serait une grave erreur de jugement, à notre avis, que de leur donner un caractère absolu, en ne se reportant pas aux faits qui ont imposé ces règles. Pour que la théorie d'un système d'opérations quelconques ait une valeur rationnelle, il faut que ce système d'opérations ne soit que la conséquence d'une catégorie de faits dont les transformations se traduiront dans cette langue nouvelle, d'une merveilleuse concision, si précieuse par suite pour offrir à l'esprit de recherche un point d'appui solide.

Un écueil cependant doit être soigneusement évité : il ne faudrait pas créer une Algèbre pour une catégorie de faits trop particuliers. Autrement, on tomberait dans une anarchie intellectuelle engendrée par la multiplicité des langages, au milieu desquels il deviendrait presque impossible de se retrouver. Ce serait une sorte de Babel scientifique. Mais nous n'en sommes pas là, il s'en faut de beaucoup, et il y a plutôt, pour l'instant, à redouter la tendance contraire.

L'Algèbre de la ligne droite, ou l'Algèbre ordinaire, est répandue partout ; l'Algèbre des figures planes, c'est-à-dire le Calcul des imaginaires ou des équipollences, est entrée dans la science mathématique depuis un demi-siècle à peine ; l'Algèbre des figures dans l'espace, ou Calcul des quaternions, est bien peu cultivée jusqu'à présent, surtout en France. Tout au plus avons-nous vaguement entendu parler des tentatives faites pour créer un Algorithme

spécial applicable aux lois de la logique. Enfin, en ce qui concerne la Chimie, nous ne croyons pas que M. Brodie compte de précurseurs.

Il est à remarquer que chaque innovation de ce genre donne lieu à une sorte de paradoxe apparent, qui épouvante et fait reculer tout d'abord les mathématiciens habitués à leurs conceptions anciennes et trop portés à leur donner un sens absolu qu'elles n'ont pas. C'est ainsi, pour ne rien dire de la théorie des quantités négatives, que les équipollences mènent à l'extraction de la racine carrée de $-a^2$ ou de -1, opération impossible et absurde, disait-on, et sur laquelle on a si longtemps disputé; c'est ainsi que les quaternions enlèvent à la multiplication sa propriété d'être commutative; c'est ainsi que dans le calcul de M. Brodie nous trouvons cette équation fondamentale étrange,

$$xy = x + y,$$

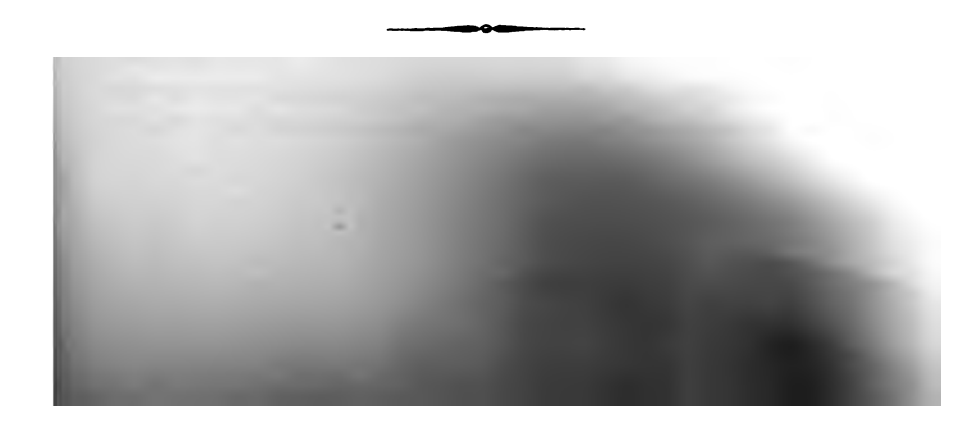
et cette assertion non moins singulière,

$$0 = 1 = 2 = \ldots = n.$$

Mais ce serait faire preuve d'un esprit bien superficiel que de trouver là des motifs suffisants pour repousser l'étude de ce calcul. Avant de se révolter contre de tels paradoxes, il faut voir si ce sont bien des paradoxes, et pour cela chercher sous les symboles leur signification concrète. Il faut, en un mot, étudier pour pouvoir comprendre.

Si nous arrivons, par l'aperçu qui précède, par cette analyse certainement insuffisante, à donner à quelques-uns de nos lecteurs le désir d'entreprendre l'étude dont nous parlons, nous aurons atteint le seul but que nous nous soyons proposé, car ce serait folie que de prétendre exposer en quelques pages une doctrine nouvelle, qui présente certainement quelques difficultés, et qui réclame un examen attentif et approfondi.

A. Laisant.



GÜNTHER (S.). — Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen. Halle, 1881. In-8°, x-440 pages, 58 fig.

Il ne s'agit pas ici d'un Ouvrage original, mais bien d'un aperçu de nos connaissances actuelles dans une branche importante des Mathématiques. C'est donc un Traité que l'on peut en toute confiance recommander à l'attention des géomètres, parce qu'il leur permettra de juger des progrès accomplis et de la variété des questions auxquelles se prête l'emploi des fonctions hyperboliques.

La grande utilité de ces fonctions comme instrument analytique paraît avoir été moins appréciée en Allemagne que dans les autres pays d'Europe. C'est ce que déclare M. Günther au début même de sa Préface. Gronau, en 1861, et Heis, en 1875, avaient pourtant cherché à les accréditer auprès de leurs compatriotes. Dans l'intervalle, deux géomètres français, dont nous retrouverons les noms dans toutes les tentatives de vulgarisation des nouvelles méthodes analytiques, M. Hoüel en 1870, et M. Laisant en 1874, publiaient des Ouvrages ou des travaux plus spécialement consacrés aux fonctions hyperboliques, dont M. Frischauf fit encore ressortir l'avantageux emploi dans certaines théories de l'Analyse, et même en Géométrie absolue, telle que la comprenait J. Bolyai.

Bien que les fonctions hyperboliques soient connues des géomètres depuis plus d'un siècle, elles ne sont pas encore entrées dans le courant de l'enseignement des écoles. Elles sont restées la spécialité de quelques géomètres, qui en ont d'ailleurs étendu les applications à un assez grand nombre de questions pour justifier la faveur avec laquelle on a fini par les accueillir. Aujourd'hui, en effet, l'Analyse et la Géométrie cherchent à profiter de toutes les ressources que peuvent leur procurer les méthodes nouvelles qui commencent à être appréciées en France et à l'étranger par tout le public mathématique : les équipollences de Bellavitis, les quaternions d'Hamilton, les fonctions hyperboliques de Riccati.

Cet heureux résultat est le fruit des efforts des deux géomètres français que nous venons de citer.

Ce que MM. Hoüel et Laisant ont essayé avec succès dans notre pays, M. Günther vient de le tenter avec non moins de réussite dans le sien, en ce qui se rapporte aux fonctions hyperboliques. C'est ce

que l'on pourra juger par l'indication succincte des principaux sujets traités dans la Monographie que M. Günther vient de publier.

Le Chapitre I est consacré à l'histoire et à la bibliographie des fonctions hyperboliques. L'auteur y a, comme d'habitude, déployé toutes les ressources de son érudition. Il paraît avoir eu connaissance de tout ce qui a été écrit sur cet important sujet d'études.

Le lecteur trouvera, dans ce Chapitre, la part qui revient aux divers géomètres qui ont fondé ou développé la théorie des fonctions hyperboliques : Newton, Cotes, qui ont étudié la quadrature de l'hyperbole; Riccati, qui a jeté les bases de cette doctrine et qui a saisi le premier l'analyse des lignes trigonométriques dérivées du cercle et de l'hyperbole équilatère; Moivre, qui a complété cette analogie en lui donnant une forme si élégante et si générale, bien classique aujourd'hui; Foncenex, qui a laissé, sur les expressions imaginaires, d'intéressants travaux qui ont servi de point de départ à de nouvelles objections d'Euler et de d'Alembert dans une théorie qui avait déjà donné un sujet de controverse à Leibniz et à Jean Bernoulli; Lambert, qui approfondit les propriétés des transcendantes circulaires et logarithmiques et s'efforça de démontrer les avantages de l'emploi des lignes hyperboliques en construisant les premières Tables numériques de ces fonctions. C'est à ce propos qu'il imagina la notion nouvelle d'*angle transcendant*, qui sert à effectuer le passage des fonctions circulaires aux fonctions hyperboliques.

Les travaux de Lambert marquent une importante étape dans l'histoire des fonctions hyperboliques. Ils nous mènent à la fin du XVIIIe siècle. A cette époque, Lambert avait réuni en corps de doctrine les remarquables analogies des formules de Trigonométrie hyperbolique avec celles de la Trigonométrie rectiligne et il avait appliqué ces formules à la résolution de divers problèmes astronomiques dans lesquels la Trigonométrie ordinaire se trouvait en défaut.

Après Lambert, il conviendrait de citer avec quelques détails les travaux de Sauri, L'Huillier, Dirksen, Ohm et Grassmann.

Ce que l'on pourrait appeler, pour les fonctions hyperboliques, l'époque moderne est caractérisé par les travaux de Gudermann, en Allemagne, et de Lamé, en France, travaux qui ont servi à re-

lier, pour la première fois, les fonctions hyperboliques aux fonctions elliptiques et aux coordonnées curvilignes. Les efforts des géomètres contemporains ont eu pour objet et pour résultat d'étendre le champ des applications des fonctions hyperboliques à presque toutes les branches de l'Analyse mathématique : c'est la meilleure preuve que l'on puisse donner de l'utilité de ces fonctions et des ressources qu'elles peuvent offrir dans l'étude de plusieurs questions encore délicates.

Le Chapitre II traite des fonctions circulaires et hyperboliques, déduites d'une même origine algébrique. Il a pour objet de faire ressortir la similitude d'origine des fonctions trigonométriques du cercle ou de l'hyperbole équilatère. Il forme, en réalité, un compte rendu substantiel d'un important Mémoire de M. Éd. Lucas, intitulé *Théorie des fonctions numériques simplement périodiques*, publié dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. III et t. IV, 1877 et 1878), et dans le Journal de M. Sylvester, t. I.

M. Éd. Lucas, étudiant les propriétés des racines a et b de l'équation

$$x^2 + Px + Q = 0,$$

s'est trouvé conduit à deux fonctions symétriques de ces racines,

$$U_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \quad V_n = a^n + b^n,$$

qui donnent naissance, pour toutes les valeurs entières et positives de n, à trois espèces de séries, suivant la nature des racines de l'équation. Des valeurs particulières de a et de b donnent des séries récurrentes considérées pour la première fois par Fermat, Pell et Léonard Fibonacci.

Les fonctions U_n et V_n offrent une analogie complète avec les fonctions circulaires et hyperboliques. Aussi M. Günther a-t-il cru devoir leur consacrer une place toute spéciale.

Le Chapitre III renferme de nombreux extraits de l'Ouvrage de M. Laisant et constitue la partie théorique de l'ensemble : propriétés des fonctions hyperboliques; leur périodicité, leurs déve-loppements en séries, en produits indéfinis, en fonctions co[illegible] formules d'addition, de multiplication et de division[illegible]

Le Chapitre IV est consacré aux applications des fonctions hyperboliques à des questions d'Algèbre et d'Analyse.

Voici les principales applications traitées dans ce Chapitre : Logarithmes d'addition et de soustraction. Résolution des équations quadratiques et cubiques. Intégration de fonctions ou d'équations différentielles. Nombres et fonctions de Bernoulli. Série de Lambert. Fonctions sphériques. Double périodicité des fonctions $\mathfrak{S}$.

Le Chapitre V, de beaucoup le plus étendu de l'Ouvrage, dont il forme en effet le quart de la substance, est consacré aux applications des fonctions hyperboliques à diverses questions de Géométrie et de Physique mathématique.

Voici les titres des principales applications : Deux identités de Trigonométrie (Glaisher). Le théorème de Pythagore dans la Géométrie de la sphère (d'après Gudermann, qui rédigea ce travail le 21 septembre 1851, c'est-à-dire la veille de sa mort). Le problème du point par la méthode de Villarceau. Rectification de la parabole; centre de gravité d'un arc de cette courbe. Notion de l'anomalie dans l'ellipse et son extension au cas de l'hyperbole équilatère. Théorie de l'ellipse sphérique et de l'hyperbole sphérique (Grunert, Salmon, Heilermann). Coordonnées curvilignes et elliptiques. Surfaces isothermes (Lamé). Application à la méthode des équipollences (Bellavitis et Laisant). Détermination de l'orbite hyperbolique d'une comète. Application à la théorie des fonctions elliptiques (Gyldén).

Équations de surfaces minima en coordonnées hyperboliques. Applications numériques (Kiepert, Schwarz).

Emploi des fonctions hyperboliques dans l'étude des courbes transcendantes. Exemples : courbe dont l'arc est égal au logarithme de l'abscisse; rectification de la spirale d'Archimède; centre de gravité de la courbe logarithmique (Fischer, Hoüel, Barsotti).

Étude des cycloïdes elliptiques et hyperboliques (Laisant) : M. Günther a reproduit presque identiquement les considérations traitées par M. Laisant. C'est ainsi qu'il établit les principales propriétés de ces courbes, leur tangente, leur courbure, leur quadrature et leur rectification. Il lui emprunte aussi les paragraphes consacrés à l'étude des curieuses propriétés de la chaînette et de sa développante, la courbe tractoire ou tractrice dont les tangentes

sont égales, courbe dont Perrault et Leibniz ont fait connaître un mode de génération mécanique.

M. Günther reproduit aussi, d'après MM. Laisant et Jullien, les applications aux courbes suivantes :

1° Forme d'équilibre d'un fil pesant dont la densité est en chaque point proportionnelle à la racine carrée de l'arc qui sépare ce point du point le plus bas ;

2° Courbe affectée par une corde élastique et pesante, suspendue par ses deux extrémités.

Il termine ce même paragraphe par un extrait d'un Mémoire de M. Ligowski sur la détermination de la forme et de la résistance des arcs courbes employés dans les constructions.

Le Chapitre VI contient les fondements analytiques de la Géométrie non euclidienne.

But que se propose la Géométrie non euclidienne. Développement de la règle du levier, par Foncenex. Construction statique d'une formule fondamentale.

Les surfaces à courbure constante. Si cette courbure est positive, la surface est une sphère ; si elle est nulle, la surface est développable (cône, cylindre) ; si elle est négative, la surface est appelée *pseudosphère*, étudiée par Minding, Beltrami et plusieurs autres géomètres, depuis que l'on a reconnu le rôle important de ce type de surfaces dans les discussions auxquelles a donné lieu le *postulatum* d'Euclide.

Angles de parallèles ; lignes de limite ; surfaces limites. Calcul des surfaces et des volumes dans la Géométrie absolue. Variétés d'ordre supérieur.

Le Chapitre VII renferme diverses considérations sur la généralisation des sujets et problèmes mathématiques ; extension de la notion des fonctions trigonométriques aux courbes que représente l'équation $x^m \pm y^m = 1$.

Généralisation des points de vue restreints du but final de la Science. Principe de la conservation des types énoncé par Hankel. Son application au cas actuel. Définitions différentes des fonctions circulaires et hyperboliques. Leur généralisation. Fonctions longimétriques considérées par Unverzagt. Fonctions trigonométriques du type cyclique et du type hyperbolique. Périodicité et théorème de l'addition.

Le Chapitre VIII traite des lignes trigonométriques obliquangles du cercle et de l'hyperbole équilatère; lignes trigonométriques rectangles de l'ellipse et de l'hyperbole quelconque.

Ces notions représentent un essai de généralisation tenté par Biehringer et Unverzagt. Elles ont pour objet de passer des coordonnées rectangles aux coordonnées obliquangles en cherchant ce que deviennent alors les lignes trigonométriques naturelles. Presque tout ce Chapitre est extrait de la Monographie de M. Laisant, pages 37 à 48 (extension de la Trigonométrie du cercle et de l'hyperbole équilatère à l'ellipse et à l'hyperbole quelconque), et pages 71 à 83 (coordonnées polaires elliptiques et hyperboliques). M. Günther lui emprunte aussi, pour terminer ce Chapitre, une application de ces coordonnées polaires à la quadrature de deux courbes planes (p. 96 et 97).

Le Chapitre IX a pour titre : *Généralisation des séries trigonométriques et des règles de transformation de la Trigonométrie.*

Exposé historique de cette extension de l'idée de fonction. Débuts de Riccati dans cette voie, continuée successivement par Olivier, Magnus, Hellwig, Buttel, Simon, Beyssell, Most, Knar. Travaux récents de MM. Appell et Glaisher.

Le Chapitre X est intitulé : *Extension des fonctions hyperboliques à l'espace; fonctions hyperboloïdiques.*

Ce Chapitre débute par l'exposé des propriétés des fonctions circulaires et hyperboliques, considérées comme solutions d'une équation différentielle du second ordre. L'auteur envisage ensuite les fonctions sphériques comme généralisation ou extension des fonctions circulaires, puis il étudie les fonctions hyperboloïdiques de première espèce et de seconde espèce, et les applique à diverses questions de la théorie de l'élasticité et de la détermination d'intégrales définies.

Ce rapide examen des Chapitres de l'Ouvrage de M. Günther aura sans doute établi dans l'esprit de nos lecteurs la conviction que cette Monographie précisera la situation actuelle des fonctions hyperboliques et l'avenir qui les attend.

M. Günther s'est inspiré principalement de deux Ouvrages antérieurs : *L'Essai sur les fonctions hyperboliques*, de M. Laisant, extrait du t. X des *Mémoires de la Société des Sciences Phy-*

siques et Naturelles de Bordeaux, 1874 (Voir *Bulletin*, t. I_2, p. 168) et les *Tavole logaritmiche* de M. Forti, extraites du t. VI des *Annali delle Università toscane* (Voir *Bulletin*, t. I, p. 265).

En adoptant le premier de ces Ouvrages, dont le titre, beaucoup trop modeste, ne fait pas pressentir la richesse et la variété des développements, M. Günther a voulu témoigner à notre savant collaborateur la profonde sympathie qu'il éprouve pour ses travaux. Un simple coup d'œil jeté sur les deux Monographies fera reconnaître au lecteur le moins attentif que l'*Essai sur les fonctions hyperboliques* a été entièrement traduit et refondu dans le texte de M. Günther. C'est le plus juste hommage que l'on puisse rendre au mérite de ce travail.

M. Günther a été sans doute moins heureux dans le choix exclusif qu'il paraît avoir fait des *Tavole* de M. Forti. Les Tables de fonctions hyperboliques doivent, autant que possible, ressembler aux Tables de lignes trigonométriques, parce que cette disposition est de nature à faciliter leur emploi dans le Calcul. C'est le principe qui a guidé les auteurs des premières Tables de fonctions hyperboliques, Lambert, Gudermann et surtout Gronau, qui a apporté à leur disposition les plus heureuses simplifications. Nous n'avons pas à revenir sur les remarques exposées par M. Hoüel, à propos des *Tavole* de M. Forti ; ces remarques subsistent encore aujourd'hui et elles prouvent que la publication de nouvelles Tables aussi étendues que celles de M. Forti (¹), mais construites dans le système de Gronau, répondrait à un légitime désir des géomètres et formerait le complément obligé à une monographie dont ces critiques de détail ne doivent pas faire oublier les grandes qualités et l'incontestable mérite.

H. BROCARD.

(¹) Nous apprenons, au dernier moment, que M. Forti lui-même s'est chargé de ce travail, et qu'il se propose de publier une quatrième édition de ses *Tavole*, dans laquelle il abandonnera la disposition empruntée à son ancien maître Mossotti, pour se rapprocher de la disposition de Gronau.



MÉLANGES.

REMARQUES SUR QUELQUES POINTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES;

PAR M. WEIERSTRASS [1].

1. La Communication suivante se rapporte à certaines séries indéfinies dont les termes sont des fonctions rationnelles d'une variable : elle a pour but principal d'éclaircir certaines propriétés que peuvent offrir ces suites, propriétés qui, à ce que je crois, n'ont pas encore été remarquées et qui ont quelque importance pour la théorie des fonctions.

Soit donné un nombre infini de fonctions rationnelles de la variable x, rangées dans un ordre déterminé,

$$f_0(x), \quad f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots.$$

L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

a une valeur finie constitue la *région de convergence* de la série. Si, a étant un point de cette région, on peut déterminer une quantité positive ρ telle que, sous la supposition

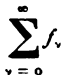
$$|x - a| \leqq \rho,$$

la série converge uniformément [2], je dirai que la série converge

---

[1] *Monatsberichte der Kön. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, séance du 12 août 1880.

[2] Une série infinie



$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$$

dont les termes sont des fonctions d'une ou de plusieurs variables converge uniformément dans une certaine partie (B) de sa région de convergence, si, δ étant [illegible] le veut, on peut toujours déterminer un en-

uniformément dans le voisinage du point a. La quantité ρ a une limite supérieure : soit R cette limite ; on peut, relativement à la série considérée, désigner l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on a

$$|x-a|<\mathrm{R}$$

comme le domaine du point a, et R comme le rayon de ce domaine. Dans le voisinage d'un point quelconque de ce domaine, la série converge uniformément. Il résulte de là que l'ensemble des points dans le voisinage desquels la série converge uniformément constitue dans le plan de la variable x une surface simple [1], mais qui peut comprendre plusieurs parties séparées.

Supposons qu'il existe des points de la nature en question, et qu'on représente par A leur ensemble ; imaginons que l'on parte de l'un d'eux, qu'on en choisisse un autre dans le domaine du premier, un troisième dans le domaine du second, etc. L'ensemble des points

---

tier m tel que le module de la somme

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} f_\nu$$

soit inférieur à δ pour toute valeur de ν supérieure ou égale à m, et cela, pour tout système de valeurs des variables qui appartient à la région B. Pour que la série soit en même temps absolument convergente dans la même région, c'est-à-dire indépendante de l'arrangement de ses termes, il faut qu'on puisse en retrancher un nombre fini de termes, tel que la somme d'autant de termes qu'on voudra parmi les termes restants soit, pour chaque système de valeurs appartenant à la région, inférieure à δ. Cette condition sera certainement remplie s'il existe une suite de nombres positifs

$$g_0,\ g_1,\ g_2,\ \ldots,$$

pour lesquels on ait, en chaque point de la région B,

$$|f_\nu| \leq g_\nu \quad (\nu = 0, \ldots, \infty),$$

et tels que la somme

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu$$

ait une valeur finie. — Il résulte de la définition donnée par l'uniformité de la convergence que, si une série converge uniformément dans plusieurs parties de sa région de convergence, elle converge uniformément dans la région totale composée de toutes ces parties.



(1) Une surface qui ne passe qu'une seule fois par chacun de ses points.

de A auxquels on peut parvenir de cette façon constitue dans le plan de la variable x un certain *continuum* A_1, dont la limitation pourra comprendre une ou plusieurs lignes et aussi des points isolés. S'il existe en dehors de A_1 des points de A, il existera au moins un second *continuum* A_2 de même nature que A_1 et qui n'aura aucun point commun avec A_1 ; toutefois certaines parties des limites de A et de A_2 peuvent être communes. S'il existe encore des points de A qui n'appartiennent ni à A_1 ni à A_2, il existera au moins un troisième *continuum* A_3, analogue à A_1 et à A_2 et qui n'aura aucun point commun ni avec A_1 ni avec A_2, et ainsi de suite.

On peut montrer aisément sur des exemples que A peut en effet être constitué de ces différentes manières : il suffira de considérer les deux séries

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu}, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{x^{\nu}+x^{-\nu}}.$$

Pour la première, la région A est formée de toutes les valeurs de x dont le module est inférieur à 1 ; pour la seconde il y a en outre les valeurs pour lesquelles le module est supérieur à 1 ; dans le premier cas, A se compose d'une surface continue ; dans le second, A se compose de deux surfaces continues n'ayant aucun point en commun. Des exemples de séries de même nature pour lesquelles la région A est composée de plus de deux portions se rencontreront plus tard.

Je vais maintenant prouver que si la série considérée converge uniformément dans le voisinage de chaque point situé à l'intérieur ou sur le contour d'une aire continue donnée B, elle converge uniformément dans toute cette aire.

Soient a, a' deux points de la région A, a' étant situé dans le domaine de a; soit R le rayon de ce domaine. $D = |a' - a|$ étant la distance des deux points, le rayon R' du domaine de a' ne peut pas être inférieur à $R - D$; si l'on a $D < \frac{1}{2}R$, on aura

$$R' > \frac{1}{2}R$$

et a sera situé dans le domaine de a' : on aura donc

$$R \geqq R' - D;$$

en sorte que R′ doit être compris entre

$$R - D \quad \text{et} \quad R + D.$$

Si maintenant le point a se déplace d'une façon continue dans A, on voit que la valeur correspondante de R varie aussi d'une façon continue : il existe donc un point dans l'intérieur ou sur le contour de B pour lequel la limite inférieure R_0 des valeurs que peut prendre R dans la région B est atteinte, et cette limite inférieure R_0 n'est pas nulle. Par suite, on peut décomposer B en un nombre fini de parties telles que, dans chacune, la distance maximum de deux points soit inférieure à R_0. Chacune de ces parties est située tout entière dans le domaine d'un quelconque de ses points ; dans chacune de ces parties, la série converge uniformément ; de là et d'une remarque précédemment faite résulte la proposition énoncée.

Une série de la nature en question peut être telle que, dans le voisinage d'un point quelconque situé dans l'*intérieur* de la région de convergence, elle converge uniformément. Dans ce qui suit, on étudiera exclusivement de telles séries. Si l'on sait seulement, sur la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x),$$

qu'il y a, dans le plan de la variable x, une aire continue dans laquelle la série converge, il ne s'ensuit en aucune façon que, dans cette aire, la somme de la série soit une fonction continue de x. Mais si l'on fait la supposition précédente, on peut montrer que la série, dans chacune des aires $A_1, \ldots$, précédemment définies et qui appartiennent à la région de convergence, représente en général une branche uniforme d'une fonction analytique monogène de x et que, dans des cas particuliers, elle peut représenter complètement une telle fonction.

Ici, il est nécessaire d'établir un lemme préliminaire.

2. Soit donnée, dans un ordre déterminé, une infinité de séries ordonnées suivant les puissances entières d'une variable x,

$$P_0(x), \quad P_1(x), \quad P_2(x), \quad \ldots,$$

chacune des séries pouvant d'ailleurs contenir, en no

conque, des puissances positives ou négatives; supposons qu'il existe deux nombres R, R′ dont le premier soit positif ou nul, dont le second soit plus grand que le premier et tels que, sous la condition

$$R < |x| < R',$$

non seulement les séries convergent isolément, mais encore qu'il en soit de même de la somme

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x),$$

et que, de plus, cette dernière somme converge uniformément pour les valeurs de x dont le module est compris entre R et R′. Si l'on désigne alors par

$$A_\mu^{(\nu)}$$

le coefficient de x^μ dans $P_\nu(x)$, la somme

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\mu^{(\nu)}$$

aura pour toute valeur de μ une valeur finie que je désignerai par A_μ, et l'on peut montrer que, pour toute valeur de x dont le module est plus grand que R et plus petit que R′, la série

$$\sum_\mu A_\mu x^\mu$$

est convergente et que l'on a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x) = \sum_\mu A_\mu x^\mu.$$

Soit r une quantité positive quelconque, comprise entre R et R′, et k une autre quantité positive arbitraire; on peut, à cause de la supposition relative à la convergence de la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x),$$

déterminer un nombre entier positif m tel que, pour toute valeur de x dont le module est égal à r, le module de la somme

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} P_\nu(x)$$

soit, pour toute valeur de n égale ou supérieure à m, inférieure à $\frac{1}{2}k$, tel, par conséquent, que, pour tout nombre n' supérieur ou égal à n, on ait

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n'} P_\nu(x)\right| < k.$$

On a d'ailleurs

$$\sum_{\nu=n}^{n'} P_\nu(x) = \sum_{\mu}\left(\sum_{\nu=n}^{n'} A_\mu^{(\nu)} x^\mu\right),$$

et, par conséquent, en vertu d'un théorème connu, on aura, pour toute valeur entière de μ,

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n'} A_\mu^{(\nu)}\right| < kr^{-\mu};$$

la somme $\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\mu^{(\nu)}$ a donc une valeur finie et déterminée que nous désignerons par A_μ.

Soient maintenant r_1, r_2 deux nombres positifs tels que l'on ait

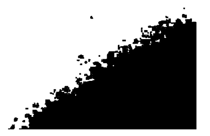
$$R < r_1 < r < r_2 < R';$$

on peut donner au nombre n une valeur telle que

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n'} A_\mu^{(\nu)}\right|$$

soit plus petit que chacun des deux nombres

$$kr_1^{\mu}, \quad kr_2^{\mu};$$



il en résultera

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\infty} A_{\mu}^{(\nu)}\right| \leqq k r_1^{-\mu},$$

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\infty} A_{\mu}^{(\nu)}\right| \leqq k r_2^{-\mu}.$$

D'ailleurs, en faisant

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} A_{\mu}^{(\nu)} = A'_{\mu},$$

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} A_{\mu}^{(\nu)} = A''_{\mu},$$

et en supposant que la variable x ait une valeur dont le module soit égal à r, on aura

$$\sum_{\mu=-1}^{-\infty} | A''_{\mu} x^{\mu} | \leqq k \sum_{\mu=-1}^{-\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\mu},$$

$$\sum_{\mu=0}^{+\infty} | A''_{\mu} x^{\mu} | \leqq k \sum_{\mu=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{r_2}\right)^{\mu},$$

et par conséquent

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \left| A''_{\mu} x^{\mu} \right| \leqq k\left(\frac{r_1}{r-r_1} + \frac{r_2}{r_2-r}\right).$$

La série

$$\sum_{\mu} A''_{\mu} x^{\mu}$$

converge donc inconditionnellement, et, puisque

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} P_{\nu}(x) = \sum_{\mu} A'_{\mu} x^{\mu},$$

il en est de même de la série



$$\sum A_{\mu} x^{\mu}.$$

On a ensuite

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x) - \sum_{\mu} A_\mu x^\mu = \sum_{\nu=n}^{\infty} P_\nu(x) - \sum_{\mu} A'_\mu x^\mu,$$

et, par conséquent,

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x) - \sum_{\mu} A_\mu x^\mu\right| \leq k + k\left(\frac{r_1}{r-r_1} + \frac{r_2}{r_2-r}\right).$$

Puisque enfin, pour toute valeur déterminée de x dont le module r est compris entre R et R′, on peut déterminer les nombres r_1 et r_2 de façon à satisfaire aux conditions précédentes, et que l'on peut prendre k assez petit pour que

$$k + k\left(\frac{r_1}{r-r_1} + \frac{r_2}{r_2-r}\right)$$

soit plus petit qu'une quantité donnée, il résulte de ce qui précède que, sous la condition

$$R < |x| < R',$$

la série

$$\sum_{\mu} A_\mu x^\mu$$

converge et que l'on a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x) = \sum_{\mu} A_\mu x^\mu.$$

C'est ce qui avait été annoncé.

Soit, maintenant,

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

une série quelconque ayant la propriété dont il a été question à la fin du n° 1 et soit A′ une des portions dont se compose, comme il a été supposé, la région de convergence de cette série.

Soit a_0 un point choisi arbitrairement dans A′ et limitons la variable x au domaine du point a_0 ; non seulement les fonctions $f(x)$, mais encore, en vertu du lemme précédent, leur somme pourront

s'exprimer au moyen d'une série procédant suivant les puissances entières et positives de $x - a_0$; je représenterai cette série par

$$\mathfrak{P}(x - x_0),$$

et l'appellerai, d'après la notation introduite par moi dans mes Leçons sur la théorie des fonctions analytiques, un élément de la fonction $F(x)$.

Si maintenant on prend dans le domaine de a_0 un second point a_1, et si $\mathfrak{P}_1(x - a_1)$ est l'élément de $F(x)$ correspondant à ce point, on a pour les valeurs de x communes aux domaines de a et de a_1

$$\mathfrak{P}_1(x - a_1) = \mathfrak{P}_0(x - a_0),$$

$$\mathfrak{P}_0(x - a_0) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{P}_0^{(\mu)}(a_1 - a_0)\frac{(x - a_1)^\mu}{\mu!},$$

où

$$\mathfrak{P}_0^{(\mu)}(x - a_0) = \frac{d^\mu \mathfrak{P}_0(x - a_0)}{dx^\mu},$$

et il faut que le coefficient de $(x - a_1)^\mu$ dans $\mathfrak{P}_1(x - a_1)$ ait la même valeur que le coefficient correspondant dans le développement de $\mathfrak{P}_0(x - a_0)$, suivant les puissances de $x - a_1$ (¹).

Soit a un point quelconque de A′, on peut, entre a_0 et a, former une suite de points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tels que a_1 soit dans le domaine de a_0, a_2 dans le domaine de $a_1, \ldots$, et finalement a dans le domaine de a_n.

(¹) Je remarque ici que, d'après le théorème du numéro précédent, le coefficient de $(x - a_1)^\mu$ est

$$\frac{1}{\mu!}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{d^\mu f_\nu(x)}{dx^\mu}\right]_{(x = a_1)},$$

en sorte que, dans A′, la fonction $F(x)$ a des dérivées de tout ordre, et que l'on a

$$\frac{d^\mu F(x)}{dx^\mu} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{d^\mu f_\nu(x)}{dx^\mu}.$$

Il est ensuite aisé de démontrer que la série du second membre converge uniformément dans le voisinage de chaque point de A′ et qu'elle a ainsi la même pro- [illegible]

En désignant par $\mathfrak{P}_1(x-a_1)$, $\mathfrak{P}_2(x-a_2)$, ..., $\mathfrak{P}_n(x-a_n)$, $\mathfrak{P}(x-a)$ les éléments de la fonction correspondant aux points $a_1, a_2, \ldots, a_n, a$, on aura

$$\mathfrak{P}_1(x-a_1)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\mathfrak{P}_0^{(\mu)}(a_1-a_0)\,\frac{(x-a_1)^\mu}{\mu!},$$

$$\mathfrak{P}_2(x-a_2)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\mathfrak{P}_1^{(\mu)}(a_2-a_1)\,\frac{(x-a_2)^\mu}{\mu!},$$

....

$$\mathfrak{P}(x-a)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\mathfrak{P}_n^{(\mu)}(a-a_n)\,\frac{(x-a)^\mu}{\mu!}.$$

La connexion qui existe entre les différents éléments de la fonction considérée dans la région A′ est donc telle que l'on peut déduire de chaque élément donné chacun des autres éléments par un calcul déterminé : en sorte que, dans cette région, la fonction est complètement déterminée si l'on connaît un de ses éléments.

Il peut se faire que, lorsque le point a s'approche du contour qui limite A′, la région de convergence de la série $\mathfrak{P}(x-a)$ dépasse A′. Dans ce cas (qui est le cas ordinaire), il existe une infinité de de séries $\mathfrak{P}'(x-a')$ que l'on peut déduire de $\mathfrak{P}_0(x-a_0)$ par le procédé qui a été décrit précédemment, et dont la région de convergence est, en totalité ou en partie, extérieure à A′, et il peut arriver que, de ces dernières séries, on puisse en déduire d'autres dont la région de convergence contienne encore des points de A′, mais qui, pour ces points, fournissent d'autres valeurs que $F(x)$; toutes ces séries constituent des continuations de la fonction définie tout d'abord pour tous les points à l'intérieur de A′ par la série donnée $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$; elles sont toutes, d'après la terminologie introduite dans mes Leçons, des éléments d'une fonction analytique monogène, qui peut être uniforme ou multiforme, mais qui est complètement définie quand on donne un de ses éléments.

Si la région de convergence de la série $\mathfrak{P}(x-a)$ est [illegible] quel que soit a, contenue dans A′, il est impossible [illegible] en dehors des limites de la région A′ la fonction [illegible]

F(x) définit à l'intérieur de cette région. Dans ce cas, qui se rencontre effectivement, ainsi qu'on le montrera bientôt; la série représente complètement, en limitant les valeurs de x à celles qui appartiennent à la région A′, une fonction uniforme monogène.

Ainsi, par toutes les explications qui précèdent, se trouve justifiée la proposition énoncée à la fin du n° **1**.

Une question importante pour la théorie des fonctions se pose maintenant.

Dans le cas où la région de convergence de la série considérée se compose de plusieurs portions A_1, A_2, ..., il est possible que la série représente, dans ces différentes portions, des branches d'une même fonction monogène; mais nous avons à nous poser cette question : cela arrive-t-il dans tous les cas? Si nous arrivons à une réponse négative (à laquelle nous arriverons en réalité), il sera prouvé que le *concept d'une fonction monogène d'un argument complexe et le concept d'une dépendance exprimable par une suite d'opérations arithmétiques ne se rencouvrent pas entièrement*. De la résulte encore que plusieurs des plus importants théorèmes de la nouvelle théorie des fonctions ne peuvent être toujours appliqués aux expressions qui, au sens de l'ancienne analyse (Euler, Lagrange, etc.), sont des fonctions d'une variable complexe ([2]).

([1]) Le contraire a été énoncé par Riemann (*Grundlagen für die allgemeine Theorie der Functionen einer complexen Grösse*, § 19, à la fin). Je remarque à ce propos qu'une fonction d'une variable complexe, telle que Riemann la définit, est toujours une fonction monogène.

([2]) Soient, par exemple, deux expressions

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x), \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{f}_\nu(x)$$

de la nature de celles qui nous occupent, et supposons qu'on ait prouvé que, dans le voisinage d'un point appartenant à la région de convergence commune aux deux séries, il existe une infinité de valeurs de x qui rendent égales les deux expressions; il sera prouvé par là même que, à l'intérieur d'une région déterminée et continue, l'égalité

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{f}_\nu(x)$$

[illegible] pas conclure que cette égalité soit vraie pour tous les

J'ai trouvé il y a longtemps, et j'ai montré dans mes Leçons que la série déjà citée

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{x^{\nu} + x^{-\nu}},$$

dont la région de convergence se compose de deux morceaux, représente deux fonctions monogènes différentes, et qu'elle représente chacune d'elles complètement.

Si, en effet, x_0 est une valeur quelconque de x dont le module soit égal à 1, on peut, en faisant usage de théorèmes qui appartiennent à la théorie de la transformation linéaire des fonctions ϑ elliptiques, montrer que, parmi les valeurs de x dont le module est inférieur à 1, comme aussi parmi celles dont le module est supérieur, on peut trouver, dans une aire aussi petite qu'on le veut entourant le point x_0, des points tels que le module de $F(x)$ dépasse toute quantité donnée. Ceci montre directement que la série considérée représente dans chacune des deux portions dont se compose sa région de convergence une fonction qui ne peut pas être continuée au delà des limites de cette portion.

Cependant, quoique l'exemple cité puisse déjà servir de réponse à la question posée, il reste toutefois encore un point à éclaircir.

Les deux fonctions définies par la série considérée ont entre elles une relation très simple,

$$F(x^{-1}) = F(x).$$

On pouvait donc se demander si, dans le cas où une expression arithmétique $F(x)$, dans les différentes parties de sa région de convergence, représente des fonctions monogènes différentes de la variable x, il n'existe pas entre ces fonctions une connexion nécessaire qui permette de déduire des propriétés de l'une d'entre elles les propriétés des autres. S'il en était ainsi, il conviendrait d'élargir le concept d'une fonction monogène.

Pour lever toute espèce de doute sur ce point, je me suis pro-

---

points appartenant à la région commune de convergence, tant qu'on n'a pas prouvé que les deux expressions sont, dans cette région, des fonctions monogènes.

déterminée différente de zéro est

$$\frac{1}{2\omega}\sum_{\nu}\left(\frac{1}{\frac{u-2\nu'\omega'}{2\omega}-\nu}-\frac{1}{-\frac{\nu'\omega'}{\omega}-\nu}\right)+\frac{u}{4\omega^2}\sum_{\nu}\frac{1}{\left(-\frac{\nu'\omega'}{\omega}-\nu\right)^2}$$
$$=\frac{\pi}{2\omega}\left[\cot\frac{u-2\nu'\omega'}{2\omega}\pi+\cot\frac{\nu'\omega'}{\omega}\pi+\frac{\pi^2 u}{4\omega^2\sin^2\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}\pi\right)}\right];$$

donc

$$\psi(u,\omega,\omega')=\frac{\pi}{2\omega}\cot\frac{u\pi}{\omega}+\frac{\pi}{2\omega}\sum_{\nu'}{}'\left(\cot\frac{u-2\nu'\omega'}{2\omega}\pi+\cot\frac{\nu'\omega'}{\omega}\pi\right)$$
$$+\left[\frac{1}{3}+\sum_{\nu'}{}'\sin^{-2}\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}\pi\right)\right]\frac{u\pi^2}{4\omega^2},$$

ou encore, si, n désignant un nombre entier positif, on pose

$$\eta=\frac{\pi^2}{\omega}\left[\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sin^{-2}\left(\frac{n\omega'}{\omega}\pi\right)\right],$$

$$\psi(u,\omega,\omega')=\frac{\eta u}{\omega}+\frac{\pi}{2\omega}\cot\frac{u\pi}{\omega}$$
$$+\frac{\pi}{2\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cot\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi+\cot\frac{u+2n\omega'}{2\omega}\pi\right);$$

il résulte de cette équation que l'on a

$$\psi(u+2\omega,\omega,\omega')=\psi(u,\omega,\omega')+2\eta.$$

Si l'on observe maintenant que $\psi(u,\omega,\omega')$ est une fonction impaire de u, qui n'est pas infinie quand on y fait $u=-\omega'$, l'égalité précédente, où l'on fait $u=-\omega$, donne

$$\eta=\psi(\omega,\omega,\omega').$$

En faisant $u=\omega'$, dans l'équation qui donne la dernière forme de $\psi(u,\omega,\omega')$, on obtient

$$\omega'\psi(\omega,\omega,\omega')-\omega\psi(\omega',\omega,\omega')$$
$$=-\frac{\pi}{2}\cot\frac{\omega'\pi}{\omega}+\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cot\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi-\cot\frac{(2n+1)\omega'}{2\omega}\pi\right];$$

a une valeur finie, si, dans la sommation, on laisse de côté le terme qui provient de la supposition $\nu = 0$, $\nu' = 0$. Il en résulte, ainsi que je l'ai montré dans le n° 2 de mon Mémoire sur les fonctions uniformes, que la série

$$\frac{1}{u} + \sum_{\nu,\nu'}{}' \left[\frac{1}{u - 2\nu\omega - 2\nu'\omega'} \left(\frac{u}{2\nu\omega + 2\nu'\omega'} \right)^2 \right],$$

qui conserve la même valeur, quel que soit l'ordre dans lequel on range ses termes, définit une fonction analytique uniforme de la variable u, avec le seul point singulier essentiel ∞ ; je la représenterai par

$$\psi(u, \omega, \omega'),$$

à l'aide des équations connues

$$\cot u\pi = \frac{1}{u} + \sum_{\nu}{}' \left(\frac{1}{u - \nu} + \frac{1}{\nu} \right),$$

$$\pi(\cot u\pi - \cot a\pi) = \sum_{\nu} \left(\frac{1}{u - \nu} - \frac{1}{a - \nu} \right),$$

où a désigne un nombre non entier,

$$\left(\frac{\pi}{\sin u\pi} \right)^2 = \sum_{\nu} \left(\frac{1}{u - \nu} \right)^2, \quad \frac{\pi^2}{3} = \sum_{\nu}{}' \frac{1}{\nu^2}.$$

On peut transformer comme il suit l'expression de $\psi(u, \omega, \omega')$.

On a

$$\psi(u, \omega, \omega') = \frac{1}{u} + \sum_{\nu,\nu'}{}' \left[\frac{1}{u - 2\nu\omega - 2\nu'\omega'} + \frac{1}{2\nu\omega + 2\nu'\omega'} + \frac{u}{(2\nu\omega + 2\nu'\omega')^2} \right].$$

La somme de tous les termes de cette série pour lesquels ν' est nul est

$$\frac{1}{2\omega} \left[\frac{2\omega}{u} + \sum_{\nu}{}' \left(\frac{1}{\frac{u}{2\omega} - \nu} + \frac{1}{\nu} \right) \right] + \frac{u}{4\omega^2} \sum_{\nu}{}' \frac{1}{\nu^2}$$
$$= \frac{\pi}{2\omega} \cot \frac{u\pi}{2\omega} + \frac{\pi^2}{12\omega^2} u;$$

puis la somme de tous les termes pour lesquels ν' a une valeur

déterminée différente de zéro est

$$\frac{1}{2\omega}\sum_{\nu}\left(\frac{1}{\frac{u-2\nu'\omega'}{2\omega}-\nu}-\frac{1}{-\frac{\nu'\omega'}{\omega}-\nu}\right)+\frac{u}{4\omega^2}\sum_{\nu}\frac{1}{\left(-\frac{\nu'\omega'}{\omega}-\nu\right)^2}$$
$$=\frac{\pi}{2\omega}\left[\cot\frac{u-2\nu'\omega'}{2\omega}\pi+\cot\frac{\nu'\omega'}{\omega}\pi+\frac{\pi^2 u}{4\omega^2\sin^2\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}\pi\right)}\right];$$

donc

$$\psi(u,\omega,\omega')=\frac{\pi}{2\omega}\cot\frac{u\pi}{\omega}+\frac{\pi}{2\omega}\sum_{\nu'}{}'\left(\cot\frac{u-2\nu'\omega'}{2\omega}\pi+\cot\frac{\nu'\omega'}{\omega}\pi\right)$$
$$+\left[\frac{1}{3}+\sum_{\nu'}{}'\sin^{-2}\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}\pi\right)\right]\frac{u\pi^2}{4\omega^2},$$

ou encore, si, n désignant un nombre entier positif, on pose

$$\eta=\frac{\pi^2}{\omega}\left[\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sin^{-2}\left(\frac{n\omega'}{\omega}\pi\right)\right],$$

$$\psi(u,\omega,\omega')=\frac{\eta u}{\omega}+\frac{\pi}{2\omega}\cot\frac{u\pi}{\omega}$$
$$+\frac{\pi}{2\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cot\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi+\cot\frac{u+2n\omega'}{2\omega}\pi\right);$$

il résulte de cette équation que l'on a

$$\psi(u+2\omega,\omega,\omega')=\psi(u,\omega,\omega')+2\eta.$$

Si l'on observe maintenant que $\psi(u,\omega,\omega')$ est une fonction impaire de u, qui n'est pas infinie quand on y fait $u=-\omega'$, l'égalité précédente, où l'on fait $u=-\omega$, donne

$$\eta=\psi(\omega,\omega,\omega').$$

En faisant $u=\omega'$, dans l'équation qui donne la dernière forme de $\psi(u,\omega,\omega')$, on obtient

$$\omega'\psi(\omega,\omega,\omega')-\omega\psi(\omega',\omega,\omega')$$
$$=-\frac{\pi}{2}\cot\frac{\omega'\pi}{\omega}+\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cot\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi-\cot\frac{(2n+1)\omega'}{2\omega}\pi\right];$$

mais on a, en désignant par m un entier positif quelconque,

$$-\frac{\pi}{2}\cot\frac{\omega'\pi}{\omega}+\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{m}\left(\cot\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi-\cot\frac{(2n+1)\omega'}{2\omega}\pi\right)$$
$$=-\frac{\pi}{2}\cot\frac{(2m+1)\omega'}{2\omega}\pi:$$

la quantité

$$\omega'\psi(\omega,\omega,\omega')-\omega\psi(\omega',\omega,\omega')$$

est donc égale à la limite de

$$-\frac{\pi}{2}\cot\frac{(2m+1)\omega'}{2\omega}\pi=\frac{e^{\frac{(2m+1)\omega'\pi}{\omega i}}+e^{-\frac{(2m+1)\omega'\pi}{\omega i}}}{e^{\frac{(2m+1)\omega'\pi}{\omega i}}-e^{-\frac{(2m+1)\omega'\pi}{\omega i}}}\frac{\pi i}{2};$$

pour $m=\infty$; cette limite est

$$\frac{\pi i}{2}\quad\text{ou}\quad-\frac{\pi i}{2},$$

suivant que la partie réelle de $\frac{\omega'}{\omega i}$ est positive ou négative.

Si l'on se reporte à l'expression primitive de $\psi(u,\omega,\omega')$, on voit qu'elle ne change pas quand on y remplace ν par ν' et ν' par $-\nu$; il en résulte que l'on a

$$\psi(u,\omega,\omega')=\psi(u,\omega',-\omega);$$

on a donc

$$\omega'\psi(\omega,\omega,\omega')-\omega\psi(\omega',\omega',-\omega)=\pm\frac{\pi i}{2},$$

suivant que la partie réelle de $\frac{\omega'}{\omega i}$ est positive ou négative.

On a encore, en désignant par c une quantité arbitraire,

$$\psi(u,\omega,\omega')=c\psi(cu,c\omega,c\omega');$$

d'où, en prenant $c=\frac{1}{\omega}$,

$$\psi(\omega,\omega,\omega')=\frac{1}{\omega}\psi\left(1,1,\frac{\omega'}{\omega}\right);$$

de même,

$$\psi(\omega',\omega',-\omega)=\frac{1}{\omega'}\psi\left(1,1,-\frac{\omega}{\omega'}\right);$$

on en conclut

$$\frac{\omega'}{\omega i}\psi\left(1, 1, \frac{\omega'}{\omega}\right) + \frac{\omega.i}{\omega'}\psi\left(1, 1, -\frac{\omega}{\omega'}\right) = \pm\frac{\pi}{2},$$

et si l'on pose

$$\frac{\omega'}{\omega i} = x,$$

x étant une variable complexe, susceptible de prendre toutes les valeurs dont la partie réelle n'est pas nulle; si l'on fait en outre

$$\chi(x) = \frac{2x}{\pi}\psi(1, 1, xi) + \frac{2}{\pi x}\psi\left(1, 1, \frac{i}{x}\right),$$

on aura une série

$$\chi(x) = \frac{2}{\pi}(x + x^{-1}) + \frac{2}{\pi}\sum_{\nu,\nu'}{}'\left[\frac{x}{(1 - 2\nu - 2\nu' x i)(2\nu + 2\nu' x i)^2} + \frac{x^{-1}}{(1 - 2\nu - 2\nu' x^{-1} i)(2\nu + 2\nu' x^{-1} i)^2}\right],$$

dont les termes *sont tous des fonctions rationnelles de x et qui aura la valeur*

$$+1 \quad \text{ou} \quad -1,$$

selon que la partie réelle de x sera positive ou négative.

Si, maintenant, dans le plan de la variable x, on prend une région X, à distance finie, telle aussi que, ni à l'intérieur, ni sur le contour, la partie réelle de x ne soit nulle, on peut montrer que la série précédente converge à l'intérieur de cette région inconditionnellement et uniformément.

Posons

$$w = 2\nu + 2\nu' x i,$$

en sorte que

$$\psi(1, 1, xi) = 1 + \sum_{\nu,\nu'}\frac{1}{(1 - w)w^2};$$

si l'on désigne par k la plus petite valeur que puisse prendre le module de la quantité

$$\varepsilon + \varepsilon'(\xi + \xi' i)i,$$

les variables ε, ε', ξ, ξ' étant réelles, les deux premières satisfai-

sant à la condition

$$\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 = 1,$$

et le point $\xi + \xi' i$ étant situé à l'intérieur ou sur le contour de X, k ne sera pas nul et l'on aura

$$|w| \geqq 2k\sqrt{\nu^2 + \nu'^2},$$
$$|1 - w| \geqq k\sqrt{(2\nu - 1)^2 + 4\nu'^2},$$

pour tout point x qui n'est pas en dehors de la région X; mais, pour tout nombre entier ν, on a

$$(2\nu - 1)^2 \geqq \nu^2, \quad (2\nu - 1)^2 + 4\nu'^2 \geqq \nu^2 + \nu'^2,$$

et par conséquent

$$\left| \frac{1}{(1 - w)\, w^2} \right| \leqq \frac{(\nu^2 + \nu'^2)^{-\frac{3}{2}}}{4k^2}.$$

Chaque terme de la série qui représente $\psi(1, 1, xi)$ a donc un module inférieur ou au plus égal au terme correspondant de la série

$$1 + \sum_{\nu, \nu'} \frac{(\nu^2 + \nu'^2)^{-\frac{3}{2}}}{4k^2},$$

dont la somme est finie : il est donc prouvé que la première série, pour les valeurs de x qui appartiennent à la région X, converge inconditionnellement et uniformément.

Mais, si la variable x reste dans X, la variable $\frac{1}{x}$ restera dans une région où, tant à l'intérieur que sur le contour, la partie réelle de $\frac{1}{x}$ ne peut être nulle. Par conséquent, pour le domaine considéré de la variable x, l'expression $\psi\left(1, 1, \frac{1}{x}\right)$ converge aussi uniformément et inconditionnellement : il en est donc de même de la série $\chi(x)$.

On peut encore remarquer que, puisque la série $\psi(1, 1, xi)$ converge uniformément, on peut y réunir en un seul les deux termes pour lesquels, ν ayant la même valeur, ν' a des valeurs op-

posées; on aura donc ainsi, en désignant par n un entier positif,

$$\psi(1, 1, xi)$$
$$= 1 + \sum_{\nu}' \frac{1}{4\nu^2(1 - 2\nu)} + \frac{1}{2}\sum_{n,\nu'} \left[\frac{(6\nu - 1)n^2x^2 - (2\nu - 1)\nu^2}{4n^2x^2 + (2\nu - 1)^2(n^2x^2 + \nu^2)^2}\right].$$

Les termes de cette série sont des fonctions rationnelles de x, à coefficients rationnels et qui ne deviennent infinis que pour des valeurs de x dont la partie réelle soit nulle. On peut mettre $\chi(x)$ sous la forme d'une somme semblable.

5. Soit maintenant x' une fonction rationnelle quelconque de x, et posons

$$\chi_1(x) = \chi(x');$$

$\chi_1(x)$ sera encore une somme d'une infinité de fonctions rationnelles de la variable x. Dans le plan de cette dernière quantité, les valeurs pour lesquelles la partie réelle de x' s'annule sont représentées par une courbe algébrique réelle qui partage le plan en plusieurs morceaux, tels que dans les uns la partie réelle de x' soit positive et qu'elle soit négative dans les autres. Dans les premiers $\chi_1(x)$ a partout la valeur $+1$, dans les autres la valeur -1.

Que l'on prenne, par exemple,

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$

où α, β, γ, δ désignent des constantes telles que $\alpha\delta - \beta\gamma$ ne soit pas nul, cette courbe sera, comme on sait, toujours un cercle (pourvu que l'on regarde une droite illimitée comme un cercle de rayon infini), et l'on peut déterminer α, β, γ, δ de façon que ce cercle soit un cercle donné et que la partie réelle de x' ait, en un point donné, un signe donné.

Soient maintenant $F_1(x)$, $F_2(x)$ deux fonctions uniformes de x avec un nombre fini de points singuliers; si l'on fait

$$\chi_1(x) = \chi\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right),$$

$$\mathfrak{f}_0(x) = \frac{F_1(x) + F_2(x)}{2}, \quad \mathfrak{f}_1(x) = \frac{F_1(x) - F_2(x)}{2},$$

l'expression

$$\mathfrak{F}_0(x) + \mathfrak{F}_1(x)\chi_1(x)$$

peut être mise sous la forme d'une série infinie dont les termes soient des fonctions rationnelles de x et représente la fonction $F_1(x)$ dans l'une des deux régions que le cercle détermine dans le plan des x, et la fonction $F_2(x)$ dans l'autre région.

Si, dans ce même plan de la variable x, on prend arbitrairement des cercles ou des droites illimitées

$$K', K'', \ldots, K^{(r)},$$

et que l'on détermine r fonctions linéaires de x

$$x', x'', \ldots, x^{(r)},$$

telles que la partie réelle de $x^{(\lambda)}$ s'annule sur la ligne $K^{(\lambda)}$, le plan sera partagé par les lignes en un certain nombre de portions telles que, dans chacune d'elles, la partie réelle d'une quelconque des fonctions $x^{(\lambda)}$ ait partout le même signe.

Soient ensuite

$$\mathfrak{F}_0(x), \quad \mathfrak{F}_1(x), \quad \ldots, \quad \mathfrak{F}_r(x)$$

des fonctions uniformes de x avec un nombre fini de points singuliers essentiels, et posons

$$\chi_\lambda(x) = \chi[x^{(\lambda)}] \quad (\lambda = 1, \ldots, r);$$

l'expression

$$\mathfrak{F}_0(x) + \mathfrak{F}_1(x)\chi_1(x) + \mathfrak{F}_2(x)\chi_2(x) + \ldots + \mathfrak{F}_r(x)\chi_r(x)$$

pourra être mise sous la forme d'une série infinie dont les termes soient des fonctions rationnelles de x, et cette série aura cette propriété que, à l'intérieur de chacune des portions dans lesquelles nous avons divisé le plan, elle représentera, il est vrai, une branche d'une fonction monogène, mais dans chaque portion différente, une branche d'une fonction différente.

Si, par exemple, $K', K'', \ldots, K^{(r)}$ sont des cercles dont aucun n'en renferme un autre, le plan se trouvera ainsi partagé en $r+1$ portions, et si la fonction $x^{(\lambda)}$ est déterminée de façon que sa

partie réelle soit positive au centre de $K^{(\lambda)}$ (¹), l'expression

$$F_{r+1}(x) + \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{r}[1+\chi_\lambda(x)][F_\lambda(x) - F_{r+1}(x)],$$

qui est de la même forme que la précédente, si $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_{r+1}(x)$ désignent des fonctions uniformes à nombre fini de points singuliers essentiels, représente une série de la nature de celles qui nous occupent ; car si x est à l'intérieur du cercle limité par $K^{(\lambda)}$, elle est égale à $F_\lambda(x)$, et lorsque x est extérieur à tous les cercles, elle est égale à $F_{r+1}(x)$; elle représente donc, dans chacune des $r+1$ portions qui composent le plan, une branche d'une fonction uniforme à nombre fini de points singuliers, choisie d'ailleurs d'une façon tout arbitraire.

On obtient un autre exemple en supposant que les cercles K', K'', ..., $K^{(r)}$ aient été pris de façon que les $r-1$ premiers soient contenus dans le dernier ; le plan est encore ainsi divisé en $r+1$ portions. L'expression

$$\frac{1}{2}[F_1(x) + F_{r+1}(x)] + \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{r}F_\lambda(x) - F_{\lambda+1}(x)]\,\chi_\lambda(x)$$

est égale dans ces différentes portions aux fonctions

$$F_1(x),\quad F_2(x),\quad \ldots,\quad F_{r+1}(x)$$

(un cas particulier est celui où l'on prend au lieu des r cercles r droites parallèles).

Si maintenant on exclut du plan de la variable x toutes les valeurs négatives (y compris zéro), il existe, comme on sait, des séries infinies, formées de fonctions rationnelles de x, qui représentent des branches uniformes (²) de certaines fonctions multi-

---

(¹) Si r_λ est le rayon du cercle $K^{(\lambda)}$ et a_λ la valeur de x au centre, on peut poser

$$x^{(\lambda)} = \frac{r_\lambda - a_\lambda + x}{r_\lambda + a_\lambda - x}.$$

(²) *Voyez*, dans les Tomes 66 et 67 du *Journal de Borchardt*, les Mémoires de M. Thomé sur les fractions continues de Gauss et les séries procédant suivant les fonctions sphériques.

formes comme $\log x$, x^m (où m est une constante quelconque) et qui convergent uniformément dans le voisinage de tout point autre que les points exclus. Or on peut prendre dans l'expression

$$F_0(x) + F_1(x)\chi_1(x) + \ldots + F_r(x)\chi_r(x),$$

pour $F_0(x)$, $F_1(x)$, ..., $F_r(x)$, des fonctions de cette dernière espèce; dans ce cas nous aurons une série infinie, dont les termes sont des fonctions rationnelles de x, et qui représente, dans chacune des portions dans lesquelles se divise le plan de la variable x par les lignes $K^{(\lambda)}$ et la droite des valeurs négatives de x, une branche uniforme d'une fonction monogène multiforme, mais en général, dans des portions différentes, des branches de fonctions différentes.

Ces exemples suffisent pour répondre comme il suit à la question posée à la fin du n° 3.

Si la région de convergence d'une série, dont les termes sont des fonctions rationnelles d'une variable x, peut être partagée en portions telles que la série converge uniformément dans le voisinage de chaque point situé dans l'intérieur de ces morceaux, cette série représente dans chacun de ces morceaux une branche uniforme d'une fonction monogène de x, mais elle ne représente pas nécessairement une même fonction dans les différents morceaux.

6. Dans mes Leçons sur les éléments de la théorie des fonctions, j'ai mis en évidence, dès le début, deux théorèmes qui ne s'accordent point avec les vues ordinaires, à savoir que :

I. — *Si une fonction d'une variable réelle est continue, on ne peut pas en conclure que, pour les diverses valeurs de la variable, elle ait une dérivée déterminée; encore moins peut-on en conclure qu'elle possède toujours une dérivée continue, au moins dans des intervalles définis.*

II. — *Si une fonction d'une variable complexe est définie pour une certaine région de cette dernière, il n'est pas toujours possible de la continuer au delà des limites de cette région : en d'autres termes, il existe des fonctions monogènes d'une variable ayant cette propriété, que les points du plan de la*

variable, pour lesquels elle ne peut être définie, ne sont pas seulement des points isolés, mais forment des lignes et des surfaces.

Comme il a été question, dans ce qui précède, de fonctions d'une variable complexe qui jouissent de cette dernière propriété, je profite de cette occasion pour indiquer un exemple facile à traiter d'une telle fonction.

Supposons que le rayon du cercle de convergence d'une série ordinaire procédant suivant les puissances entières de x

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu x^\nu$$

soit égal à 1, et que la série converge inconditionnellement et uniformément pour toutes les valeurs de x dont le module est égal à 1, en sorte que, t désignant une variable réelle, la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu e^{\nu t i}$$

soit une fonction continue de t.

Dans l'intérieur du cercle de convergence, prenons arbitrairement un point x_0 et transformons la série donnée en une série ordonnée suivant les puissances de $x - x_0$, $\mathfrak{P}(x - x_0)$. Si r_0 est le module de x_0, le rayon de convergence de la série $\mathfrak{P}(x - x_0)$ ne peut pas être inférieur à $1 - r_0$, mais peut lui être supérieur. Si l'on se trouve dans le dernier cas, une partie de la circonférence du cercle de convergence de la série donnée est située à l'intérieur du cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x - x_0)$, et si l'on pose

$$\frac{x_0}{r_0} = e^{t_0 i}, \quad x_t = e^{ti},$$

pour toutes les valeurs de t comprises entre deux limites déterminées $t_0 - \tau$, $t_0 + \tau$, on aura l'égalité

$$\sum_{0}^{\infty} A_\nu e^{\nu t i} = \mathfrak{P}(x_t - x_0);$$

maintenant $\mathfrak{P}(x - x_0)$, regardée comme une fonction de x, admet des dérivées de tous les ordres possibles; il en est de même pour la série $\mathfrak{P}(x_t - x_0)$ regardée comme une fonction de t, pour les valeurs de cette variable comprises entre $t_0 - \tau$ et $t_0 + \tau$. Il en résulte que si, dans un cas particulier, on peut démontrer que la fonction

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu e^{\nu t i}$$

ne possède dans aucun intervalle des dérivées de tous les ordres possibles, il faudra en conclure que le cercle de convergence de la série $\mathfrak{P}(x - x_0)$, et cela de quelque façon que l'on choisisse le point x_0, est toujours tout entier à l'intérieur du cercle de convergence de la série donnée, et que la fonction représentée par cette série ne peut pas être continuée au delà de ce cercle de convergence.

Soit maintenant a un nombre entier positif impair, b une quantité positive plus petite que 1 et soit $a_\nu = a^\nu$: la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b^\nu x^{a_\nu}$$

satisfait aux conditions précédemment imposées, mais j'ai démontré que la fonction

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b^\nu \cos a_\nu t,$$

tant que l'on a $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, n'a, pour aucune valeur de t, de quotient différentiel déterminé (¹). La fonction définie par la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b^\nu x^{a_\nu}$$

est donc, si ab est inférieur à $1 + \frac{3}{2}\pi$, une fonction qui ne peut pas être continuée au delà du cercle de convergence de la série, et elle

(¹) Cette démonstration, que j'avais communiquée par lettre à M. P. du Bois-Reymond, a été publiée par lui dans le Tome 79 du *Journal de Borchardt*.

n'existe que pour les valeurs de x dont le module ne dépasse pas l'unité.

Il est aisé de construire une infinité de séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de la variable qui jouissent de la même propriété que la précédente, et même de démontrer l'existence, pour une région arbitrairement limitée, de fonctions qui ne peuvent pas être continuées au delà de cette région; mais, à présent, je ne veux pas m'arrêter là-dessus.

Pour conclure, je ferai encore remarquer que des formes arithmétiques plus composées, à l'aide desquelles on peut exprimer des fonctions monogènes d'une ou de plusieurs variables, où des branches uniformes de telles fonctions donneraient lieu à des recherches analogues à celles que nous avons développées pour une forme simple et conduiraient à des résultats pareils.

M. Weierstrass a fait la communication suivante à l'Académie des Sciences de Berlin (¹).

Dans un Mémoire présenté à l'Académie le 12 août, et intitulé *Zur Functionen-Lehre*, j'ai formé une série infinie, dont les termes sont des fonctions rationnelles d'une variable x, et qui possède la propriété d'avoir pour valeur $+1$ ou -1, selon que la partie réelle de x est positive ou négative.

Bien que cette série soit assez simple par elle-même et convienne fort bien pour l'emploi que j'en ai fait, — elle sert à la démonstration du théorème principal énoncé au n° 5 du Mémoire cité, — sa déduction est pourtant un peu compliquée et exige la connaissance de plusieurs lemmes empruntés à la théorie des fonctions trigonométriques. Il m'a donc été fort intéressant d'apprendre par une lettre de M. J. Tannery, professeur suppléant à la Faculté des Sciences de Paris (qui a été aussi le traducteur (²) de mon Mémoire en français), qu'il existe d'autres séries, extrêmement simples, de la même forme que la mienne, qui possèdent aussi

(¹) *Monatsbericht,* février 1881.

(²) Qu'il me soit permis de remercier ici l'illustre géomètre, qui a bien voulu prendre la peine de revoir cette traduction. J. T.

la propriété en question et peuvent non seulement servir tout aussi bien pour le but proposé, mais sont encore préférables en ce que leur déduction et la démonstration de leur propriété caractéristique ne s'appuient que sur des lemmes tout à fait élémentaires de la théorie des fonctions.

Je me permets d'emprunter ce qui suit à la lettre de M. Tannery.

« Prenons une série de nombres entiers positifs

$$m_0, \quad m_1, \quad m_2, \quad \ldots,$$

assujettis à la condition

$$\lim_{n=\infty} m_n = \infty,$$

on a alors

$$\lim \frac{1+x^{m_n}}{1-x^{m_n}} = \begin{cases} +1 \text{ si } |x| < 1, \\ -1 \text{ si } |x| > 1; \end{cases}$$

mais on a

$$\frac{1+x^{m_n}}{1-x^{m_n}} = \frac{1+x^{m_0}}{1-x^{m_0}} + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \left[\frac{1+x^{m_\nu}}{1-x^{m_\nu}} - \frac{1+x^{m_{\nu-1}}}{1-x^{m_{\nu-1}}}\right]$$

$$= \frac{1+x^{m_0}}{1-x^{m_0}} + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{2x^{m_{\nu-1}}(x^{m_\nu - m_{\nu-1}} - 1)}{(x^{m_\nu} - 1)(x^{m_{\nu-1}} - 1)}.$$

Par conséquent, si l'on pose

$$\psi(x) = \frac{1+x^{m_0}}{1-x^{m_0}} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{2x^{m_{\nu-1}}(x^{m_\nu - m_{\nu-1}} - 1)}{(x^{m_\nu} - 1)(x^{m_{\nu-1}} - 1)},$$

la série du second membre de cette équation sera convergente pour chaque valeur de x dont le module est différent de 1 et aura pour valeur $+1$ ou -1, selon que le module de x sera inférieur ou supérieur à l'unité.

» Si l'on pose dans l'expression précédente

$$m_\nu = 2^\nu,$$

cette expression prend une forme extrêmement simple

$$\psi(x) = \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2x^2}{x^4-1} + \frac{2x^4}{x^8-1} + \ldots »$$

A ceci j'ajouterai encore ce qui suit :

On voit facilement que la série de M. Tannery converge uniformément dans le voisinage de chaque valeur de x dont le module est différent de 1.

Soit de plus x' une fonction rationnelle de x ; les valeurs de cette dernière quantité, pour lesquelles les valeurs correspondantes de x' ont un module égal à 1, seront représentées dans le plan de x par une courbe algébrique, qui partage ce plan en plusieurs portions, de manière que, dans quelques-unes d'entre elles, le module de x' sera supérieur, dans les autres sera inférieur à 1.

Aussi, en posant

$$\psi(x') = \chi_1(x),$$

$\chi_1(x)$ représentera une expression de la même nature que celle désignée de la même manière au commencement du n° 5 de mon Mémoire cité. Si l'on prend en particulier

$$x' = \frac{1+x}{1-x},$$

on obtient une expression qui, à l'égal de celle que j'ai désignée par $\chi(x)$, a pour valeur $+1$ ou -1, selon que la partie réelle de x est positive ou négative.

SUR L'INFINITÉ DE LA SUITE DES NOMBRES PREMIERS ;

PAR M. JOSEPH PEROTT.

Considérons la suite des nombres naturels

$$(1) \qquad 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ N,$$

et désignons par le symbole $\theta(N)$ le nombre qui indique combien il y a de nombres dans cette suite qui ne sont divisibles par aucun carré ; nous aurons

$$\theta(N) > N - \sum_{k=1}^{k=n} E\left(\frac{N}{p_k^2}\right),$$

$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ désignant les nombres premiers de la suite (1).

A plus forte raison,

$$\theta(N) > N\left(1 - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{p_k^2}\right) > N\left(2 - \frac{\pi^2}{6}\right) > \frac{1}{3}N.$$

Or, tous les nombres *sans facteur quadratique* de la suite (1) seront nécessairement de la forme

$$p_1^{t_1} p_2^{t_2} p_3^{t_3} \ldots p_n^{t_n} \quad (t_s = 0, 1),$$

et ils seront, par conséquent, au nombre de 2^n.

Donc

$$2^n > \frac{1}{3}N,$$

et

$$N > n > \log\,\text{acoust}\,\frac{1}{3}N,$$

ce qui prouve que, la possibilité de continuer la suite des nombres naturels persistant toujours, le nombre des nombres premiers de cette suite pourra devenir aussi grand qu'on voudra.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

SEYDLER (Dr A.), soukr. docent fysiky na C. K. Universitě Karlo-Ferdinandské, adjunkt na C. K. Hvězdárně Pražské, mimořádný člen Král. České společnosti nauk. — ZÁKLADOVÉ THEORETICKÉ FYSIKY. DÍL PRVNÍ. VŠEOBECNÝ ÚVOD A MECHANIKA. — THEORETICKÁ MECHANIKA PRO VYSOKÉ ŠKOLY. — V Praze, 1880. In-8°, 400 pages (¹).

(Analyse rédigée par l'auteur.)

La Mécanique étant la science du *mouvement* des *masses* causé par des *forces*, on peut étudier séparément :

1° Le mouvement, ce qui est l'objet de la *Cinématique;*

2° Les masses dans leurs relations purement géométriques, les autres relations se rapportant à d'autres parties de la Physique générale ; elles font l'objet de la *Géométrie des masses;*

3° Les forces, aussi dans leurs relations purement géométriques, ce qui conduit à la *Géométrie des forces,* qu'il ne faut pas confondre avec la Statique, comme on le fait ordinairement.

Après cette triple étude, que l'on peut considérer comme préparatoire, on peut se proposer, deux des trois éléments étant connus, de déterminer le troisième : par exemple, de trouver les forces nécessaires pour imprimer à des masses données un mouvement donné. L'étude de cette question, abstraction faite de toute particularisation des masses et des forces, est l'objet de la *Mécanique générale.* Cette dernière, par des raisons plutôt pratiques et historiques que tirées de la nature du sujet, se divise en :

4° Statique ;

5° Dynamique (ces deux mots étant pris dans leur acception ordinaire).

L'étude des forces spéciales fera l'objet des deux Volumes suivants. On peut partager ces forces en deux groupes distincts : celui

(¹) SEYDLER (A.), privat-docent de Physique à l'Université I. et R. de Charles-Ferdinand, adjoint à l'Observatoire I. et R. de Prague, membre extraordinaire de la Société royale des Sciences de Bohême. — *Éléments de Physique théorique.* Ire Partie : *Introduction générale et Mécanique. Mécanique théorique pour les écoles supérieures.* Prague, 1880.

des forces naturelles, comme la gravitation, agissant à des distances quelconques, et celui des forces agissant seulement à des distances très-petites et produisant le plus souvent des mouvements vibratoires. D'après cela, la Physique mécanique comprendra, outre la Mécanique générale, deux autres parties, embrassant l'une les phénomènes de la gravitation, du magnétisme, de l'électricité, l'autre les phénomènes dus aux actions intermoléculaires dans les masses, lesquels sont surtout des phénomènes vibratoires (Acoustique, Optique et théorie de la chaleur). L'auteur considère cette division comme la plus rationnelle, malgré les objections qu'elle peut soulever, la Science (s'il est permis d'employer cette comparaison) n'étant pas un espace à une dimension, comme l'est l'exposition qu'on en peut faire, mais bien un espace à n dimensions, n étant un nombre inconnu, mais très grand.

Après ces remarques générales, nous passons à l'indication détaillée du contenu de la Table des matières.

LIVRE I. — Introduction générale.

A. *L'Analyse et la Géométrie dans la Physique* (§§ 1-3).

Le but unique de ce Chapitre est d'indiquer au lecteur les parties de ces deux branches des Mathématiques qui sont les plus importantes dans l'étude de la Physique théorique.

B. *Sur la réduction des résultats de l'observation* (§§ 6-14).

Exposé des méthodes qui servent à donner aux résultats de l'observation la forme la plus convenable pour leur étude ultérieure. Séries trigonométriques, interpolation, méthode des moindres carrés.

Ce Livre n'est pas lié organiquement aux Livres suivants; l'auteur a toutefois jugé nécessaire de le mettre en tête de son Ouvrage, pour orienter le lecteur (A) et pour suppléer à l'absence d'Ouvrages traitant ces matières dans le pays où il écrit.

LIVRE II. — Cinématique.

A. *Notions fondamentales.*

§§ 15-16. Du mouvement relativement 1° à l'espace, 2° au temps.
§ 17. Mouvements simples (translation, rotation).
§ 18. Mouvements équivalents.
§ 19. Équivalence de deux translations.
§ 20. Équivalence d'une translation et d'une rotation.
§ 21. Équivalence de deux rotations.
§ 22. Équivalence des mouvements infiniment petits.

L'auteur fait usage du signe ≏, introduit dans la Science par Bellavitis pour exprimer l'équivalence (*équipollence*) géométrique.

Notices bibliographiques, page 61.

B. *Mouvement d'un point.*

§ 23. Notions fondamentales. Vitesse du point.
§ 24. Problèmes relatifs à la vitesse.
§ 25. Accélération.
§ 26. Notions qui se rattachent à celle de l'accélération.
§§ 27-28. Problèmes relatifs à l'accélération. Mouvement rectiligne. Mouvement curviligne.
§§ 29-30. Exemples du mouvement curviligne. Mouvement central.
§§ 31-32. Mouvement sur une courbe ou sur une surface donnée.
§ 33. Accélérations du deuxième, du troisième, ... ordre (suraccélération, suivant Resal).

L'auteur a eu soin, dans le Chapitre B et dans les suivants, d'attirer l'attention du lecteur sur les nombreux exemples classiques qui se rapportent à l'étude du mouvement d'un point, et que l'on rencontre dans les Œuvres de Newton, d'Euler, etc.

C. *Mouvement d'un système plan.*

D. *Mouvement d'un système ayant un point fixe.*

E. *Mouvement d'un système dans le cas général.*

Ces trois Chapitres, qui embrassent l'analyse du mouvement de tous les systèmes *invariables* (purement géométriques), sont disposés d'une manière tout à fait symétrique. Chacun d'eux contient :

(*a*) Mouvement relativement à l'espace seul, sans égard au temps employé pour l'effectuer (§§ 34, 38, 42);

(*b*) La vitesse dans le mouvement (§§ 35, 39, 43);

(*c*) L'accélération (§§ 36, 40, 44);

(*d*) Exemples et exercices.

§ 46. Sur les degrés de liberté dans le mouvement d'un système. — Il m'a paru important de développer les notions fondamentales relatives au nombre des conditions auxquelles un système est assujetti. La plupart des Traités présentent à cet égard une lacune, qui, *pour les commençants,* peut devenir la source de nombreuses erreurs.

F. *Mouvement relatif.*

§ 47. Notions fondamentales.

§ 48. Accélération dans le mouvement relatif.

§ 49. Exemples. Mouvement relatif, à la surface de la Terre.

G. *Théorie de la déformation.*

§ 50. Notions fondamentales.

§ 51. Étude analytique de la déformation.

§ 52. Dilatation de la longueur, de l'aire et du volume.

§ 53. Déformation simple et déformation dans le cas général.

§ 54. Axes de déplacement et axes de déformation. J'appelle *axe de déplacement* toute droite qui conserve, pendant la déformation, la même direction; les axes de déformation sont, d'après le langage adopté, les axes principaux de l'ellipsoïde de déformation.

§ 55. Notices historiques et bibliographiques. — Ces Notes, relatives à la Cinématique tout entière, ont pour but d'indiquer au lecteur les sources concernant les théorèmes les plus intéressants. Elles n'ont d'autre prétention que d'orienter le lecteur sur le terrain de la Cinématique, sous forme de Notes aphoristiques; mais je n'ai pas cherché à en faire un abrégé, si concis qu'il soit, de l'histoire de la Science. Cette même remarque s'applique aussi à toutes les Notes analogues placées à la fin de chaque Livre.

LIVRE III. — GÉOMÉTRIE DES MASSES.

A. *Notions fondamentales.*

§ 56. La masse comme quantité. — On arrive à la définition

abstraite, donnée par Cauchy, de la masse comme *quantité de matière*. Malheureusement, dans la langue tchèque, le mot *hmota* signifie à la fois *masse* et *matière*. Quant au terme *Géométrie des masses*, je l'ai trouvé pour la première fois dans un Mémoire de Haton de la Goupillière (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXVII[e] Cahier, 1857). Comme l'idée d'une branche de la Mécanique traitant des relations géométriques de la masse et coordonnée avec la Cinématique est beaucoup plus ancienne, je soupçonne que ma connaissance imparfaite de la Bibliographie ne m'a pas permis de remonter à la vraie origine de cette expression.

§ 57. La densité comme quantité. Calcul de la masse.

§ 58. L'équation de continuité de la masse.

§ 59. Théorème de Green.

§ 60. Moments des masses. — J'appelle *moment d'une masse de $n^{\text{ième}}$ degré relativement à un point, à un axe ou à un plan* l'intégrale $\int \rho^n dm$, ρ étant la distance de l'élément dm au point, à l'axe ou au plan. On pourrait désigner ces divers moments par les mots *moment polaire, axial ou planaire*. Ces notions sont l'extension des notions des divers moments, introduites par Somof dans sa *Раціональная Механика*.

B. *Le centre des masses* (centre de gravité).

§ 61. Moments planaires du premier degré.

§ 62. Propriétés principales du centre de gravité.

§ 63. Détermination du centre des masses à l'aide de la Géométrie.

§ 64. Détermination du centre des masses à l'aide du calcul.

C. *Moments d'inertie*.

§§ 65-66. Moments axiaux du second degré. Moments principaux d'inertie.

§ 67. Calcul des moments d'inertie.

§ 68. Notes historiques et bibliographiques.

LIVRE IV. — GÉOMÉTRIE DES FORCES.

A. *Notions fondamentales*.

§§ 69-70. Développement *empirique* ou *historique* de la notion

de force. Les lois du mouvement de Newton. Unité convenable. Deux éléments dans l'idée de force. Diverses classes de forces.

§ 71. Développement *théorique* de la notion de la force.

Dans ces trois paragraphes, j'ai cherché à éclaircir l'idée, si difficile à concevoir, de la force, de manière à rapprocher autant que possible la définition purement empirique de la force et sa définition théorique.

§ 72. Objet de la Géométrie des forces. — Ce paragraphe, très important au point de vue de mon Ouvrage et de la classification que j'y ai adoptée, donne les raisons qui m'ont porté à séparer la Géométrie des forces de la Statique. *Le but principal de la première branche de la Mécanique est de trouver tous les systèmes de forces équivalents à un système donné, et surtout de trouver le système équivalent le plus simple.* La recherche de l'équivalence des forces, tout à fait semblable à celle de l'équivalence des mouvements, est donc l'objet de la Géométrie des forces, et cette recherche est aussi nécessaire pour la Dynamique que pour la Statique. La raison qui a empêché jusqu'à présent la séparation de la Géométrie des masses et de la Statique, dans laquelle on l'introduit en la dissimulant, bien qu'on soit forcé d'en exposer les principes avant ceux de la Statique proprement dite, est, pour ainsi dire, accidentelle. Il y a bien des questions de Statique dont on trouve la solution à l'instant même où l'on a terminé le travail *préparatoire*, c'est-à-dire la réduction des forces au système le plus simple, d'après les principes de la *Géométrie des forces*, et il est vrai que cette circonstance ne se produit jamais dans la Dynamique. Mais la même chose arrive très souvent dans la Dynamique quand on a terminé un autre travail préparatoire, savoir la discussion d'un certain problème de Cinématique. Conclura-t-on de là qu'il faille refuser à l'une des deux premières branches, la Géométrie des forces et la Statique, une existence indépendante, et que ce soit la Statique qui doive être rayée, et admettra-t-on qu'il faille en faire autant pour la Dynamique, en la considérant comme une simple combinaison de la Cinématique, de la Géométrie des masses et de la Géométrie des forces? Mais la supposition même que la Statique et la Dynamique ne seraient que des branches accessoires de la Mécanique et que la solution de chaque problème de Mécanique pourrait s'effectuer par les seuls principes des trois premières branches de cette science

n'est pas admissible. On le voit immédiatement pour la Dynamique; car la manière de combiner les résultats trouvés dans les branches préparatoires de la Mécanique pour résoudre un problème donné dépend de la nature du problème, et il y a une foule de théorèmes relatifs à cette combinaison, théorèmes qui sont propres à la Dynamique et tout à fait indépendants des théorèmes tirés des autres branches de la Mécanique. Mais cette même remarque a lieu aussi pour la Statique. Si nous cherchons la courbe formée par un fil flexible soumis à certaines forces, il ne suffit pas de chercher le système de forces équivalent au système donné et en même temps le plus simple; il faut employer certains théorèmes appartenant à la Statique proprement dite. La *Géométrie des forces* ne rend donc pas superflue cette autre branche de la Mécanique appelée *Statique;* mais, d'autre part, elle n'en constitue pas une partie, étant plutôt coordonnée avec la Cinématique et la Géométrie des masses. Si l'on considérait l'ensemble des matières traitées dans la Géométrie des forces et dans la Statique comme trop restreint pour former deux branches de la Mécanique indépendantes, c'est plutôt la Statique, *subordonnée à la Dynamique,* que l'on devait faire rentrer dans celle-ci, dont, à la rigueur, elle ne forme qu'un cas particulier, bien que très important.

Remarquons la belle symétrie de la division de la Mécanique que nous proposons. La Géométrie des masses en est comme le vestibule, cette partie pouvant être traitée la première, comme étant la plus simple. La Cinématique et la Géométrie des forces, qui offrent tant d'analogie et qui fournissent deux systèmes de théorèmes tout à fait semblables, comme l'a remarqué Poinsot, sont les deux ailes de l'édifice. La Dynamique en forme l'étage supérieur, dont une partie, reposant sur la Géométrie des forces, représente la Statique. Qu'on nous pardonne d'avoir risqué cette image, dont l'idée nous a été suggérée surtout par la grande affinité entre la Cinématique et la Géométrie des forces, affinité que l'on chercherait vainement dans la Statique proprement dite.

§ 73. Notions de la force vive et du travail.

B. *Équivalence des forces.*

§ 74. Théorèmes auxiliaires sur l'équivalence des forces.

§ 75. Forces agissant sur un point (avec une nouvelle démonstration du parallélogramme des forces).

§ 76. Forces agissant suivant une même droite.

§ 77. Forces parallèles dans le plan. Couple de forces.

§§ 78-79. Couples dans des plans parallèles. Couples dans l'espace.

§ 80. Forces dans un plan.

§ 81. Forces dans l'espace. Premier théorème fondamental sur l'équivalence des forces (équivalence d'un système quelconque de forces à une force résultante et un couple résultant).

§ 82. Forces dans l'espace. Second théorème fondamental sur l'équivalence des forces (équivalence d'un système quelconque de forces à deux forces, représentées par deux arêtes opposées d'un tétraèdre de volume constant).

§ 83. Travail de forces équivalentes.— Ce paragraphe contient l'important théorème, source commune du principe des vitesses virtuelles et du principe de d'Alembert, que *le travail élémentaire de tous les systèmes de forces équivalents est une quantité de grandeur constante.*

LIVRE V. — STATIQUE.

A. *Problèmes de la Statique.*

§ 84. Objet de la Statique. — Restriction de la Statique générale aux problèmes dans lesquels on peut supposer l'indestructibilité et l'impénétrabilité de la matière. Autre restriction, imposée seulement par des raisons pratiques, pour ne pas trop étendre le domaine de la Statique générale, et conservant les seuls problèmes où l'on n'est pas forcé de définir par des conditions spéciales la matière dont on étudie l'état d'équilibre. Cette dernière restriction permet d'éliminer de la Statique générale la théorie de l'élasticité, l'Hydrostatique et l'Aérostatique.

§ 85. Équilibre des forces agissant sur un point.

§ 86. Équilibre des forces agissant sur un système (invariable) libre.

§ 87. Équilibre d'un système (invariable) soumis à certaines conditions.

§ 88. Équilibre des forces agissant sur un système variable. Fils et chaînes.

§ 89. Suite. Courbes formées par des fils en équilibre.

B. *Principes de la Statique.*

§ 90. Principe des vitesses virtuelles.

§ 91. Étude analytique de ce principe. Exemples.

§ 92. Diverses démonstrations de ce principe.

§ 93. Propriétés de maximum et de minimum de l'équilibre. Principes statico-dynamiques.

Les principes de la *conservation du mouvement du centre de gravité* et de la *conservation des aires* sont, à vrai dire, des principes appartenant à la science de l'équilibre, bien qu'ils se démontrent ordinairement dans la Dynamique. J'ai cru devoir fixer l'attention du lecteur sur cette circonstance, bien que j'aie renvoyé cependant à la Dynamique la démonstration de ces principes.

§ 94. Notes historiques et bibliographiques.

LIVRE VI. — DYNAMIQUE.

A. *Problèmes de la Dynamique.*

§ 95. Objet de la Dynamique. — Mêmes restrictions que pour la Statique.

§ 96. Mouvement de translation d'un système matériel.

§ 97. Mouvement de rotation d'un système matériel.

§ 98. Suite. L'ellipsoïde central.

§ 99. Mouvement général d'un système matériel. Réduction des forces instantanées.

§ 100. Suite. Réduction des forces accélératrices.

Les §§ 96-100 traitent de la recherche des *forces* qui peuvent produire un *mouvement donné;* les §§ suivants 101-104 sont consacrés au problème inverse : *Trouver le mouvement produit par des forces données.*

§§ 101-102. Mouvements de translation et de rotation produits par des forces instantanées.

§§ 103-104. Mouvement produit par des forces accélératrices

1° sur un système libre, 2° sur un système assujetti à certaines conditions.

B. *Principes de la Dynamique.*

§ 105. Principe de d'Alembert.

§ 106. Principe du mouvement et de la conservation du mouvement du centre de gravité.

§ 107. Principe des aires et de la conservation des aires.

§ 108. Principe des forces vives.

§ 109. Autres principes de la Dynamique (principes de Gauss, de Hamilton, de la moindre action).

§ 110. Principes de la Mécanique et principes de la Physique.

Les principes de la Mécanique sont des théorèmes abstraits : les uns sont des propositions *axiomatiques*, qui deviennent évidentes quand on a donné une définition rigoureuse pour chaque notion contenue dans la proposition; les autres sont des théorèmes généraux, résultats embrassant un grand nombre de cas spéciaux et qui exigent une démonstration pour être acceptés. A chaque principe de Dynamique correspond un principe de Physique; c'est toujours un résultat de l'expérience et de l'induction qui nous apprend que nous pouvons appliquer tel ou tel théorème de Mécanique abstraite à l'explication des phénomènes naturels. Par exemple, le *principe d'inertie* est une proposition axiomatique, quand nous définissons la force comme la cause de tout changement de vitesse, la cause de l'accélération; il devient un principe physique, un résultat de l'induction, qui jusqu'à présent nous en a confirmé la vérité, quand nous appelons *force* un ensemble de circonstances extérieures, par exemple la présence de la Terre vis-à-vis de la masse en mouvement; il nous dit que de telles circonstances ne sont pas, *d'après notre expérience*, nécessaires pour maintenir le mouvement uniforme, non accompagné d'un changement de vitesse. Le présent paragraphe forme, pour ainsi dire, le pont servant à passer de la Mécanique abstraite à la Mécanique concrète, c'est-à-dire à la Physique mécanique, qui étudie les divers cas concrets de mouvement dans l'univers.

§ 111. Notes historiques et bibliographiques.

MÉLANGES.

HERMITIO ZELLERUS.

Vir doctissime, summe venerande,

Cessantibus, quas expectaveram, literis Scheringii, trado tibi quæ conscripsi de numeris Bernoullicis, legenda, recensenda et si placet publicanda, eo de quo scribis modo; ita tamen, ut præferrem editionem latinam.

Superioribus addere possum formulas quasdam, in quas incidi continuando reductiones § 14.

Sit

$$K_1 = \frac{1}{x+1} \quad (x = 1, 2, 3 \ldots),$$

$$K_2 = x\Delta \frac{1}{x+1} = x\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)+1}\right) = \frac{x}{(x+1)(x+2)},$$

$$K_3 = x\Delta \frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{x}{(x+1)(x+2)} - \frac{x}{(x+1+1)(x+1+2)}$$

$$= \frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)(x+3)},$$

$$K_4 = x\Delta \frac{x(x-1)}{(x+1)\ldots(x+3)} = \frac{x^2(x-5)}{(x+1)(x+2)\ldots(x+4)},$$

$$K_5 = x\Delta \frac{x^2(x-5)}{(x+1)\ldots(x+4)} = \frac{(x-1)(x^2-15x-4)}{(x+1)\ldots(x+5)},$$

$$K_6 = x\Delta \frac{(x-1)(x^2-15x-4)}{(x+1)\ldots(x+5)} = \frac{x(x^3-42x^2+119x+42)}{(x+1)\ldots(x+6)},$$

et sic porro, ita ut quisque terminus ex præcedente manet per simplicem legem differentiarum; tum, posito valore $x = 1$, abeunt hi termini in numeros Bernoullii; est scilicet:

$$K_1 = \frac{1}{2} = B_1, \qquad K_2 = \frac{1}{2.3} = B_2, \quad K_3 = 0 = B_3,$$

$$K_4 = -\frac{1}{30} = B_4, \quad K_5 = 0 = B_5, \qquad K_6 = \frac{1}{42} = B_6, \ldots$$

At, crescentibus potestatibus valoris x, hæ quoque expressiones fiunt prolixiores, ut computum parum juvent, nisi forte calculus differentialis ulteriora præbeat subsidia; qua de re, si tuam sententiam mihi communicare digneris, delectamento mihi erit. Perge favere

Tui observantissimo
CHR. ZELLER, Sem. Real.

Markgrœningen, 2 nov. 1880.

DE NUMERIS BERNOULLII EORUMQUE COMPOSITIONE EX NUMERIS INTEGRIS ET RECIPROCIS PRIMIS;

SCRIPSIT CHR. ZELLERUS Marcagrœningensis.

1. Dicti numeri, quamvis sint finiti et rationales, laborare videntur quadam inconcinnitatis specie; quæ ut diffunderetur, Moivræus, Eulerus et alii prospero successu contenderunt. Eundem ipsum finem nostra spectat commentatio monstratura, quomodo componantur ex differentiis potentiarum et coefficientibus binomii reciprocis, vel omnino ex ejusmodi differentiis et numeris reciprocis.

2. Ordimur a theoremate generali ad summas serierum finitarum pertinente, quod idem alibi [1] protulimus.

Locum habet in seriebus hujusce formæ

$$M = \alpha a + \beta b + \gamma c + \ldots + \lambda l.$$

Dirimendo factores singulorum terminorum in duplicem seriem

$$\begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma & \ldots & \lambda \\ a & b & c & \ldots & l, \end{matrix}$$

et sumendo alterius summas

$$\Sigma_1 = \alpha, \quad \alpha + \beta, \quad \alpha + \beta + \gamma, \quad \ldots, \quad \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda,$$

---

[1] *Goettinger Gelehrte Anzeigen*, 1879, p. 361.

4. *Exemplum.* — Sit

$$S(n^m) = S(6^3) = 6^3 + 5^3 + 4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3$$

series differentiarum

	216	125	64	27	8	1
$\Delta_1\ldots$	91	61	37	19	7	1
$\Delta_2\ldots$	30	24	18	12	6	1
$\Delta_3\ldots$	6	6	6	6	5	1
$\Delta_4\ldots$	0	0	0	1	4	1

Redactæ sunt differentiæ ad tres terminos, ad quos definiendos tres extremæ potestates suffecissent.

Series summarum

	1	1	1	1	1	1
$\Sigma_1\ldots$	1	2	3	4	5	6
$\Sigma_2\ldots$	1	3	6	10	15	21
$\Sigma_3\ldots$	1	4	10	20	35	56
$\Sigma_4\ldots$	1	5	15	35	70	126

conjungendo cum hac quarta serie summatoria quartam differentialem, habebis

$$S(6^3) = \Delta_4.\Sigma_4 = 1.35 + 4.70 + 1.126 = 441.$$

5. Termini summatorii cum nihil sint, nisi numeri figurati, etiam sine additione ex formulis obtinentur: e. g. numerus n^{tus} seriei Σ_4 par est

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}, \quad 126 = \frac{6.7.8.9}{1.2.3.4},$$

sive, quod idem est, = quarto coefficienti binomiali potestatis $n+3$, i. e. $= (n+3)_4$.

Etiam termini differentiales, id quod infra uberius elucescet, per formulas derivari possunt ex antecedentibus, scilicet per formulam binomialem, ita ut, ex. g.,

Termini primi seriei Δ_2 oriantur ex schemate $a - 2b + c$,

» in Δ_3 » $a - 3b + 3c - d$,

» in Δ_4 » $a - 4b + 6c - 4d + e$.

et sic porro; vel positis numeris:

$$30 \text{ in tabula præcedente est } = 6^3 - 2.5^3 + 4^3,$$
$$\text{»} \quad 6 = 6^3 - 3.5^3 + 3.4^3 - 3^3$$
$$= 5^3 - 3.4^3 + 3.3^3 - 1.2^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

6. Pro corollario addi potest tabulas summarum et differentiarum etiam per diagonales obliqua directione sibi respondere.

Conjungendo diagonalem tabulæ differentiarum...............	1	7	12	6
cum diagonali alterius tabulæ..	1	5	10	10
habebis.......	$1 + 35 + 120 + 60 = 216 = 6^3$,			

atque

subjungendo eidem diagonali	1	7	12	6
subsequentem tabulæ alterius	6	15	20	16
prodit.......	$6 + 105 + 240 + 90 = 441 = S(6^3)$.			

Termini inferiores hic sunt ex coefficientibus binomialibus ejusdem potestatis, et omnis hic calculus convenit cum usitato modo differentiandi et cum formula

$$S_n = n.a^1 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^1 a^1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^2 a^1 + \ldots.$$

7. *Regula generalis.* — Ex dictis patebit, ad inveniendam summam potestatum m numerorum naturalium :

1° Derivandos esse ex potestatibus numerorum $1, 2, \ldots, m$ seriem $(m+1)^{am}$ differentialem, vel istos m terminos ad quos reducitur; eosque

2° Multiplicandos esse cum m extremis terminis summatoriis, sive cum totidem numeris figuratis ejusdem ordinis, qui idem $(m+1)^{os}$ coefficientes binomii repræsentant potestatum $(n+m)$, $(n+m-1)$, ..., usque ad $(n-1)$.

3° m producta resultantia æquiparant summam quæsitam $S(n^m)$, quæ eadem secundum præcedens corollarium par est summæ m productorum ex numeris obliquo ordine per diagonales signatis.

8. Ad calculum facilius instituendum adjumento est tabula differentias extremas potentiarum continens. Habemus pro exponente

$m = 2$,	2^2	1^2	$m = 3$,	27	8	1	$m = 4$,	256	81	16	1, etc.
Δ_1	3	1	Δ_1	19	7	1	Δ_1	175	65	15	1
Δ_2	2	1	Δ_2	12	6	1	Δ_2	110	50	14	1
Δ_3	1	1	Δ_3	6	5	1	Δ_3	60	36	13	1
....			Δ_4	1	4	1	Δ_4	24	23	12	1
....			....				Δ_5	1	11	11	1
....			....				....				

vel si postremæ tantum consignentur differentiæ,

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
$m = 2\ldots$	1	1					
$m = 3\ldots$	1	4	1				
$m = 4\ldots$	1	11	11	1			
$m = 5\ldots$	1	26	66	26	1		
$m = 6\ldots$	1	57	302	302	57	1	
$m = 7\ldots$	1	120	1191	2416	1191	120	1

quam tabulam facili negotio continuare poteris, animadvertens legem progressionis vel recursionis, ita comparatam, ut quisque terminus t producatur ex supra apposito a eumque præcedente b per formulam

$$t = ax + by,$$

significante x indicem columnæ verticalis t ab initio, y eundem a tergo, inverso ordine, numeratum, e. g.:

$$120 = 2.57 + 6.1,$$
$$1191 = 3.302 + 5.57 \ldots.$$

Ope hujus tabulæ comparatæ cum tabula numerorum figuratorum omnes summæ potestatum numerorum naturalium facile definiri poterunt.

Est, ex. gr.,

$S(10^6)$, i.e. summa potestatum sextarum 1^6 usque ad 10^6,

$$= 1.(11)_7 + 57.(12)_7 + 302.(13)_7 + 302.(14)_7 + 57(15)_7 + 1.(16)_7,$$

designante parenthesi $(16)_7$ coefficientem binomii

$$\frac{16.15.14.13.12.11.10}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}, \text{ etc.}$$

Simili modo ad obtinendam summam $S(n^x)$ opus erit coefficientibus $(n+1)_x$, $(n+2)_x$, ..., $(n+x)_x$.

9. Ejusmodi coefficientes binomiales sive numeri figurati cum oriantur ex multiplicatione numerorum $n+1$, n, $n-1$ et similium, functiones sunt numeri n et ordinari poterunt secundum potestates ejus numeri, quo facto ratio patebit, quæ intercedit inter terminos nostros et numeros Bernoullii.

Scilicet: computanti ope numerorum Bernoullii summam $S(n^6)$ se præbet æquatio

$$\begin{aligned} &n^{6+1} - 2n^6 B_1 + 21 n^5 B_2 - 35 n^4 B_3 + 35 n^3 B_4 - 21 n^2 B_5 + 7 n B_6 \\ &\quad = (6+1) S(n^6) \ (^1), \end{aligned}$$

ubi litteræ B paris indicis cum numeris Bernoullii conveniunt, imparis indicis, præter B_1, evanescunt.

Coefficiens primæ potestatis n^1, i.e. B_6, secundum notissimum illud de coefficientibus theorema par erit coefficienti primæ potestatis numeri n ex superiore expositione et numeris figuratis obtinendo.

Habebamus

$$\begin{aligned} S(n^6) = &\ \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-5)}{7!} \times 1 \\ &+ \frac{(n+2)(n+1)\dots(n-4)}{7!} \times 57 \\ &+ \frac{(n+3)(n+2)\dots(n-3)}{7!} \times 302 \\ &+ \frac{(n+4)(n+3)\dots(n-2)}{7!} \times 302 \\ &+ \frac{(n+5)(n+4)\dots(n-1)}{7!} \times 57 \\ &+ \frac{(n+6)(n+5)\dots n}{7!} \times 1. \end{aligned}$$

---

(1) Cf. *Meier Hirsch*, ed. Bertram, p. 87.

Seligendo coefficientem potestatis n^1 obtinetur

$$-\frac{5!}{7!}\cdot 1+\frac{2!4!}{7!}\cdot 57-\frac{3!3!}{7!}\cdot 302+\frac{4!2!}{7!}\cdot 302-\frac{5!}{7!}\cdot 57+\frac{6!}{7!}\cdot 1,$$

vel inverso ordine

$$\frac{1}{7}\left(1-\frac{5!}{6!}\cdot 57+\frac{4!2!}{6!}\cdot 302-\frac{3!3!}{6!}\cdot 302+\frac{2!4!}{6!}\cdot 57-\frac{5!}{6!}\cdot 1\right),$$

vel

$$\frac{1}{7}\left(1-\frac{1}{6}\cdot 57+\frac{1}{15}\cdot 302-\frac{1}{20}\cdot 302+\frac{1}{15}\cdot 57-\frac{1}{6}\cdot 1\right),$$

qui valor æquiparabit terminum B_6, ita ut sit

$$7B_6=1-\frac{1}{6}\cdot 57+\frac{1}{15}\cdot 302-\frac{1}{20}\cdot 302+\frac{1}{15}\cdot 57-\frac{1}{6}\cdot 1.$$

Habes hic differentias potestatis sextæ multiplicatas in coefficientes binomiales reciprocos ejusdem potestatis; et cum tam luculenta sit lex compositionis, parum habet negotii, pro unoquoque valore B_x eam transcribere.

Est itaque

$$3B_2=1-1.\frac{1}{2},\qquad B_2=\frac{1}{6},$$

$$4B_3=1-\frac{1}{3}\cdot 4+\frac{1}{3}\cdot 1,\qquad B_3=0,$$

$$5B_4=1-\frac{1}{4}\cdot 11+\frac{1}{6}\cdot 11-\frac{1}{4}\cdot 1,\qquad B_4=-\frac{1}{30},$$

$$6B_5=1-\frac{1}{5}\cdot 26+\frac{1}{10}\cdot 66-\frac{1}{10}\cdot 26+\frac{1}{6}\cdot 1,\qquad B_5=0,$$

$$7B_6=1-\frac{1}{6}\cdot 57+\ldots,\qquad B_6=\frac{1}{42},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad\ldots\ldots$$

10. Quum, quod supra monstravimus (5), differentiæ oriantur per legem binomialem ex valoribus antecedentibus, ad hos unaquæque differentia reduci potest. Sic, ex. gr., pro differentiis

septimis sextæ potestatis valent æquationes

$$\begin{aligned}
1 &= 1^6,\\
57 &= 2^6 - 7.1^6,\\
302 &= 3^6 - 7.2^6 + 21.1^6,\\
302 &= 4^6 - 7.3^6 + 21.2^6 - 35.1^6,\\
57 &= 5^6 - 7.4^6 + 21.3^6 - 35.2^6 + 35.1^6,\\
1 &= 6^6 - 7.5^6 + 21.4^6 - 35.3^6 + 35.2^6 - 21.1^6.
\end{aligned}$$

Positis his valoribus in expressione $7B_6$, transibit in

$$\begin{aligned}
7B_6 = {} & 1^6\\
& - \frac{1}{6}(2^6 - 7.1^6)\\
& + \frac{1}{15}(3^6 - 7.2^6 + 21.1^6)\\
& - \frac{1}{20}(4^6 - 7.3^6 + 21.2^6 - 35.1^6)\\
& + \frac{1}{15}(5^6 - 7.4^6 + 21.3^6 - 35.2^6 + 35.1^6)\\
& - \frac{1}{6}(6^6 - 7.5^6 + 21.4^6 - 35.3^6 + 35.2^6 - 21.1^6),
\end{aligned}$$

vel, secundum potestates ordinando,

$$\begin{aligned}
7B_6 = 1^6 & \left(1 + \frac{1}{6}\cdot 7 + \frac{1}{15}\cdot 21 + \frac{1}{20}\cdot 35 + \frac{1}{15}\cdot 35 + \frac{1}{6}\cdot 21\right)\\
- 2^6 & \left(\frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{15}\cdot 7 + \frac{1}{20}\cdot 21 + \frac{1}{15}\cdot 35 + \frac{1}{6}\cdot 25\right)\\
+ 3^6 & \left(\frac{1}{15}\,1 + \frac{1}{20}\cdot 7 + \frac{1}{15}\cdot 21 + \frac{1}{6}\cdot 35\right)\\
- 4^6 & \left(\frac{1}{20}\cdot 1 + \frac{1}{15}\cdot 7 + \frac{1}{6}\cdot 21\right)\\
+ 5^6 & \left(\frac{1}{15}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 7\right)\\
- 6^6 & \left(\frac{1}{6}\cdot 1\right).
\end{aligned}$$

Item, repetendo in posteriore parte terminos prioris pro 302,

57, 1 simpliciores,

$$
\begin{aligned}
7\,B_6 = &\quad 1^6 \\
&-\frac{1}{6}\,(2^6 - 7.1^6) \\
&+\frac{1}{15}\,(3^6 - 7.2^6 + 21.1^6) \\
&-\frac{1}{20}\,(3^6 - 7.2^6 + 21.1^6) \\
&+\frac{1}{15}\,(2^6 - 7.1^6) \\
&-\frac{1}{6}\,.1^6.
\end{aligned}
$$

Cæteris, quæ se præberent, transformationibus non immoramur, cum ad computum parum aut nihil faciant.

Id jam ex allatis concludere licet, $7!\,B_6$ vel omnino $(n+1)!\,B_n$ esse numerum integrum, ideoque denominatorem fractionis in B_n, si qua locum habeat, numerum primum, qui valorem $n+1$ transcendat, non continere.

11. Aliquanto aptiores redduntur formulæ adhibita lege recursionis n° 8 tradita. Exemplo sit expressio nostra pro $7\,B_6$.

Ponendo

$$57 = 2.26 + 5.1,$$
$$302 = 3.66 + 4.26\ldots,$$

prodit

$$
\begin{aligned}
7\,B_6 = 1 &- \frac{1}{6}\cdot 5 - \frac{2}{6}\cdot 26 + \frac{4}{15}\cdot 26 + \frac{3}{15}\cdot 66 - \frac{3}{20}\cdot 66 - \frac{4}{20}\cdot 26 + \frac{2}{15}\cdot 26 \\
&+ \frac{1}{15}\cdot 5 - \frac{1}{6}\cdot 1 \\
= \frac{1}{6}\cdot 1 &- \frac{1}{15}\cdot 26 + \frac{1}{20}\cdot 66 - \frac{1}{15}\cdot 26 + \frac{1}{6}\cdot 1,
\end{aligned}
$$

quæ formula item constat ex coefficientibus binomii reciprocis et differentiis potentiarum, iisque gradus inferioris, et vincit priorem ratione symmetriæ et brevitatis. Præsertim eum habet usum, ut manifestum faciat, cur valores impari indice signati evanescant, scilicet quia apud eos in posteriore parte iidem termini ut in

priore reperiantur, sed contrario signo affecti, ita ut se invicem tollant.

Restant formulæ

$$3B_2 = \frac{1}{2}, \qquad B_2 \text{ sive } \mathfrak{B}_1 \text{ (h. e. num. Bern. I)} = \frac{1}{6},$$

$$5B_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{4}, \qquad B_4 = \mathfrak{B}_2 = -\frac{1}{30},$$

$$7B_6 = \frac{1}{6} - \frac{1}{15}\cdot 26 + \frac{1}{20}\cdot 66$$

$$- \frac{1}{15}\cdot 26 + \frac{1}{6}, \qquad \mathfrak{B}_3 = +\frac{1}{42},$$

$$9B_8 = \frac{1}{8} - \frac{1}{28}\cdot 120$$

$$+ \frac{1}{56}\cdot 1191 - \frac{1}{70}\cdot 2416$$

$$+ \frac{1}{56}\cdot 1191 - \frac{1}{28}\cdot 120 + \frac{1}{8}, \qquad \mathfrak{B}_4 = -\frac{1}{30},$$

....

II.

12. Revertamur jam ad n° 6 et eas expressiones summatorias, quæ diagonalibus se applicant.

Propositum sit iterum problema, summam $S(10^6)$ inveniendi. Evolvantur differentiæ potestatum :

Tabula differentiarum.

7^6	6^6	5^6	4^6	3^6	2^6	1^6
117649	46656	15625	4096	729	64	1*
70993	31031	11529	3363	665	63*	1
39962	19502	8162	2702	602*	62	1
20460	11340	6460	2100*	540	61	1
9120	5880	3360*	1560	479	60	1
3240	2520*	1800	1081	419	59	1
720*	720	719	662	360	58	1
0	1	57	302	302	57	1

Tabula summarum vel numerorum figuratorum.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10*
1	3	6	10	15	21	28	36	45*	55
1	4	10	20	35	56	84	120*	165	220
1	5	15	35	70	126	210*	330	495	715
1	6	21	56	126	252*	462	792	1287	2002
1	7	28	84	210*	462	924	1716	3003	5005
1	8	36	120*						

Conjungantur, quas asterisco signavimus series lineæ diagonalis

$$1 \quad 63 \quad 602 \quad 2100 \quad 3360 \quad 2520 \quad 720$$

cum serie obliqua alterius tabulæ

$$10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120$$

et prodibit summa quæsita.

Ut supra monuimus, coefficientes posteriores pertinent ad binomium potestatis 10, vel omnino pro $S(n^x)$ ad binomium $n^{\text{tæ}}$ potestatis. Sunt hi :

$$\frac{n}{1}, \quad \frac{n(n-1)}{1.2}, \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, \quad \dots$$

in quibus occurrit potestas n^1 multiplicata cum

$$\frac{1}{1}, \quad -\frac{1}{2}, \quad +\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad +\frac{1}{5}, \quad \dots$$

Seligendo coefficientem hujus potentiæ n^1 habebis ut supra valorem B_6 parem. Est igitur

$$B_6 = \frac{1}{1}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 63 + \frac{1}{3}\cdot 602 - \frac{1}{4}\cdot 2100 + \frac{1}{5}\cdot 3360 - \frac{1}{6}\cdot 2520 + \frac{1}{7}\cdot 720,$$

in qua formula numeris reciprocis naturali ordine progredientibus conjunctæ sunt differentiæ potestatum ex diversis seriebus depromtæ.

Possunt hæ ut supra retroverti in aggregata potentiarum. Est

$$63 = 2^6 - 1,$$
$$602 = 3^6 - 2.2^6 + 1.1^6,$$
$$2100 = 4^6 - 3.3^6 + 3.2^6 - 1.1^6,$$
$$3360 = 5^6 - 4.4^6 + 6.3^6 - 4.2^6 + 1.1^6,$$
$$2520 = 6^6 - 5.5^6 + 10.4^6 - 10.3^6 + 5.2^6 - 1^6,$$
$$720 = 7^6 - 6.6^6 + 15.5^6 - 20.4^6 + 15.3^6 - 6.2^6 (= 6!),$$

ut item sit

$$\begin{aligned} B_6 = \; & 1.1^6 \\ & - \frac{1}{2}(2^6 - 1) \\ & + \frac{1}{3}(3^6 - 2.2^6 + 1) \\ & - \frac{1}{4}(4^6 - 3.3^6 + 3.2^6 - 1) \\ & + \frac{1}{5}(5^6 - 4.4^6 + 6.3^6 - 4.2^6 + 1) \\ & - \frac{1}{6}(6^6 - 5.5^6 + 10.4^6 - 10.3^6 + 5.2^6 - 1) \\ & + \frac{1}{7}(7^6 - 6.6^6 + 15.5^6 - 20.4^6 + 15.3^6 - 6.2^6 + 1), \end{aligned}$$

vel digerendo secundum potestates

$$\begin{aligned} B_6 = 1^6 & \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \\ - 2^6 & \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7}\right) \\ + 3^6 & \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{6}{5} + \frac{10}{6} + \frac{15}{7}\right) \\ - 4^6 & \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{5} + \frac{10}{6} + \frac{20}{7}\right) \\ + 5^6 & \left(\frac{1}{5} + \frac{5}{6} + \frac{15}{7}\right) \\ - 6^6 & \left(\frac{1}{6} + \frac{6}{7}\right) \\ + 7^6 & \left(\frac{1}{7}\right). \end{aligned}$$

Ipse conspectus legem compositionis docet, ita ut nihil habeat difficultatis, eam cuilibet valori B_x adaptare.

13. Instituatur tabula differentiarum quæ in his nostris formulis multiplicandæ sunt cum numeris reciprocis. Hanc præbebit faciem :

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.
Pro B_1...	1	1							
B_2...	1	3	2						
B_3...	1	7	12	6					
B_4...	1	15	50	60	24				
B_5...	1	31	180	390	360	120			
B_6...	1	63	602	2100	3360	2520	720		
B_7...	1	127	1932	10206	25200	31920	20160	5040	
B_8...	1	255	6050	46620	166824	317520	332640	181440	40320
....	.	...	....	....	......	......	......	......	.....

Valores in columna II formæ sunt $2^x - 1$,

Valores in columna III formæ sunt $3^x - 2 . 2^x + 1 . 1^x$, et sic porro.

Verum etiam hic, ut in simili tabula § 8, valet lex recursionis ita comparata, ut pari modo quicumque terminus

$$t = ax + by,$$

significante a terminum supra positum, b antecedentem, dum x et y pares sunt singulis indicibus columnæ verticalis ad a et b pertinentis.

Est, ex. gr.,

$$63 = 2.31 + 1.1,$$
$$602 = 3.180 + 2.31,$$
$$2100 = 4.390 + 3.180,$$
$$3360 = 5.360 + 4.390,$$
$$2520 = 6.120 + 5.360,$$
$$720 = 0 + 6.120.$$

Quæ lex non solum adjumentum præbet ad continuandam expedite tabulam, sed etiam subsidium, cujus ope formulæ ipsæ simpliciorem inducunt formam. Introducendo enim in formulam pro B_6

Exemplum I. — Numeri II^{æ} seriei vel lineæ :

1. 3. 2.

$$(a) \qquad \frac{1}{1}-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1}{6}=\mathfrak{B}_1,$$

$$(b) \qquad \frac{1}{2}-\frac{3}{3}+\frac{2}{4}=0.$$

Exemplum II. — Numeri lineæ tertiæ :

1. 7. 12. 6.

$$(a) \qquad \frac{1}{1}-\frac{7}{2}+\frac{12}{3}-\frac{6}{4}=0,$$

$$(b) \qquad \frac{1}{2}-\frac{7}{3}+\frac{12}{4}-\frac{6}{5}=-\frac{1}{30}=\mathfrak{B}_2.$$

Hac significatione utens omnino habebis :

$$\mathfrak{B}_x = B_{2x} = \frac{A_{2x-1}}{2}-\frac{B_{2x-1}}{3}+\frac{C_{2x-1}}{4}-\frac{D_{2x-1}}{5}+\ldots$$

$$= \frac{A_{2x}}{1}-\frac{B_{2x}}{2}+\frac{C_{2x}}{3}-\frac{D_{2x}}{4}+\ldots,$$

indice litteris A, B, ..., addito numerum seriei in tabula nostra indicante.

Item, subtrahendo valores (a) et (b) :

$$-\mathfrak{B}_x = \frac{A_{2x-1}}{1.2}-\frac{B_{2x-1}}{2.3}+\frac{C_{2x-1}}{3.4}-\frac{D_{2x-1}}{4.5}+\ldots$$

$$\mathfrak{B}_x = \frac{A_{2x}}{1.2}-\frac{B_{2x}}{2.3}+\frac{C_{2x}}{3.4}-\frac{D_{2x}}{4.5}+\ldots$$

III.

15. Restat disquirere, utrum singula expressionis nostræ membra numeri fracti sint an integri, sive, utrum peracta divisione terminorum A, B, C, ... per 2, 3, 4, ..., residuum relinquatur necne.

Quod si eruerimus, simul via patebit ad deducendum ex ipsa formula illustre illud theorema, a Staudtio et Clausenio inventum,

cujus ille demonstrationem aliunde repetiit (cf. CRELLE, *Journal für die reine u. angewandte Mathematik*, t. XXI, p. 372, *Beweis eines Lehrsatzes die Bernoullischen Zahlen betreffend*).

Quum singuli valores A, B, C, ... sint formæ

$$n^x - (n-1)(n-1)^x + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}(n-2)^x$$
$$-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}(n-3)^x + \ldots,$$

quæstio in eo versatur : utrum hæc expressio per n divisa residuum relinquat necne.

Mirabar, excepto casu $n=4$, id tantum evenire posse, ut residuum aut penitus evanescat aut $= -1$ evadat. Illud sæpissime fit; hoc tum solum accidit, si n est numerus primus, impar, ejus conditionis, ut $n-1$ exponentem x dividat.

16. Casum hunc alterum ope theorematis Fermatiani facile absolvi posse, exempla doceant.

Exemplum I. — Proposita sit ex formula pro B_{12} vel $\mathfrak{B}_6$ expressio :

$$13^{12} - 12.12^{12} + 66.11^{12} - 220.10^{12} + \ldots.$$

Demonstratio :

$$13^{12} \equiv 0 \,(\text{mod. } 13), \quad 12^{12} \equiv 1 \,(\text{mod. } 13),$$

secundum Fermatii theorema.

Item

$$11^{12},\ 10^{12},\ 9^{12},\ \ldots \equiv 1 \quad (\text{mod. } 13)$$

quare redit expressio ad

$$0 - 12 + 66 - 220 + 495 \ldots.$$

At

$$1 - 12 + 66 - 220 + 495 \ldots = (1-1)^{12} = 0 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 13);$$

ergo nostra expressio unitate minor $\equiv -1$ (mod. 13).

Exemplum II.

$$7^{18} - 6.6^{18} + 15.5^{18} - 20.4^{18} + 15.3^{18} - 6.2^{18} + 1^{18}.$$

$$7^{18} \equiv 0 \,(\text{mod. } 7), \quad 6^{18} \equiv 6^{6} \equiv 1 \,(\text{mod. } 7), \quad \text{item} \quad 6^{18}, \quad 4^{18}, \quad \ldots;$$

ergo expressio reducitur ad

$$0 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1;$$

at

$$1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1 \equiv 1 - 11^{6} \equiv 0 \,(\text{mod. } 7);$$

ideoque aggregatum nostrum $\equiv -1$ (mod. 7).

Unde sequitur esse omnino

$$a^{x} - m(a-1)^{x} + \frac{m(m-1)}{1.2}(a-2)^{x} - \ldots \equiv -1 \quad (\text{mod. D}),$$

si $D = a$ numerus primus est et x multiplum numeri $D - 1$, ubi m potest esse sive, ut in exemplis, $= a - 1$, sive $< a - 1$.

Etiam e theoremate Wilsonii demonstratio potuisset derivari, quum, ex. gr.,

$$7^{18} - 6.6^{18} + 15.5^{18} \ldots \equiv 7^{6} - 6.6^{6} + 15.5^{6} \ldots \quad (\text{mod. } 7),$$

et posterior expressio $= 6! \equiv -1$ (mod. 7), ex lege Wilsonii.

17. Altera protaseos nostræ pars : esse in cæteris præter dictum casum

$$a^{x} - m(a-1)^{x} + \frac{m(m-1)}{1.2}(a-2)^{x} - \ldots \equiv 0 \quad (\text{mod. } a),$$

magis ardua videtur esse demonstratu.

Post varios irritos conatus recurrebimus ad tabulam differentiarum, quæ pro potestatibus tertiæ dimensionis sic se habet :

	7^3.	6^3.	5^3.	4^3.	3^3.	2^3.	1^3.
	343	216	125	64	27	8	1
Δ_1.......	127	91	61	37	19	7	1
Δ_2.......	36	30	24	18	12	6	1
Δ_3.......	6	6	6	6	6	5	1
Δ_4.......	0	0	0	0	1	4	1

	7ᵃ.	6ᵃ.	5ᵃ.	4ᵃ.	3ᵃ.	2ᵃ.	1ᵃ.
Δ_5.......	o	o	o	— 1	— 3	3	1
Δ_6.......	o	o	+ 1	+ 2	— 6	2	1
Δ_7.......	o	— 1	— 1	8	— 8	1	1
Δ_8.......	+ 1	o	— 9	16	— 9	o	1
....	....	...	....	...	....	..	..

Sicut hic in tertia linea, ita omnino apud x^{tas} potestates in x^{ta} serie differentiarum plurimi termini, vel omnes præter $x - 1$ in fine, inter se pares erunt, ita ut in proxima linea evanescant et præter x extremos nihilo æquentur.

Teneamus porro, quod omnes hujus tabulæ valores secundum legem binomii ex prioribus derivantur. Quum igitur in m^{ta} serie differentiali sint ipsius formæ

$$a^x - m(a-1)^x + \frac{m(m-1)}{1.2}(a-2)^x - \ldots,$$

cernitur ex ipsa tabula, hoc aggregatum nihilo æquari in $(x+1)^a$ serie differentiarum et sequentibus, dummodo item basis a major sit quam exponens x, sive, quod idem est, quoties basis a et index m exponentem potestatum x valore superant.

Atqui in nostris formulis, quamvis sint ejusdem speciei, lemma hoc satis commodum non adhiberi posse videtur, quum hic exponens x ad summum valori a par et nunquam simul utroque numero a et m minor existat. Sunt re vera nostra aggregata valoris positivi et nihilo majora. Verum ostendere valemus, ea singula secundum modulum a vel D congruentia esse aggregatis similibus, ad quæ, quum exponente minori quam a et m affecta sint, dictum lemma pertinet, ita ut exinde deduci possit, etiam illa, cum his congruentia, esse $\equiv 0 \pmod{a}$.

Quod rursus evidentius est eo casu, quando divisor D vel a numerus est primus.

Exemplum :

$$11^{12} - 10.10^{12} + \frac{10.9}{1.2}.9^{12} - \ldots \equiv \quad (\text{mod. } 11),$$

namque

$$11^{12} \equiv 0 \quad (\text{mod. } 11), \quad 10^{12} \equiv 10^{10}.10^2 \quad (\text{mod. } 11);$$

THÉORÈME RELATIF A LA COURBE DE WATT;

PAR M. TCHEBYCHEF.

Si deux sommets A, A_1 du triangle AA_1M glissent respectivement sur deux circonférences de centres C, C_1 la courbe décrite par le sommet M ne peut avoir avec sa tangente un contact d'ordre 5 (limite qui ne pourra jamais être dépassée) que dans le cas où les angles $\widehat{CAA_1}$, $\widehat{C_1A_1A}$ ont les valeurs

$$\widehat{CAA_1} = \frac{\widehat{A_1AM} + 2n\pi}{3}, \quad \widehat{C_1A_1A} = \frac{\widehat{A_1AM} + 2n_1\pi}{3},$$

où n, n_1 sont des nombres entiers quelconques.

Avec ces valeurs des angles $\widehat{CAA_1}$, $\widehat{C_1A_1A}$ le contact est toujours de l'ordre 5 lorsque les rayons AC, A_1C_1 des deux cercles ont les valeurs suivantes

$$AC = AM \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\left(2\widehat{CAA_1} + \frac{\gamma}{2}\right)} \frac{\cos^2\left(3\widehat{CAA_1} + \gamma\right)}{\cos^2\left(\widehat{CAA_1} + \gamma\right)},$$

$$A_1C_1 = A_1M \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\left(\cos 2\widehat{C_1A_1A} - \frac{\gamma}{2}\right)} \frac{\cos^2\left(3\widehat{C_1A_1A} - \gamma\right)}{\cos^2\left(\widehat{C_1A_1A} - \gamma\right)},$$

où γ est l'angle sous lequel se coupent la ligne AA_1 et la tangente en M.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MALAGOLA (C.). — LETTERE INEDITE DI UOMINI ILLUSTRI BOLOGNESI. — 2 vol. in-18. Bologne, 1875.

Les Lettres des savants qui se sont fait un nom dans la Science par leurs découvertes ou dans les Lettres par la correction de leur style sont toujours d'un vif intérêt pour ceux qui s'occupent de recherches d'érudition; aussi toutes les époques ont-elles vu publier des Recueils analogues à celui que nous signalons ici. En Italie, ce sont : les *Lettere volgari di diversi nobilissimi huomini et eccelentissimi ingegni scritte in diverse materie* (Venise, 1542), les *Lettere di diversi eccelentissimi signori a diversi huomini scritte,* Libro primo (Venise, 1542), puis les *Lettere famigliari di alcuni Bolognesi* (Bologne, 1744).

Le Recueil que publie aujourd'hui M. Malagola a un caractère différent du précédent; les Lettres qu'il renferme traitent, pour la majeure partie, de questions d'intérêt public. Ce sont, en général, des demandes adressées au Sénat de Bologne pour obtenir des créations de chaires à l'Université ou pour réclamer des augmentations d'appointements; ces dernières sont alors accompagnées de l'énumération des titres du postulant et deviennent ainsi de véritables documents historiques pour la biographie des savants illustres qui les ont écrites.

La plus grande partie des documents sont tirés des Archives du Gouvernement de Bologne; un petit nombre seulement ont été remis à M. Malagola par des amateurs d'autographes. Tous étaient inédits.

Parmi les Lettres les plus intéressantes contenues dans les deux Volumes de M. Malagola, signalons :

Une série de Lettres de Dominique Guglielmini (1655-1710) sur le régime des cours d'eau en Toscane;

Quelques Lettres d'Eustache Manfredi (1674-1739), relatives à la même question, qui n'a cessé d'occuper le Sénat de Bologne pendant tout le XVIIIe siècle.

Enfin les astronomes s'intéresseront certainement aux notes

d'Eustache Zanotti (1709-1782) sur lui-même et aux difficultés pécuniaires de sa vie de professeur. Observateur et calculateur infatigable, Zanotti n'obtenait qu'avec peine un traitement suffisant, et ses demandes d'augmentation devaient être reproduites en 1739, 1744, 1748, 1751 et 1766.

Le Recueil de M. Malagola a donc une double importance : il nous éclaire sur quelques points obscurs de l'administration de l'Université de Bologne et ajoute des détails intéressants aux biographies des plus illustres professeurs de cette ville. G. R.

MÉLANGES.

SUR LES SÉRIES RÉCURRENTES, DANS LEURS RAPPORTS AVEC LES ÉQUATIONS;

PAR M. A. LAISANT.

Préliminaires.

Je me propose d'examiner à un point de vue purement algébrique certaines propriétés de fonctions analogues à celles qu'a étudiées M. Édouard Lucas dans une série d'articles de la *Nouvelle Correspondance mathématique* en 1877 et 1878, articles qui ont été réunis ensuite en une Brochure fort intéressante (¹).

Les fonctions U_n et V_n de M. Lucas, qui dérivent de l'équation du second degré, ont surtout pour objet des recherches arithmétiques, comme l'indique le titre même de son étude et comme il a soin d'en prévenir le lecteur dès le début. On peut même dire que l'auteur a ouvert là une voie nouvelle et fort originale pour ceux qui s'occupent de la science des nombres; mais, par cela même, il est obligé de faire certaines hypothèses sur les coefficients de l'équation d'où procèdent les fonctions qu'il considère.

Ici, au contraire, mes recherches ayant un but différent, je laisse

(¹) *Sur la théorie des fonctions numériques simplement périodiques*, par M. Éd. Lucas. Bruxelles, 1878.

aux équations toute leur généralité, sans supposer même, comme on le fait d'habitude, que les coefficients soient réels.

On ne trouvera donc pas dans ce qui va suivre une généralisation des travaux de M. Lucas, à proprement parler, mais plutôt une étude analogue au début et différente dans les développements.

Il m'a paru intéressant surtout d'insister sur le lien étroit qui existe entre les séries récurrentes et les équations.

Ce sujet a été traité, il est vrai, par Daniel Bernoulli dans le T. III des *Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*. Sa méthode est exposée très complètement par Euler dans le Chapitre XVII de son *Introduction à l'Analyse infinitésimale*, Chapitre intitulé : *De l'usage des séries récurrentes dans la recherche des racines des équations*. Enfin Legendre a traité à son tour le même sujet (*Essai sur la théorie des nombres*, 2e édition, 1808; Ire Partie, § XIV, p. 145) (1).

Malgré cela, et en raison du plus grand caractère de généralité que je donne à mon étude, je n'ai pas cru devoir passer sous silence ces remarquables propriétés. J'avais d'autant plus de motifs pour le faire, que Daniel Bernoulli semble avoir eu principalement pour objet la recherche d'un moyen pratique d'approximation, s'appliquant surtout aux racines réelles, tandis qu'ici je me préoccupe bien plutôt des propriétés elles-mêmes, s'appliquant à n'importe quelles équations algébriques, que des applications de ces propriétés.

Enfin l'on trouvera peut-être quelques considérations nouvelles dans ce que j'expose au sujet de la formation des séries récurrentes imaginaires et de leur construction géométrique.

Fonctions u_k; loi de récurrence.

1. Pour plus de précision dans les idées et de brièveté dans les écritures, nous commencerons par examiner une équation du quatrième degré. Il nous sera aisé de généraliser ensuite, en les appliquant à des équations de degrés quelconques, les raisonnements employés et les résultats obtenus.

---

(1) *Voir* aussi, sur des sujets analogues, insérés dans ses *Œuvres* : T. I, p. 23; T. IV, p. 151 : T. V, p. 627.

Soit donc l'équation

$$(1) \qquad f(x) = x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4 = 0,$$

qui admet pour racines a, b, c, d, valeurs imaginaires en général, les coefficients p_1, p_2, p_3, p_4 étant eux-mêmes imaginaires.

2. Soit

$$(2) \qquad u_i = \mathrm{F}(a^i, b^i, c^i, d^i) = \mathrm{A}a^i + \mathrm{B}b^i + \mathrm{C}c^i + \mathrm{D}d^i$$

une fonction algébrique quelconque des puissances pareilles a^i, b^i, des racines. Si cette fonction est symétrique, il est souvent aisé, comme l'on sait, de la former au moyen des coefficients de l'équation. C'est ce qui arrive, par exemple, pour la somme des puissances semblables.

Si nous multiplions l'équation (1) par x^k et si nous y remplaçons x successivement par a, b, c, d, nous aurons les quatre identités

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{l} a^{k+4} + p_1 a^{k+3} + p_2 a^{k+2} + p_3 a^{k+1} + p_4 a^k = 0, \\ b^{k+4} + p_1 b^{k+3} + p_2 b^{k+2} + p_3 b^{k+1} + p_4 b^k = 0, \\ c^{k+4} + p_1 c^{k+3} + p_2 c^{k+2} + p_3 c^{k+1} + p_4 c^k = 0, \\ d^{k+4} + p_1 d^{k+3} + p_2 d^{k+2} + p_3 d^{k+1} + p_4 d^k = 0. \end{array}\right.$$

En ajoutant ces équations après les avoir respectivement multipliées par A, B, C, D, nous obtenons la relation très importante

$$(4) \qquad u_{k+4} + p_1 u_{k+3} + p_2 u_{k+2} + p_3 u_{k+1} + p_4 u_k = 0.$$

Les quantités u forment donc une suite récurrente et la loi de récurrence est indiquée par la relation (4). Cette relation, sous forme symbolique, peut s'écrire

$$(5) \qquad u_k f(u) = 0,$$

en convenant de remplacer les exposants par des indices et de restituer l'indice zéro lorsque c'est nécessaire.

Suivant la nature des fonctions u, les suites obtenues seront différentes; mais pour une même équation nous n'aurons jamais qu'une même loi, c'est-à-dire que les diverses suites ne différeront entre elles que par les conditions initiales.

Ainsi, à toute équation algébrique répond une classe de séries récurrentes, et, réciproquement, à toute série récurrente donnée répond une équation algébrique (étant entendu que la formule de récurrence qui lie entre eux autant de termes consécutifs qu'on voudra est de forme linéaire et homogène).

Fractions génératrices.

3. Soit donnée la fraction

$$\frac{1}{1+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+p_4x^4},$$

ou, plus généralement,

$$\frac{q_0+q_1x+q_2x^2+q_3x^3}{1+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+p_4x^4},$$

le numérateur étant un polynôme quelconque, de degré inférieur à celui du dénominateur. Si nous essayons d'en effectuer le développement suivant les puissances croissantes de x, nous aurons

$$\frac{q_0+q_1x+q_2x^2+q_3x^3}{1+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+p_4x^4}=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots.$$

En multipliant par le dénominateur et identifiant, cela nous donnera, k étant un entier positif quelconque,

$$A_{k+4}+p_1A_{k+3}+p_2A_{k+2}+p_3A_{k+1}+p_4A_k=0,$$

ou, symboliquement,

$$A_kf(A)=0,$$

c'est-à-dire précisément la relation (5), au changement près de u en A.

La série des coefficients du développement considéré est donc identique avec l'une des séries u dont nous avons parlé plus haut.

Les conditions initiales dépendront du numérateur de la fraction, mais la loi de récurrence dépendra du dénominateur seulement. Ce dénominateur peut s'écrire

$$x^4\left(\frac{1}{x^4}+p_1\frac{1}{x^3}+p_2\frac{1}{x^2}+p_3\frac{1}{x}+p_4\right)=x^4f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc, à une loi de récurrence donnée et représentée par la formule (5) répondent d'une part l'équation (1) et de l'autre la fraction $\frac{1}{x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)}$ $\left[\text{c'est-à-dire, en général, } \frac{1}{x^n f\left(\frac{1}{x}\right)}\right]$.

Réciproquement, à la loi de récurrence $u_k f\left(\frac{1}{u}\right) = 0$ répondrait la fraction génératrice $\frac{1}{f(x)}$, car on peut poser $k = k' + n$.

Si la suite des coefficients de la loi de récurrence [formule (4)] est symétrique, l'équation (1) est symétrique, elle aussi. Dans ce cas, il est évident que le premier membre de cette équation (1) est identique avec le dénominateur de la fraction génératrice.

Progressions dérivées.

4. Rappelons les relations bien connues

$$(6)\qquad \begin{cases} p_1 = -a - b - c - d, \\ p_2 = ab + ac + ad + bc + bd + cd, \\ p_3 = -abc - abd - acd - bcd, \\ p_4 = abcd. \end{cases}$$

Si nous divisons le premier membre de l'équation (1) par $x - a$, nous avons

$$(7)\qquad \frac{f(x)}{x-a} = \varphi_a(x) = x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3,$$

et, en vertu des relations (6),

$$(8)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = p_1 + a \quad = -b - c - d, \\ \alpha_2 = p_2 + a\alpha_1 = bc + bd + cd, \\ \alpha_3 = p_3 + a\alpha_2 = -bcd. \end{cases}$$

De la formule (7) nous déduisons l'identité

$$f(x) = x\varphi_a(x) - a\varphi_a(x),$$

et, par conséquent, la loi de récurrence (5) des fonctions u peut

s'écrire

(9) $$u_{k+1}\varphi_a(u) = a u_k \varphi_a(u).$$

Cette égalité symbolique nous montre que les termes $u_k\varphi_a(u)$, $u_{k+1}\varphi_a(u), \ldots$ forment une progression par quotient, de raison a.

En remplaçant successivement k par $0, 1, 2, \ldots, k-1$ dans la relation (9), puis multipliant les résultats, on obtient sans peine

$$u_k\varphi_a(u) = a^k u_0 \varphi_a(u),$$

ou, en posant

$$u_0\varphi_a(u) = u_3 + \alpha_1 u_2 + \alpha_2 u_1 + \alpha_3 u_0 = \Phi_a,$$

(10) $$u_k\varphi_a(u) = a^k \Phi_a.$$

Les quantités $a^k\Phi_a$ sont figurées, comme l'on sait, par les rayons successifs, également inclinés les uns sur les autres, d'une certaine spirale logarithmique, puisqu'elles forment une progression par quotient dont la raison est a.

L'équation (10) nous montre donc tout de suite que l'expression $u_k\varphi_a(u)$, lorsqu'on fera croître k indéfiniment, tendra vers zéro ou vers l'infini, suivant que le module de la racine a sera plus petit ou plus grand que l'unité. En effet, la spirale dont nous venons de parler se rapprochera de plus en plus du pôle ou s'en éloignera indéfiniment, suivant l'un ou l'autre de ces deux cas.

Si le module de a est égal à l'unité, le module de $u_k\varphi_a(u)$ reste constant. La spirale se réduit alors à une circonférence.

Tout ce que nous venons de dire pour la racine a peut se répéter identiquement pour chacune des autres racines b, c, d. Nous aurons donc

(11) $$\begin{cases} u_k\varphi_b(u) = b^k\Phi_b, \\ u_k\varphi_c(u) = c^k\Phi_c, \\ u_k\varphi_d(u) = d^k\Phi_d, \end{cases}$$

et, par conséquent, au moyen d'une série récurrente quelconque, à loi de récurrence homogène et linéaire $u_k f(u) = 0$, on peut former autant de progressions par quotient qu'il y a de termes, moins un, dans la relation de récurrence. Ces progressions ont respectivement pour raisons les racines de l'équation $f(x) = 0$. Nous les appellerons *progressions dérivées* de la série donnée.

5. Comme exemple très simple, considérons la série

$$1,\ 2,\ 9,\ 22,\ 77,\ 210,\ 673,\ 1934,\ 5973,\ \ldots,$$

qui satisfait à la loi de récurrence

$$u_{k+3} - 2u_{k+2} - 5u_{k+1} + 6u_k = 0.$$

Si nous formons les quantités

$$\begin{aligned} &u_{k+2} + u_{k+1} - 2u_k, \\ &u_{k+2} - u_{k+1} - 6u_k, \\ &u_{k+2} - 4u_{k+1} + 3u_k \end{aligned}$$

pour toutes les valeurs possibles entières et positives de k, nous trouverons respectivement les trois suites

$$\begin{array}{cccccc} 9, & 27, & 81, & 243, & 729, & \ldots, \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & \ldots, \\ +4, & -8, & +16, & -32, & +64, & \ldots. \end{array}$$

Ce sont les trois progressions dérivées de la série donnée; elles ont pour raisons 3, 1 et -2, parce qu'en effet ces trois dernières quantités sont les racines de l'équation

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Les fonctions $\varphi(x)$ sont ici

$$x^2 + x - 2, \quad x^2 - x - 6, \quad x^2 - 4x + 3,$$

expressions correspondant aux formules des termes des trois progressions ci-dessus.

6. Il est possible de généraliser les résultats que nous venons d'obtenir. Supposons en effet que le polynôme entier $f(x)$ soit décomposable en un produit de deux polynômes entiers d'une manière quelconque :

$$f(x) = \varphi(x)\psi(x). \tag{12}$$

Je dis que, si je forme la série des quantités

$$v_k = u_k\psi(u),$$

ces quantités satisferont à la loi de récurrence

$$(13) \qquad \eta_k \varphi(\eta) = 0.$$

Réciproquement, si nous formons la série

$$\theta_k = u_k \varphi(u),$$

nous aurons

$$(14) \qquad \theta_k \psi(\theta) = 0.$$

Pour le démontrer, supposons que $\varphi(x)$, développé, soit de la forme

$$\varphi(x) = x^q + s_1 x^{q-1} + s_2 x^{q-2} + \ldots + s_q.$$

Nous avons identiquement

$$f(x) = x^q \psi(x) + s_1 x^{q-1} \psi(x) + \ldots + s_q \psi(x).$$

Donc la loi de récurrence des quantités u peut s'écrire

$$u_{k+q} \psi(u) + s_1 u_{k+q-1} \psi(u) + \ldots + s_q u_k \psi(u) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\eta_{k+q} + s_1 \eta_{k+q-1} + \ldots + s_q \eta_k = 0,$$

ou, sous forme symbolique,

$$\eta_k (\eta_q + s_1 \eta_{q-1} + \ldots + s_q) = \eta_k \varphi(\eta) = 0.$$

C'est précisément la relation (13) que nous voulions établir. La formule (14) se démontrerait identiquement de la même manière.

Par exemple, dans la série u du numéro précédent, si nous formons la suite $u_{k+1} - 3 u_k$, nous obtenons

$$(\eta) \qquad -1, \ +3, \ -5, \ +11, \ -21, \ +43, \ \ldots,$$

suite sur laquelle on vérifie immédiatement la relation

$$\eta_{k+2} + \eta_{k+1} - 2 \eta_k = 0.$$

On voit ainsi que d'une suite récurrente donnée se déduisent non seulement des progressions dérivées, mais en général des *séries*

dérivées qu'on peut associer par couple de deux, réciproques entre elles.

Rapports de deux termes consécutifs des séries u. — Calcul des racines de plus grand module et de plus petit module d'une équation.

7. Revenons aux équations considérées au début, et qui s'appliquent à un type du quatrième degré, ce qui n'altère en rien la généralité des résultats.

Si nous divisons chacune des équations (11) par l'équation (10), membre à membre, nous aurons

$$\frac{u_k\varphi_b(u)}{u_k\varphi_a(u)}=\left(\frac{b}{a}\right)^k\frac{\Phi_b}{\Phi_a},$$
$$\frac{u_k\varphi_c(u)}{u_k\varphi_a(u)}=\left(\frac{c}{a}\right)^k\frac{\Phi_c}{\Phi_a},$$
$$\frac{u_k\varphi_d(u)}{u_k\varphi_a(u)}=\left(\frac{d}{a}\right)^k\frac{\Phi_d}{\Phi_a}.$$

Actuellement, supposons que, parmi les racines de l'équation (1), a soit celle qui a le plus grand module et qu'il n'y en ait pas deux de ce plus grand module.

Alors, si nous donnons à k des valeurs indéfiniment croissantes, les seconds membres des équations ci-dessus auront pour limite zéro.

En divisant les fractions du premier membre, haut et bas, par u_k, cela nous montre que nous devrons avoir à la limite (¹)

$$(15)\qquad\left\{\begin{aligned}&\frac{u_{k+3}}{u_k}+\beta_1\frac{u_{k+2}}{u_k}+\beta_2\frac{u_{k+1}}{u_k}+\beta_3=0,\\&\frac{u_{k+3}}{u_k}+\gamma_1\frac{u_{k+2}}{u_k}+\gamma_2\frac{u_{k+1}}{u_k}+\gamma_3=0,\\&\frac{u_{k+3}}{u_k}+\delta_1\frac{u_{k+2}}{u_k}+\delta_2\frac{u_{k+1}}{u_k}+\delta_3=0.\end{aligned}\right.$$

(¹) Pour plus de simplicité dans l'écriture nous supprimons, avec intention, l'indication lim. dans ces diverses relations; mais il faut y suppléer par la pensée.

En posant $\frac{u_{k+1}}{u_k} = r_{k+1}$, ces équations peuvent s'écrire

$$r_{k+1}r_{k+2}r_{k+3} + \beta_1 r_{k+1}r_{k+2} + \beta_2 r_{k+1} + \beta_3 = 0,$$
$$r_{k+1}r_{k+2}r_{k+3} + \gamma_1 r_{k+1}r_{k+2} + \gamma_2 r_{k+1} + \gamma_3 = 0,$$
$$r_{k+1}r_{k+2}r_{k+3} + \delta_1 r_{k+1}r_{k+2} + \delta_2 r_{k+1} + \delta_3 = 0.$$

On pourrait les résoudre sans nulle peine en considérant $r_{k+1}r_{k+2}r_{k+3}$, $r_{k+1}r_{k+2}$ et r_{k+1} comme trois inconnues différentes, ce qui rend le système ci-dessus de forme linéaire. Mais il est évident que, si le rapport $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ tend vers une certaine limite lorsque k croît indéfiniment, rien ne saurait distinguer les diverses valeurs de r dans les équations ci-dessus, qui se rapportent aux limites.

Donc, en désignant par r la valeur limite commune, ces équations deviennent

$$(16) \qquad \begin{cases} r^3 + \beta_1 r^2 + \beta_2 r + \beta_3 = 0, \\ r^3 + \gamma_1 r^2 + \gamma_2 r + \gamma_3 = 0, \\ r^3 + \delta_1 r^2 + \delta_2 r + \delta_3 = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire précisément

$$(17) \qquad \varphi_b(r) = 0, \quad \varphi_c(r) = 0, \quad \varphi_d(r) = 0.$$

Or

$\varphi_b(x) = 0$ admet pour racines a, c, d,
$\varphi_c(x) = 0$ » a, b, d,
$\varphi_d(x) = 0$ » a, b, c.

Donc a est la racine commune, et la seule, aux trois équations (17), et en somme nous avons

$$(18) \qquad \lim_{k=\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = a.$$

En langage ordinaire, cette proposition peut s'énoncer ainsi :

Si une suite récurrente $u_1, u_2, \ldots$ a pour loi de récurrence la relation symbolique

$$u_k f(u) = 0,$$

le rapport d'un terme au précédent, lorsqu'on prendra des termes de plus en plus éloignés dans le sens positif, tendra vers la racine de plus grand module de l'équation $f(x) = 0$.

8. Nous n'avons jamais considéré jusqu'à présent que les séries u prolongées dans le sens positif, c'est-à-dire que les termes à indices positifs. Il est clair qu'on peut prolonger la série dans les deux sens, et que, par conséquent, les formules établies précédemment subsistent en leur entier pour des valeurs négatives de k.

Seulement alors, les relations du n° 7 ne donneront plus les mêmes conséquences, les seconds membres croissant indéfiniment si nous admettons encore que a soit la racine de plus grand module.

Supposons donc au contraire, un instant seulement, et pour ce cas des indices négatifs, que a soit la racine *de plus petit module*. Alors les second smembres tendent vers zéro; tout le reste suit comme précédemment, et *le rapport limite d'un terme au précédent, en prolongeant indéfiniment la série dans le sens négatif, tend vers la racine de plus petit module.*

Ainsi la série prise comme exemple au n° 5, étant prolongée dans les deux sens, nous donne

$$\ldots,\quad -\frac{209}{1296},\quad -\frac{37}{216},\quad -\frac{5}{36},\quad -\frac{1}{6},$$
$$0,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad 9,\quad 22,\quad 77,\quad 210,\quad 673,\quad \ldots.$$

A droite le rapport d'un terme au précédent tend vers 3, et à gauche vers 1, qui sont, ainsi que nous l'avons vu plus haut, les racines de plus grand et de plus petit module de l'équation correspondante.

9. La proposition que nous venons d'établir fournit une méthode de calcul pour la recherche des racines extrêmes d'une équation algébrique *quelconque* (on nous permettra d'insister sur ce point), c'est-à-dire d'une équation à coefficients et à racines imaginaires.

Il n'est pas nécessaire, pour appliquer cette méthode, de former telle ou telle fonction symétrique des racines d'après les coefficients, fonction dont le calcul algébrique peut être une opération préa-

nous étudions ici procèdent d'une équation du quatrième degré (ou en général de degré quelconque), exactement au même titre que les fractions continues périodiques procèdent des équations du second degré.

Le calcul des valeurs r, qui peut se faire directement au moyen des termes de la série u, peut s'effectuer aussi par voie de récurrence comme il suit.

Nous avons

$$u_{k+4} = -p_1 u_{k+3} - p_2 u_{k+2} - p_3 u_{k+1} - p_4 u_k.$$

Divisons par $-u_{k+3}$ et il viendra

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} -r_{k+4} &= p_1 + p_2 \frac{1}{r_{k+3}} + p_3 \frac{1}{r_{k+3} r_{k+2}} + p_4 \frac{1}{r_{k+3} r_{k+2} r_{k+1}} \\ &= p_1 + \frac{1}{r_{k+3}} \left[p_2 + \frac{1}{r_{k+2}} \left(p_3 + \frac{1}{r_{k+1}} p_4 \right) \right] \end{aligned}\right.$$

En général, pour une équation de degré quelconque n,

$$(21)\quad -r_{k+n} = p_1 + \frac{1}{r_{k+n-1}} \left[p_2 + \frac{1}{r_{k+n-2}} \left(p_3 + \ldots + \frac{1}{r_{k+1}} p_n \right) \ldots \right].$$

Cette relation, limitée à deux termes, engendrerait une fraction continue. L'analogie se poursuit donc avec un très grand degré de généralisation; en réalité, les valeurs r_k sont les réduites successives de véritables *fractions continues d'ordres supérieurs.*

11. Il reste, bien entendu, à s'assurer que les valeurs successives de r convergent réellement vers une certaine limite au lieu de s'en écarter. C'est ce qu'il sera facile de vérifier sur chaque exemple et d'obtenir au moyen des conditions initiales dont on dispose. Nous ne croyons pas utile ici d'insister pour le moment sur ce point.

Mais ce que nous voulons faire ressortir surtout, c'est que la méthode précédente, bien qu'indirecte, indique une marche systématique de calcul, un tableau des opérations à effectuer pour parvenir au résultat, c'est-à-dire à obtenir les racines de plus grand et de plus petit module.

On peut, à un point de vue purement théorique, la considérer comme intermédiaire entre un simple procédé numérique et une

solution algébrique proprement dite. Enfin elle présente cet intérêt considérable, sous la forme où nous venons de l'exposer, de n'établir aucune distinction entre les racines réelles ou imaginaires et d'avoir ainsi un caractère de généralité absolue très conforme au véritable esprit de l'Algèbre. A ces titres divers et en remarquant sur quelles notions simples elle s'appuie, la méthode de Daniel Bernoulli mériterait peut-être de ne pas rester dans l'oubli où elle paraît être depuis Euler et Legendre.

Ayant obtenu les racines a et a' de plus grand et de plus petit module d'une équation algébrique quelconque, nous pourrons en débarrasser l'équation donnée en divisant le premier membre par $(x-a)(x-a')$.

On appliquera la même méthode à l'équation nouvelle ainsi obtenue et dont le degré se trouvera abaissé de deux unités, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à une équation, soit du premier, soit du second degré, qui dans les deux cas se résoudra immédiatement par les formules connues.

Cas des racines d'égal module.

12. La méthode exposée s'applique intégralement au cas où la racine de plus grand ou de plus petit module est multiple, car le nombre des équations (16) se réduit, il est vrai; mais, comme il y a encore une racine commune a, et une seule, aux équations restantes, r doit nécessairement prendre cette valeur a.

Il y a un cas, au contraire, dans lequel la méthode tombe absolument en défaut: c'est celui où il y a à la fois plusieurs racines d'égal module maximum ou minimum et d'arguments différents.

Nous allons l'examiner dans le cas de deux racines, qui est spécialement intéressant, puisque c'est celui que présentent les racines imaginaires des équations à coefficients réels.

13. Reprenons l'équation (9), dans laquelle se trouve mise en évidence la racine a.

Nous pouvons écrire cette relation symbolique sous l'une des deux formes

$$(22)\quad \begin{cases} (u_{k+1}-au_k)\varphi_a(u)=0, \\ u_k(u-a)\varphi_a(u)=0. \end{cases}$$

Si nous rapprochons de ceci la solution que nous donne la formule (18), et qui peut s'écrire

$$u_{k+1} - a u_k = 0 \qquad (k = \infty),$$

nous voyons que la racine de plus grand module a est telle, qu'elle annule le coefficient symbolique du premier membre de l'équation (22), c'est-à-dire $u_{k+1} - a u_k = u_k(u - a)$ pour $k = \infty$.

Rappelons, en passant, que la racine de plus petit module annule le même coefficient pour $k = -\infty$.

De cette remarque, l'analogie conduit à supposer que, si nous considérons à la fois les deux racines a et b ayant les plus grands modules, la relation (22) pouvant s'écrire

$$(23) \qquad u_k(u - a)(u - b)\psi_{a,b}(u) = 0,$$

les racines en question satisferont à l'équation

$$u_k(u - a)(u - b) = 0 \qquad (k = \infty),$$

ou

$$(24) \qquad u_{k+2} - (a + b) u_{k+1} + a b_k = 0.$$

Mais l'analogie ne saurait suffire pour justifier cette conséquence, et il importe de l'établir en toute rigueur.

Dans ce but, et pour employer un raisonnement cette fois tout à fait direct, nous reprendrons les termes u_i sous la forme de la relation (2), qui met en évidence les racines de l'équation et qui aurait pu permettre d'obtenir les résultats précédents.

Le premier membre de la relation (24) deviendra, en supposant quelconque le degré de l'équation,

$$(25) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{A}a^{k+2} + \mathrm{B}b^{k+2} + \mathrm{C}c^{k+2} + \ldots) \\ \quad - (a + b)(\mathrm{A}a^{k+1} + \mathrm{B}b^{k+1} + \mathrm{C}c^{k+1} + \ldots) \\ \quad + ab(\mathrm{A}a^{k} + \mathrm{B}b^{k} + \mathrm{C}c^{k} + \ldots). \end{array} \right.$$

En supposant k positif et très grand, et de plus

$$\operatorname{mod} a \geqq \operatorname{mod} b > \operatorname{mod} c > \ldots,$$

nous pouvons négliger les termes en c, d, ... vis-à-vis de ceux en a

et b, et alors il nous reste une identité si nous égalons à zéro l'expression (25) ainsi considérée à la limite.

Les deux racines de plus grand module a et b satisfont donc bien à l'équation (24), c'est-à-dire à celle-ci :

$$r_{k+1} - (a+b) + ab\,\frac{1}{r_k} = 0. \tag{26}$$

Nous avons donc aussi

$$r_{k+2} - (a+b) + ab\,\frac{1}{r_{k+1}} = 0. \tag{27}$$

En résolvant les deux équations (26) et (27) par rapport à $(a+b)$ et ab, nous trouvons

$$\left\{\begin{aligned} a+b &= \frac{r_{k+1}(r_{k+2}-r_k)}{r_{k+1}-r_k}, \\ ab &= \frac{r_k r_{k+1}(r_{k+2}-r_{k+1})}{r_{k+1}-r_k}. \end{aligned}\right. \tag{28}$$

Il est bien entendu toujours que ces équations s'appliquent aux limites pour k infini.

Si les quantités r sont convergentes, ces deux expressions de $a+b$ et ab tendent vers la forme $\frac{0}{0}$, et d'ailleurs il n'y a pas lieu dans ce cas d'avoir recours à une autre méthode que celle précédemment exposée.

Mais si, au contraire, il y a deux racines a et b d'égal module maximum, les quantités r cessant de converger vers une certaine limite, on pourra appliquer ces formules (28).

Comme exemple extrêmement simple, prenons la série

$$u_{k+2} + u_{k+1} + u_k = 0,$$

qui donne en particulier

$$(u) \qquad 1,\quad 2,\quad -3,\quad 1,\quad 2,\quad -3,\quad 1,\quad 2,\quad -3,\quad \ldots$$

pour la série u.

La série des rapports r sera

$$(r) \qquad 2,\quad -\frac{3}{2},\quad -\frac{1}{3},\quad 2,\quad -\frac{3}{2},\quad -\frac{1}{3},\quad \ldots,$$

et, en appliquant les formules (28), nous trouvons pour les seconds membres les quantités constantes -1 et $+1$. Donc il en est encore ainsi à la limite, et nous avons

$$a+b=-1, \quad ab=1,$$

relations bien connues qui déterminent les racines imaginaires cubiques de l'unité.

Il n'est pas nécessaire ici de passer à la limite, et les quantités se trouvent constantes, parce que justement les racines en question sont les seules que possède l'équation répondant à la série (u).

Nous avons pris un cas particulier tel que celui-là pour simplifier les calculs numériques et rendre néanmoins l'exemple assez frappant. On voit en effet que les quantités r, par elles-mêmes, ne donneraient rien, puisqu'elles ne sont pas convergentes, tandis que les formules (28) fournissent un résultat.

14. Il peut être assez intéressant de donner à la formule (23) une forme dans laquelle entrent les conditions initiales, de même qu'à la relation (9) nous avons pu donner la forme (10).

Pour cela, écrivons cette formule (23)

$$u_{k+2}\psi_{a,b}(u)=[(a+b)u_{k+1}-abu_k]\psi_{a,b}(u).$$

Si nous donnons successivement à k les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots$, et si nous cherchons à introduire seulement dans le second membre les termes u_1 et u_0, nous trouverons

$$u_2\psi_{a,b}(u)=\left(\frac{a^2-b^2}{a-b}u_1-abu_0\right)\psi_{a,b}(u),$$
$$u_3\psi_{a,b}(u)=\left(\frac{a^3-b^3}{a-b}u_1-ab\frac{a^2-b^2}{a-b}u_0\right)\psi_{a,b}(u),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Il est facile de généraliser à la manière ordinaire et de démontrer qu'on a

$$(29)\qquad u_k\psi_{a,b}(u)=(U_k u_1-abU_{k-1}u_0)\psi_{a,b}(u),$$

$U_k, U_{k-1}, \ldots$ étant les fonctions U de M. Lucas, qui se rapportent à l'équation $(x-a)(x-b)=0$.

Autres propriétés des séries u.

15. *Les différences Δu des termes d'une série u forment encore une série de la même famille.*

Soit en effet une série u, avec la loi de récurrence

$$u_{k+n} + p_1 u_{k+n-1} + \ldots + p_n u_k = 0.$$

Nous aurons aussi

$$u_{k+n+1} + p_1 u_{k+n} + \ldots + p_n u_k = 0,$$

et, par soustraction,

$$(u_{k+n+1} - u_{k+n}) + p_1(u_{k+n} - u_{k+n-1}) + \ldots + p_n(u_{k+1} - u_k) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(30) \qquad \Delta u_{k+n} + p_1 \Delta u_{k+n-1} + \ldots + p_n \Delta u_k = 0.$$

Corollaire.—*Les différences d'ordres quelconques $\Delta^2 u, \Delta^3 u, \ldots$ forment encore des séries de la même famille.*

Par exemple, si, comme au n° 5, nous reprenons la série

(u) 1, 2, 9, 22, 77, 210, 673, 1934, 5973, ...,

qui correspond à l'équation

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0,$$

les séries suivantes,

(Δu)	1,	7,	13,	55,	133,	463,	...,
$(\Delta^2 u)$	6,	6,	42,	78,	330,	798,	...,
$(\Delta^3 u)$	+ 0,	36,	36,	252,	468,	1980,	...,
....							,

correspondront aussi à la même équation.

Sous forme symbolique, l'équation de récurrence

$$u_k f(u) = 0$$

étant donnée, on peut dire qu'il est permis d'opérer par Δ, Δ^2, ..., Δ^q,... sur cette équation et d'en déduire en général

$$(31) \qquad \Delta^q u_k f(u) = 0.$$

16. *Si une série u correspond à l'équation $f(x) = 0$, elle correspond en même temps à toutes les équations telles que*

$$f(x) \times \varphi(x) = 0,$$

$\varphi(x)$ étant un polynôme entier quelconque.

En effet, posons $F(x) = f(x) \times \varphi(x)$. Toutes les racines de l'équation $f(x) = 0$ sont en même temps racines de l'équation $F(x) = 0$. Donc, en raisonnant exactement comme nous l'avons fait au n° 2, mais appliquant seulement le calcul aux racines de $f(x) = 0$, nous obtiendrons

$$(32) \qquad u_k F(u) = 0,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Réciproquement, s'il arrive qu'une même série u satisfasse à la fois à deux lois de récurrence distinctes

$$u_k F(u) = 0, \quad u_k F_1(u) = 0,$$

c'est que les deux polynômes $F(x)$ et $F_1(x)$ ont un certain diviseur commun $f(x)$.

Si $u_k F_1(u) = 0$ est la loi de récurrence du moindre nombre de termes que présente la série u, alors $F(x)$ est un multiple de $F_1(x)$.

Par exemple, la série de Fibonacci

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad \ldots$$

satisfait aux deux lois $u_{k+3} - 2u_{k+1} - u_k = 0$, $u_{k+3} - 2u_{k+2} + u_k = 0$. Donc les deux polynômes $x^3 - 2x - 1$, $x^3 - 2x^2 + 1$ ont un diviseur commun. Ils sont tous deux multiples de $x^2 - x - 1$, et, effectivement, la loi de récurrence la plus simple que présente la série ci-dessus est

$$u_{k+2} - u_{k+1} - u_k = 0.$$

Cette proposition conduit à diverses conséquences assez dignes

d'intérêt. S'il arrive, par exemple, qu'une série u répondant à $f(x)=0$ soit périodique, c'est-à-dire si l'on a $u_{k+n}=u_k$, c'est que toutes les racines de $f(x)=0$ appartiennent à l'équation binôme $x^n=1$.

D'après ce qui précède, on voit que, une loi de récurrence étant donnée, on peut en déduire une infinité d'autres en ajoutant à l'équation $f(x)=0$ autant de racines qu'on voudra. En d'autres termes, il est licite de multiplier l'équation symbolique de récurrence par un polynôme entier en u.

Introduisons q fois la racine 1. Cela nous donnera

$$u_k f(u)(u-1)^q=0$$

ou

$$(33)\qquad (u-1)^q u_k f(u)=0,$$

c'est-à-dire, en vertu d'une autre formule symbolique bien connue,

$$\Delta^q u_k f(u)=0.$$

Nous avons donc ainsi une nouvelle démonstration de la proposition qui fait l'objet du numéro précédent.

Ainsi, prendre les différences d'ordre q ou multiplier l'équation de récurrence par $(u-1)^q$, c'est exactement la même chose. Ces remarques peuvent parfois servir à retrouver la loi de récurrence d'une série donnée numériquement.

Soit, par exemple,

$$(u)\qquad 1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 11,\ 27,\ 43,\ \ldots.$$

Formons les différences

$$(\Delta u)\qquad 1,\ 1,\ 4,\ 4,\ 16,\ 16,\ \ldots.$$

On vérifie immédiatement ici la relation

$$u_{k+2}=4u_k,$$

qui correspond à l'équation

$$x^2-4=0.$$

Or on n'a pu introduire, en prenant les différences, que la racine

$x = 1$. C'est donc parmi les multiples de $x^2 - 4$ qu'il faut chercher le premier membre de l'équation à laquelle répond la série u. Si on effectue en effet le produit $(x^2 - 4)(x - 1) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, on peut vérifier que la série u satisfait à l'équation

$$u_{k+3} - u_{k+2} - u_{k+1} + 4u_k = 0.$$

17. Reprenons les fonctions $\varphi_a(x), \varphi_b(x), \ldots$ considérées au n° **4**. Nous savons qu'on a

$$f'(x) = \varphi_a(x) + \varphi_b(x) + \ldots.$$

Or, la formule (10), appliquée aux diverses racines, nous donne

$$u_k \varphi_a(u) = a^k u_0 \varphi_a(u),$$
$$u_k \varphi_b(u) = b^k u_0 \varphi_b(u),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc, par addition,

$$u_k f'(u) = u_0[a^k \varphi_a(u) + b^k \varphi_b(u) + \ldots], \tag{34}$$

formule intéressante en ce qu'elle donne une expression de la dérivée symbolique $f'(u)$ en fonction des racines.

18. *Si $\psi(x)$ est une fonction entière quelconque et si l'on forme l'expression symbolique $u_k \psi(u) = v_k$, la série v sera de même famille que la série u.*

Soit en effet, pour simplifier, sans diminuer en rien la généralité du raisonnement,

$$\psi(x) = Q_3 x^3 + Q_2 x^2 + Q_1 x + Q_0.$$

Alors

$$v_k = u_k \psi(u) = Q_3 u_{k+3} + Q_2 u_{k+2} + Q_1 u_{k+1} + Q_0 u_k.$$

Écrivant cette équation pour un nombre suffisant de valeurs consécutives de k, multipliant par les coefficients de la fonction $f(u)$ et ajoutant, on aura

$$v_k f(v) = Q_3 u_{k+3} f(u) + Q_2 u_{k+2} f(u) + Q_1 u_{k+1} f(u) + Q_0 u_k f(u) = 0,$$

puisque tous les termes du second membre s'annulent séparément.

D'une manière générale, u étant une série quelconque, récurrente ou non, si l'on pose

$$u_k \cdot \psi(u) = v_k,$$

le calcul ci-dessus nous montre que nous avons

$$(34) \qquad v_k \chi(v) = u_k \psi(u) \chi(u),$$

$\psi(x)$ et $\chi(x)$ représentant deux polynômes entiers quelconques.

Comme la multiplication symbolique dans le second membre est commutative, on a encore

$$v_k \chi(v) = v'_k \psi(v'),$$

si l'on pose

$$u_k \psi(u) = v'_k.$$

Vérifions sur l'exemple quelconque

(u) 1, 7, 5, 3, 9, 2, 11, 15,

en supposant $\psi(x) = 2x + 1$, $\chi(x) = x^2 - x + 3$.

Alors les fonctions $v_k = u_k \psi(u)$, $v'_k = u_k \chi(u)$ sont respectivement

(v) 15, 17, 11, 21, 13, 24, 41,

(v') 1, 9, 21, 2, 36, 10,

et l'on a, en formant soit $v \chi(v)$, soit $v' \psi(v')$,

39, 61, 25, 74, 56,

résultat qui est le même dans les deux cas.

Construction de quelques séries géométriques.

19. Dans tout ce qui précède, nous n'avons pas cru nécessaire d'insister sur la construction des termes des diverses séries considérées. L'application des principes les plus simples de la méthode des équipollences permettra toujours de le faire avec une grande facilité. Mais, en terminant cette étude, il nous paraît intéressant d'examiner sur quelques exemples fort simples la loi de formation des

termes de certaines séries, provenant presque toutes d'équations du second degré.

Les théories qui précèdent permettront parfois de trouver des solutions de questions purement géométriques, et, d'autre part, nous verrons se généraliser et s'éclaircir en même temps, par la représentation géométrique, la notion analytique de telle ou telle série envisagée d'ordinaire au point de vue arithmétique ou algébrique seulement.

Il est à remarquer qu'on peut engendrer souvent certaines séries géométriques, au moyen d'une équation dont les coefficients et les racines sont réels, si l'on se donne des conditions initiales imaginaires. D'autres fois, au contraire, ce sont les coefficients ou les racines qui peuvent être imaginaires. C'est ce qu'on distinguera parfaitement dans les exemples qui vont suivre.

20. Prenons l'équation

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

qui engendre la *série de* FERMAT, généralement écrite sous la forme

$$0, \quad 1, \quad 3, \quad 7, \quad 15, \quad 31, \quad 63, \quad \ldots.$$

La loi de récurrence est

$$u_{k+2} = 3u_{k+1} - 2u_k.$$

Les racines de l'équation sont 1 et 2, et la formule de récurrence peut effectivement s'écrire sous l'une des deux formes

$$u_{k+2} - 2u_{k+1} = u_{k+1} - 2u_k, \quad u_{k+2} - u_{k+1} = 2(u_{k+1} - u_k),$$

qui donnent

$$u_{k+1} - 2u_k = u_1 - 2u_0, \quad u_{k+1} - u_k = 2^k(u_1 - u_0).$$

La loi de succession des points u est évidente. Quels que soient les points initiaux u_0, u_1, tous les points u_2, u_3, ... sont en ligne droite, et les segments successifs qu'ils forment sont tels, que chacun de ces segments est double de celui qui le précède.

La limite du rapport des deux droites Ou_{k+1}, Ou_k, O étant l'ori-

gine, tend vers 2 lorsque k tend vers l'infini positif, et 2 est effectivement la racine de plus grand module.

Si l'on fait tendre k vers l'infini négatif, les points u, au lieu de s'éloigner à l'infini comme tout à l'heure, tendent à se rapprocher infiniment les uns des autres et de la limite commune indiquée par $2u_0 - u_1$. C'est ce que montre immédiatement la construction inverse.

Dans ce cas, et par le seul fait que les points u tendent vers une limite commune, la limite du rapport $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ est égale à 1, qui est la racine de plus petit module de l'équation.

Remarques. — I. Toutes les fois que dans une équation du second degré *à coefficients réels* $x^2 + p_1 x + p_2 = 0$ il y a une racine égale à 1, c'est-à-dire toutes les fois que l'on a

$$1 + p_1 + p_2 = 0,$$

les points $u_0, u_1, u_2, \ldots$ qui figurent la série correspondante sont tous en ligne droite.

II. Toutes les fois que dans une équation de degré quelconque n à coefficients réels il y a une racine égale à 1, si l'on se donne les n points initiaux en ligne droite, tous les points qui figurent la série correspondante seront sur cette même droite.

21. Soit l'équation

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

génératrice de la *série de* Fibonacci, qu'on écrit généralement

$$0, \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad 21, \quad \ldots.$$

La loi de récurrence est

$$u_{k+2} = u_{k+1} + u_k,$$

et les racines de l'équation sont

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

En ajoutant à l'équation la racine 1, le premier membre devient

$$x^3 - 2x^2 + 1,$$

d'où la nouvelle loi de récurrence

$$u_{k+3} = 2u_{k+2} - u_k,$$

à laquelle doit satisfaire aussi la série.

De là une construction plus simple que celle indiquée par la première forme : on construit sur Ou_0, Ou_1 le parallélogramme $Ou_0u_2u_1$; on prolonge u_0u_2 d'une longueur égale en u_2u_3, puis u_1u_3 d'une longueur égale en u_3u_4, puis u_2u_4 en u_4u_5, et ainsi de suite indéfiniment. La construction inverse donnera les points d'indices négatifs : ainsi la droite u_2u_1 sera prolongée d'une longueur égale à elle-même en u_1u_{-1}, u_1u_0 en u_0u_{-2}, u_0u_{-1} en $u_{-1}u_{-3}$, et ainsi de suite.

En faisant la figure, on voit tout de suite que les points u_{+k} s'éloignent à l'infini dans une certaine direction et dans le même sens, et que les points u_{-k} s'éloignent à l'infini dans une autre direction, en se distribuant alternativement dans un sens et dans l'autre.

Le rapport $\frac{Ou_{k+1}}{Ou_k}$, de même que celui des segments $u_{k+1}u_{k+2}$ et u_ku_{k+1}, tend vers $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ pour les valeurs positives de k, et vers $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ pour les valeurs négatives de k.

On a

$$u_{k+1} - bu_k = a^k(u_1 - bu_0), \quad u_{k+1} - au_k = b^k(u_1 - au_0).$$

Donc toutes les directions $u_1 - bu_0$, $u_2 - bu_1$, ... sont parallèles et il en est de même pour $u_1 - au_0$, $u_2 - au_1$, ...

Pour k positif et infiniment grand, u_{k+1} et bu_k ont la même direction, qui est celle de $u_1 - bu_0$ ou de $a(u_1 - bu_0) = au_1 + u_0$, puisque $ab = -1$.

Pour k négatif et infiniment grand, u_{k+1} et au_k ont la même direction, qui est celle de $u_1 - au_0$ ou de $b(u_1 - au_0) = bu_1 + u_0$.

On obtiendra donc les deux directions limites par la construction

suivante : sur la direction Ou_1 on portera

$$OP = Ou_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad OQ = Ou_1 \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

puis on formera les parallélogrammes Ou_0RP, Ou_0SQ. Les deux droites OR et OS seront respectivement les directions limites des u positifs et des u négatifs.

Remarque. — Toutes les fois, dans une équation quelconque, que la racine a de plus grand (ou de plus petit) module est réelle et différente de l'unité, les points u à indices positifs (ou négatifs) tendent vers une certaine direction limite. Cette direction est donnée par $u_0\,\varphi_a(u)$. Cela résulte immédiatement de la relation

$$u_k \varphi_a(u) = a^k u_0 \varphi_a(u),$$

en généralisant ce qui précède.

22. Soit l'équation

$$x^2 - 2x - 1 = 0,$$

qui engendre en particulier la *série de* Pell,

$$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, \ldots,$$

dont la loi de récurrence est

$$u_{k+2} - 2u_{k+1} - u_k = 0.$$

Nous avons pour racines de l'équation

$$a = 1 + \sqrt{2}, \quad b = 1 - \sqrt{2}.$$

Appelons en général u'_k le point symétrique du point u_k par rapport à l'origine O. Nous avons la construction suivante, connaissant u_0 et u_1 : prolonger la droite $u'_0 u_1$ d'une longueur égale à elle-même en $u_1 u_2$, puis $u'_1 u_2$ en $u_2 u_3$, puis $u'_2 u_3$ en $u_3 u_4$, et ainsi de suite. La construction inverse, qui s'indique d'elle-même, nous donnera les points d'indices négatifs. Il se présentera des particularités analogues à celles de l'exemple précédent, quant à la disposition générale des points u.

Le rapport $\frac{Ou_{k+1}}{Ou_k}$, de même que $\frac{u_{k+1}u_{k+2}}{u_k u_{k+1}}$, tend vers $1+\sqrt{2}$, ou vers $1-\sqrt{2}$, suivant qu'il s'agit des points à indices positifs ou à indices négatifs.

La direction limite des droites Ou_{+k} est celle de $u_1 - bu_0$ ou de $a(u_1 - bu_0) = au_1 + u_0$; celle des droites Ou_{-k} est $bu_1 + u_0$: d'où une construction tout à fait analogue à celle de l'exemple qui précède.

23. Prenons l'équation

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Elle donne lieu à la loi de récurrence

$$u_{k+2} + u_{k+1} + u_k = 0.$$

Les points u_0, u_1 étant donnés, on tire de là cette construction : prendre le milieu m de $u_0 u_1$; joindre mO et prolonger cette droite de deux fois sa longueur en Ou_2; prendre le milieu m' de $u_1 u_2$ et prolonger $m'O$ de deux fois sa longueur en Ou_3; il est visible que le point u_3 ainsi obtenu coïncide avec u_0, et, en continuant ainsi, la série des points est indéfiniment

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_0,\ \ldots.$$

Cela vient de ce que le premier membre de l'équation est facteur de $x^3 - 1$, ce qui entraîne la périodicité de la série.

L'indétermination de la limite du rapport $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ provient ici de ce que nous nous trouvons précisément dans le cas de deux racines d'égal module, étudié plus haut au n° 13.

Les racines de l'équation donnée sont en effet les racines cubiques imaginaires de l'unité.

24. Soit l'équation du second degré à coefficients imaginaires $x^2 + p_1 x + p_2 = 0$; nous supposerons qu'elle ait l'unité pour une de ses racines, d'où la condition $1 + p_1 + p_2 = 0$. Alors il est visible que l'autre racine est p_2.

En l'appelant λ, l'équation peut s'écrire

$$(x-1)(x-\lambda)=x^2-(1+\lambda)x+\lambda=0,$$

et la loi de récurrence de la série qui en résulte est

$$u_{k+2}=(1+\lambda)u_{k+1}-\lambda u_k,$$

d'où l'on tire encore

$$u_{k+2}-\lambda u_{k+1}=u_{k+1}-\lambda u_k,\quad u_{k+2}-u_{k+1}=\lambda(u_{k+1}-u_k).$$

Cette dernière forme de la loi de récurrence fournit la construction que voici : connaissant u_0, u_1, on forme le triangle $u_0u_1u_2$ tel que $\frac{u_1u_2}{u_0u_1}=\lambda$, puis les triangles $u_1u_2u_3$, $u_2u_3u_4$, ..., tous directement semblables au premier. En continuant en sens inverse la série des triangles semblables, on aura les points à indices négatifs.

Si $\operatorname{mod}\lambda<1$, les points u_{+k} tendent vers une certaine limite ν et les points u_{-k} s'éloignent indéfiniment.

Si $\operatorname{mod}\lambda>1$, c'est exactement l'inverse qui se produit.

Lorsque $\operatorname{mod}\lambda=1$, nous avons indétermination.

Supposons $\operatorname{mod}\lambda<1$ et cherchons la position limite ν dont nous venons de parler. Nous savons qu'on a

$$u_{k+1}-u_k=\lambda^k(u_1-u_0).$$

De là

$$\begin{aligned}u_k-u_{k-1}&=\lambda^{k-1}(u_1-u_0),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ u_2-u_1&=\lambda(u_1-u_0),\\ u_1-u_0&=u_1-u_0,\end{aligned}$$

et, par addition des k dernières égalités,

$$u_k-u_0=\frac{1-\lambda^k}{1-\lambda}(u_1-u_0).$$

Donc, en faisant tendre k vers ∞, il nous reste

$$\lim u_k=\nu=\frac{u_1-\lambda u_0}{1-\lambda}=\frac{u_2-\lambda u_1}{1-\lambda}=\ldots.$$

Cela nous donne encore

$$\lambda = \frac{u_1 - \nu}{u_0 - \nu} = \frac{u_2 - \nu}{u_1 - \nu} = \frac{u_3 - \nu}{u_2 - \nu} = \cdots,$$

c'est-à-dire que la position limite ν est le sommet commun des triangles semblables $\nu u_0 u_1$, $\nu u_1 u_2$, $\nu u_2 u_3$, ... Les points u sont donc distribués sur une spirale logarithmique dont ν est le pôle. Dans le sens positif, ils se rapprochent de plus en plus de ce pôle; dans le sens négatif, ils s'en éloignent au contraire sans limite, mais le rapport $\frac{Ou_{k+1}}{Ou_k}$ tend alors à se rapprocher de plus en plus de $\frac{\nu u_{k+1}}{\nu u_k}$ ou de λ.

Il suffit d'alterner le sens positif et le sens négatif pour avoir les conclusions relatives au cas de $\operatorname{mod}\lambda > 1$.

Et lorsque $\operatorname{mod}\lambda = 1$, il est clair que les points u se distribuent indéfiniment sur une ligne polygonale régulière, et par conséquent sur une certaine circonférence, sans tendre vers aucune limite et sans que le rapport $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ tende non plus, lui aussi, vers une limite quelconque. Le centre de cette circonférence est déterminé par la même valeur ν que ci-dessus; mais aucun des points ne saurait s'en approcher.

25. Soit l'équation

$$x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0.$$

Elle a pour racines $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$. La loi de récurrence correspondante est

$$u_{k+2} = \frac{5}{6}u_{k+1} - \frac{1}{6}u_k.$$

Si nous prenons, comme au n° 22, les points u'_k symétriques de u_k par rapport à l'origine, nous avons la construction qui consiste à joindre $u'_0 u_1$ et à porter sur cette droite $u'_0 u_2 = \frac{5}{6} u_0 u_1$; de même $u'_1 u_3 = \frac{5}{6} u'_1 u_2$, et ainsi de suite. La construction inverse, qui s'indique d'elle-même, donnera les points à indices négatifs.

On reconnait aisément que les points à indices positifs se rapprochent indéfiniment de l'origine et que les points à indices négatifs s'éloignent au contraire à l'infini. Le rapport d'un terme au précédent, $\frac{u_{k+1}}{u_k}$, tend vers $\frac{1}{2}$ pour $k=+\infty$ et vers $\frac{1}{3}$ pour $k=-\infty$.

La relation de récurrence nous donne

$$u_{k+1}-\frac{1}{3}u_k=\frac{1}{2^k}\left(u_1-\frac{1}{3}u_0\right),$$

$$u_{k+1}-\frac{1}{2}u_k=\frac{1}{3^k}\left(u_1-\frac{1}{2}u_0\right).$$

La direction limite de Ou_{+k} est conséquemment celle de $u_1-\frac{1}{3}u_0$, et la direction limite de Ou_{-k} est celle de $u_1-\frac{1}{2}u_0$.

Des deux relations précédentes, nous tirons par soustraction, après avoir multiplié la première par 3 et la seconde par 2,

$$u_{k+1}=\frac{1}{2^k}(3u_1-u_0)-\frac{1}{3^k}(2u_1-u_0).$$

Posons

$$3u_1-u_0=l,\quad 2u_1-u_0=-m;$$

remplaçons l'indice entier k par un paramètre t que nous supposerons variable d'une manière continue et le point u_{k+1} par un point courant u. Il viendra

$$u=\frac{1}{2^t}l+\frac{1}{3^t}m,$$

équipollence d'une courbe sur laquelle sont situés tous les points u. On vérifie aisément que cette courbe est tangente à la direction l à l'origine et qu'elle a une branche parabolique infinie le long de laquelle la tangente approche de plus en plus de la direction m.

Remarque. — Ce qui précède peut s'étendre à toutes les équations du second degré. Nous avons en effet, a et b étant les racines,

$$u_{k+1}-bu_k=a^k(u_1-bu_0),$$

$$u_{k+1}-au_k=b^k(u_1-au_0),$$

et de là, par soustraction,

$$(a-b)u_k=a^k(u_1-bu_0)-b^k(u_1-au_0).$$

Remplaçant k par t, u_k par u, et posant

$$\frac{u_1 - bu_0}{a-b} = l, \quad \frac{u_1 - au_0}{a-b} = -m,$$

il vient

$$u = a^t l + b^t m,$$

équipollence d'une courbe qui contient tous les points u. En donnant au paramètre t toutes les valeurs entières, on obtient sur cette courbe les points u_k que nous avons constamment considérés.

Pour des racines réelles et positives, on voit aisément que l'équation de cette courbe en coordonnées rectilignes est de la forme

$$y = Cx^\lambda.$$

Nous laissons au lecteur le soin d'appliquer cela aux divers exemples qui précèdent et de déterminer les courbes des u dans ces divers cas.

26. Soit enfin une équation de degré quelconque, dont tous les termes, à l'exception du premier, ont même coefficient et même signe, et qui, en outre, admet la racine $+1$, c'est-à-dire

$$f(x) = nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - x - 1 = 0.$$

On en déduit la loi de récurrence

$$u_{k+n} = \frac{1}{n}(u_{k+n-1} + \ldots + u_{k+1} + u_k),$$

c'est-à-dire qu'en prenant le centre de gravité du système formé par n points consécutifs on obtient le point qui suit le dernier d'entre eux.

Cette construction conduit à une limite pour les points u_k, ce qui tient à ce que la racine $+1$ est précisément celle de plus grand module. On peut se proposer de rechercher cette limite.

En divisant $f(x)$ par $x-1$, on trouve pour quotient

$$\varphi_1(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \ldots + 3x^2 + 2x + 1.$$

Donc la relation $u_k \varphi_a(u) = a^k u_0 \varphi_a(u)$ nous donnera, a étant

égal à 1,

$$\begin{aligned} &nu_{k+n-1}+(n-1)u_{k+n-2}+\ldots+2u_{k+1}+u_k\\ &=nu_{n-1}+(n-1)u_{n-2}+\ldots+2u_1+u_0. \end{aligned}$$

Or, lorsque k croit indéfiniment, tous les u du premier membre tendent à se rapprocher indéfiniment de leur limite commune v. Donc il vient

$$\begin{aligned} &[n+(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1]v\\ &=nu_{n-1}+(n-1)u_{n-2}+\ldots+2u_1+u_0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour obtenir le point v, il suffit de prendre au hasard n points consécutifs, d'appliquer au premier un poids 1, au deuxième un poids 2, etc., et de déterminer le centre de gravité de ce système.

S'il s'agit simplement d'une équation du troisième degré, nous avons une construction très simple : étant donné un triangle $u_0u_1u_2$, on en détermine le centre de gravité u_3, puis le centre de gravité u_4 du triangle $u_1u_2u_3$, et ainsi de suite.

La limite des points u sera donnée par la formule

$$v=\frac{1}{6}(3u_2+2u_1+u_0),$$

qui se traduit par la construction suivante : porter, à partir de u_0, $u_0f=\frac{3}{4}u_0u_2$, joindre fu_1, mener par u_3 (centre de gravité de $u_0u_1u_2$) une parallèle u_3z à u_0u_2 ; la rencontre des droites fu_1 et u_3z donnera le point limite v.

En prenant ce point pour origine, on aurait la loi de récurrence

$$3u_{k+2}+2u_{k+1}+u_k=0,$$

et l'on pourrait tirer de là, comme plus haut, l'équipollence de la courbe des u, sorte de spirale ayant l'origine v pour point asymptotique.

SUR LES AIRES DES COURBES ANALLAGMATIQUES (¹);

PAR M. V. LIGUINE,
Professeur à l'Université d'Odessa.

1. On peut définir une courbe anallagmatique comme l'enveloppe d'une série de cercles décrits de tous les points d'une certaine courbe (a) et qui coupent orthogonalement un cercle fixe (p). Le nom d'*anallagmatiques* a été donné à ces courbes par M. Moutard, d'après leur propriété remarquable de se transformer en elles-mêmes par rayons vecteurs réciproques, quand on choisit le centre du cercle fixe (p) pour pôle et le carré de son rayon pour paramètre de transformation, ou, en d'autres termes, quand on prend le cercle (p) pour cercle d'inversion. On appelle *déférente* la courbe (a), lieu des centres des cercles enveloppés.

Depuis les importants travaux de M. Moutard, qui constituent le point de départ de la théorie générale de ces courbes, les anallagmatiques n'ont pas cessé d'attirer l'attention des géomètres. Il ne sera donc peut-être pas dépourvu d'intérêt d'exposer quelques propriétés relatives aux aires de ces courbes, qui ne paraissent pas encore avoir été énoncées et qui, je tiens à le constater, m'ont été suggérées en grande partie par l'étude du beau Mémoire de M. Mannheim, *Sur les arcs des courbes planes ou sphériques considérées comme enveloppes de cercles* (²).

Les aires des anallagmatiques dépendent en général de transcendantes compliquées. Mais il existe quelques relations générales très simples entre l'aire d'une anallagmatique et celle de la podaire de sa déférente prise par rapport au centre du cercle fixe (p), relations qui permettent, dans beaucoup de cas particuliers, de déterminer certaines parties des aires des anallagmatiques. Ce sont ces relations que je me propose d'établir dans cette Note.

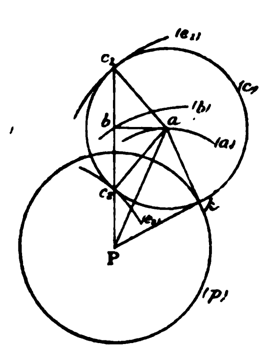
2. Soient (p) (*fig.* 1) un cercle fixe, P son centre, α son rayon et

(¹) Les principaux résultats de cette Note ont été communiqués à la session d'Alger de l'Association française pour l'avancement des Sciences.

(²) *Journal de Mathématiques*, 2ᵉ série, t. VII, p. 121, année 1862.

(a) une courbe fixe quelconque; imaginons une série de cercles décrits de tous les points de (a) et coupant orthogonalement la circonférence (p). L'enveloppe de tous ces cercles variables sera une courbe qui se compose de deux branches (e_1), (e_2). M. Mannheim

Fig. 1.



a démontré (¹) qu'en prenant le point P pour pôle cette enveloppe a pour équation polaire

$$(1) \qquad r^2 - 2\Omega r + \alpha^2 = 0,$$

où r est le rayon vecteur et Ω une fonction de l'angle polaire ω telle que la courbe exprimée dans le même système de coordonnées par l'équation

$$(2) \qquad \rho = \Omega$$

représente la podaire (b) de la courbe (a) relativement au point P.

En effet (²), soit (c) un des cercles enveloppés et a son centre; cherchons les points où (c) touche son enveloppe. Ces points sont les intersections de (c) avec un cercle infiniment voisin (c'), qui a un point a' de (a), infiniment voisin de a, pour centre, et qui coupe orthogonalement le cercle (p). Ce dernier cercle étant orthogonal aux cercles (c) et (c'), son centre P appartient à l'axe radical de (c), (c'), et, comme cet axe radical doit aussi être perpendiculaire à la ligne des centres aa', il faut, pour avoir cet axe,

(¹) *Journal de Mathématiques*, 2ᵉ série, t. VII, p. 121; 1862.
(²) Je reproduis ici l'élégante démonstration de M. Mannheim.

abaisser du point P une perpendiculaire sur aa'. A la limite, la droite aa' devient tangente à la courbe (a) en a, et la perpendiculaire Pb, abaissée de P sur cette tangente, coupe le cercle (c) aux deux points c_1, c_2, où (c) touche son enveloppe (e_1), (e_2).

Le triangle $c_1 a c_2$ étant isoscèle, on a

$$Pc_1 = Pb + bc_1 = Pb + bc_2 = Pb + Pb - Pc_2 = 2Pb - Pc_2$$

ou

$$(3) \qquad Pc_1 + Pc_2 = 2Pb.$$

D'autre part, les cercles (p), (c) se coupant orthogonalement, le rayon Pk de (p) est tangent à (c) au point de leur intersection k, et l'on a, d'après un théorème connu,

$$(4) \qquad Pc_1 . Pc_2 = \overline{Pk}^2.$$

Mais $Pk = \alpha$ et $Pb = \rho = \Omega$, puisque la droite Pb est le rayon vecteur du point b de la podaire (b) de (a), représentée par l'équation (2). On conclut donc des équations (3) et (4) que les longueurs Pc_1, Pc_2 sont les racines de l'équation (1) répondant à une valeur déterminée de l'angle polaire ω. En faisant varier le point a sur (a), ou, ce qui revient au même, le point b sur (b), et par suite la valeur de ω, les points c_1, c_2 décrivent la courbe (e_1), (e_2). Par conséquent, l'équation polaire de cette courbe est bien l'équation (1).

On voit donc, en se reportant à notre définition des anallagmatiques, que toutes ces courbes sont comprises dans l'équation (1), l'équation (2) étant l'équation de la podaire de la déférente par rapport au centre du cercle fixe.

La forme de l'équation (1) montre en outre qu'en y changeant ρ en $\frac{\alpha^2}{\rho'}$ on obtient la même courbe, ce qui constitue une autre propriété fondamentale des anallagmatiques, mentionnée précédemment.

3. Nous avons donc à nous occuper des aires des courbes représentées par l'équation (1).

Soient $r_{1,\omega'}$ et $r_{2,\omega'}$ les valeurs des racines de cette équation répondant à une même valeur déterminée ω' de l'angle ω et $r_{1,\omega''}$, $r_{2,\omega''}$ les valeurs de ces racines répondant à une autre valeur déterminée ω'' de ω. Considérons les aires des deux secteurs limités, l'un par la courbe et les rayons vecteurs $r_{1,\omega'}$, $r_{1,\omega''}$, l'autre par la courbe et les rayons vecteurs $r_{2,\omega'}$, $r_{2,\omega''}$; nous nommerons ces aires *correspondantes,* et nous les désignerons respectivement par A_1 et A_2. On a

$$A_1 = \frac{1}{2}\int_{\omega'}^{\omega''} r_1^2\,d\omega,\quad A_2 = \frac{1}{2}\int_{\omega'}^{\omega''} r_2^2\,d\omega,$$

$$r_1 = \Omega + \sqrt{\Omega^2 - \alpha^2},\quad r_2 = \Omega - \sqrt{\Omega^2 - \alpha^2},$$

d'où l'on déduit facilement.

$$A_1 = \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega^2 d\omega - \frac{1}{2}\alpha^2(\omega'' - \omega') + \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega\sqrt{\Omega^4 - \alpha^2}\,d\omega,$$

$$A_2 = \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega^2 d\omega - \frac{1}{2}\alpha^2(\omega'' - \omega') - \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}\,d\omega,$$

ce qui donne pour la différence et la somme des aires correspondantes d'une anallagmatique

$$(5)\qquad A_1 - A_2 = 2\int_{\omega'}^{\omega''} \Omega\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}\,d\omega,$$

$$(6)\qquad A_1 + A_2 = 2\int_{\omega'}^{\omega''} \Omega^2 d\omega - \alpha^2(\omega'' - \omega').$$

4. Les formules (5) et (6) peuvent être obtenues facilement par des considérations géométriques.

Considérons les aires correspondantes infiniment petites dA_1 et dA_2 comprises entre chacune des branches (e_1), (e_2), la corde de contact Pc_1 et la corde de contact du cercle (c'), infiniment voisin de (c). On a

$$dA_1 = \frac{1}{2}\overline{Pc_1}^2.d\omega,\quad dA_2 = \frac{1}{2}\overline{Pc_2}^2.d\omega.$$

Donc

$$dA_1 - dA_2 = \frac{1}{2}\left(\overline{Pc_1}^2 - \overline{Pc_2}^2\right)d\omega = \frac{1}{2}(Pc_1 + Pc_2)(Pc_1 - Pc_2)\,d\omega,$$

ou, en vertu de l'équation (3),

$$dA_1 - dA_2 = Pb.c_1c_2d\omega.$$

Mais $c_1c_2 = 2bc_2$; donc

$$dA_1 - dA_2 = 2Pb.bc_2d\omega,$$

d'où, en intégrant entre les limites ω' et ω'', on trouve

$$A_1 - A_2 = 2\int_{\omega'}^{\omega''} Pb.bc_2d\omega.$$

Or, $Pb = \rho = \Omega$; en outre, les deux cercles (p) et (c) se coupant orthogonalement, on a

$$\begin{aligned}\overline{bc_2}^2 &= \overline{ac_2}^2 - \overline{ab}^2 = \overline{ak}^2 - \overline{ab}^2 \\ &= \overline{Pa}^2 - \overline{Pk}^2 - \overline{ab}^2 = \overline{Pb}^2 - \overline{Pk}^2 = \Omega^2 - \alpha^2.\end{aligned}$$

On retrouve ainsi la formule (5). Pour obtenir la formule (6), prenons la somme

$$dA_1 + dA_2 = \frac{1}{2}\left(\overline{Pc_1}^2 + \overline{Pc_2}^2\right)d\omega.$$

En vertu des relations (3) et (4), on trouve

$$\overline{Pc_1}^2 + \overline{Pc_2}^2 = 4\overline{Pb}^2 - 2Pc_1.Pc_2 = 4\overline{Pb}^2 - 2\alpha^2$$

et

$$dA_1 + dA_2 = 2\overline{Pb}^2.d\omega - \alpha^2 d\omega,$$

ou, en intégrant,

$$A_1 + A_2 = 2\int_{\omega'}^{\omega''} \overline{Pb}^2.d\omega - \alpha^2(\omega'' - \omega'),$$

expression identique à (6), puisque $Pb = \Omega$.

5. Occupons-nous de l'interprétation de la formule (6). L'intégrale $\int_{\omega'}^{\omega''} \Omega^2 d\omega$ qui y figure est le double de l'aire comprise entre la podaire (2) et les deux rayons vecteurs qui limitent les

aires correspondantes A_1 et A_2 de l'anallagmatique. Le dernier terme du second membre de l'équation (6) représente le double de l'aire du secteur circulaire détaché dans le cercle fixe (p) par les mêmes rayons vecteurs. Par conséquent, si l'on nomme la première aire, pour abréger, l'*aire correspondante de la podaire*, on peut, d'après l'équation (6), énoncer ces conclusions :

I. *La somme des aires correspondantes d'une anallagmatique est exprimable en aire correspondante de la podaire de la déférente; cette somme est donc exprimable en termes finis quand l'aire correspondante de la podaire de la déférente est exprimable en termes finis.*

La demi-somme des aires correspondantes d'une anallagmatique est égale à la différence du double de l'aire correspondante de la podaire de la déférente et de l'aire du secteur correspondant du cercle fixe.

L'équation (6) peut encore être présentée sous la forme

$$\left(\frac{1}{2}\int_{\omega'}^{\omega''} r_1^2\,d\omega - \frac{1}{2}\int_{\omega'}^{\omega''} \Omega^2\,d\omega\right) - \left(\frac{1}{2}\int_{\omega'}^{\omega''} \Omega^2\,d\omega - \frac{1}{2}\int_{\omega'}^{\omega''} r_2^2\,d\omega\right) = \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega^2\,d\omega - \alpha^2(\omega'' - \omega').$$

Les quantités entre parenthèses expriment les aires comprises entre chaque branche (e_1), (e_2) de l'anallagmatique, la podaire (b) et deux rayons vecteurs déterminés issus du pôle P. On a donc, en désignant ces aires par ε_1 et ε_2, la relation

$$(7) \qquad \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega^2\,d\omega - \alpha^2(\omega'' - \omega'),$$

d'où l'on conclut :

II. *La différence des aires comprises entre les deux branches d'une anallagmatique, la podaire de sa déférente et deux rayons vecteurs quelconques issus du centre du cercle fixe est exprimable en aire correspondante de la podaire de la déférente; cette différence est donc exprimable en termes*

finis quand l'aire correspondante de la podaire de la déférente est exprimable en termes finis.

Cette différence est égale au double de l'aire comprise entre la podaire, la circonférence fixe et les deux rayons vecteurs extrêmes issus du centre de cette circonférence.

M. Ribaucour, en considérant les aires N_1, N_2 comprises entre les deux branches de l'anallagmatique, les normales extrêmes et la déférente, a démontré la relation [1]

$$(8) \qquad N_1 - N_2 = \int_{\omega'}^{\omega''} \rho'^2 d\omega - \alpha^2(\omega'' - \omega'),$$

où ρ' est le rayon vecteur de la déférente issu du centre du cercle fixe. L'intégrale $\int_{\omega'}^{\omega''} \rho'^2 d\omega$ étant le double de l'*aire correspondante* de la déférente, c'est-à-dire de l'aire du secteur compris entre la déférente et deux rayons vecteurs menés du pôle aux pieds des normales extrêmes considérées, l'équation (8) fait voir que:

III. *La différence des aires comprises entre les deux branches d'une anallagmatique, les normales extrêmes et la déférente est exprimable en aire correspondante de la déférente; par conséquent, cette différence est exprimable en termes finis quand l'aire correspondante de la déférente est exprimable en termes finis.*

Cette différence est égale au double de l'aire comprise entre la déférente, la circonférence fixe et deux rayons vecteurs menés du centre de cette circonférence aux pieds des normales extrêmes.

6. Appliquons ces résultats généraux à quelques courbes particulières.

Considérons en premier lieu les ovales de Descartes, courbes anallagmatiques dont la déférente est un cercle. Rappelons d'abord quelques propriétés générales de ces courbes.

---

(1) *Sur les courbes enveloppes de cercles et sur les surfaces enveloppes de sphères* (*Nouvelle Correspondance mathématique*, t. V, p. 339, année 1879).

La courbe complète se compose de deux ovales conjugués dont l'un renferme complètement l'autre et qui ont un axe de symétrie commun; elle possède trois foyers disposés sur cet axe; un foyer se trouve au dehors du plus grand ovale et les deux autres sont situés dans l'intérieur du plus petit. L'équation polaire des ovales de Descartes, l'un des trois foyers étant pris pour pôle (¹) et l'axe de la courbe pour axe polaire, est de la forme

$$r^2 - 2r(a + b\cos\omega) + \alpha^2 = 0, \tag{9}$$

où a, b et α sont des constantes. Le cercle qui sert de déférente a son centre sur l'axe de la courbe à la distance b du pôle, et son rayon est égal à a; α désigne toujours le rayon du cercle fixe.

On peut faire voir, par une discussion de l'équation (9), que les deux racines de cette équation répondant à une valeur déterminée de l'angle ω sont les rayons vecteurs:

1° De deux points situés sur *l'un et l'autre* ovale et d'un *même* côté du foyer, lorsque c'est le foyer *intérieur extrême* qui est pris pour pôle du système des coordonnées;

2° De deux points situés sur *l'un et l'autre* ovale et de *différents* côtés du foyer, lorsque le pôle est au foyer *moyen;*

3° De deux points situés sur le *même* ovale, lorsque le pôle est au foyer *extérieur*.

Ces conclusions tiennent à ce que l'équation polaire (9) ne représente en réalité que l'ensemble de deux moitiés des ovales conjugués, moitiés disposées d'un même côté par rapport à l'axe quand le pôle est au foyer intérieur extrême, et de côtés différents quand le pôle se trouve au foyer moyen ou au foyer extérieur. Pour avoir, dans chaque cas, l'équation de l'autre moitié de la courbe complète, il faut changer de signe devant le terme contenant la constante a, la courbe complète étant ainsi représentée par les deux équations

$$\left\{\begin{aligned} r^2 - 2r(b\cos\omega + a) + \alpha^2 = 0,\\ r^2 - 2r(b\cos\omega - a) + \alpha^2 = 0,\end{aligned}\right. \tag{10}$$

(¹) Les ovales de Descartes peuvent donc être considérés de trois manières différentes comme anallagmatiques ayant une circonférence pour déférente.

telles que les points déterminés par l'une d'elles sont les images par réflexion, relativement à l'axe de la courbe, des points déterminés par l'autre équation. On est conduit à ces deux équations (10) en prenant l'équation des ovales de Descartes en coordonnées rectangulaires, dont l'origine se trouve à l'un des foyers et l'axe des x est dirigé suivant l'axe de la courbe, et en y substituant aux coordonnées rectangulaires les coordonnées polaires, ayant la même origine et l'axe des x pour axe polaire; on trouve ainsi une équation du quatrième degré

$$(11) \qquad (r^2 - 2br\cos\omega + \alpha^2)^2 - 4a^2r^2 = 0,$$

qui se décompose en deux équations (10) [1].

7. Puisque la déférente des ovales de Descartes, considérés comme courbe anallagmatique, est une circonférence, et puisque la podaire d'une circonférence est une conchoïde de cercle ou un limaçon de Pascal, la ligne (b) est, dans ce cas particulier, une conchoïde circulaire; son équation est, d'après l'équation (9),

$$(12) \qquad \rho = a + b\cos\omega.$$

En vertu du premier théorème général sur les aires des anallagmatiques, la somme des aires correspondantes des ovales de Descartes est donc exprimable en aire correspondante de conchoïde circulaire, et, comme cette dernière aire est exprimable en termes finis, il doit en être de même de la somme des aires correspondantes des ovales de Descartes.

Pour obtenir l'expression de cette somme, portons la valeur (12) de Ω dans la formule générale (6); il vient

$$A_1 + A_2 = 2\int_{\omega'}^{\omega''} (a + b\cos\omega)^2 d\omega - \alpha^2(\omega'' - \omega').$$

En effectuant les intégrations indiquées, on trouve, après quelques

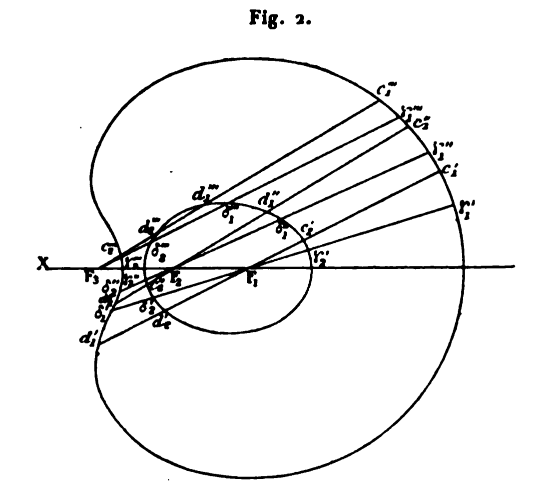
[1] J'étais arrivé à ces résultats ainsi qu'à d'autres, concernant les aires des ovales de Descartes, lorsque je pris connaissance du très intéressant Mémoire de M. S. Roberts (*On the ovals of Descartes*), où ils se trouvent déjà exposés et auquel je renvoie par conséquent le lecteur. Voir *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. III, p. 106.

réductions,

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} & A_1 + A_2 = (2a^2 + b^2 - a^2)(\omega'' - \omega') + 4ab(\sin\omega'' - \sin\omega') \\ & \quad + \frac{1}{2} b^2 (\sin 2\omega'' - \sin 2\omega'). \end{aligned} \right.$$

D'après ce qui a été dit précédemment sur les racines de l'équation (9), on devra entendre ici sous aires correspondantes A_1, A_2 les aires telles que $F_1 c'_1 \gamma'_1 F_1$, $F_1 c'_2 \gamma'_2 F_1$ (*fig.* 2), quand l'équation po-

Fig. 2.



laire (9) de la courbe est rapportée au foyer intérieur extrême F_1 comme pôle, les aires telles que $F_2 c''_1 \gamma''_1 F_2$, $F_2 c''_2 \gamma''_2 F_2$, quand l'équation (9) est rapportée au foyer moyen F_2, et les aires telles que $F_3 c'''_1 \gamma'''_1 F_3$, $F_3 c'''_2 \gamma'''_2 F_3$, quand l'équation (9) est rapportée au foyer extérieur F_3. Pour avoir, au lieu des sommes des aires

$$F_1 c'_1 \gamma'_1 F_1 + F_1 c'_2 \gamma'_2 F_1,\quad F_2 c''_1 \gamma''_1 F_2 + F_2 c''_2 \gamma''_2 F_2,\quad F_3 c'''_1 \gamma'''_1 F_3 + F_3 c'''_2 \gamma'''_2 F_3,$$

respectivement les sommes des aires

$$F_1 d'_1 \delta'_1 F_1 + F_1 d'_2 \delta'_2 F_1,\quad F_2 d''_1 \delta''_1 F_2 + F_2 d''_2 \delta''_2 F_2,\quad F_3 d'''_1 \delta'''_1 F_3 + F_3 d'''_2 \delta'''_2 F_3,$$

on n'aura qu'à changer a en $-a$ dans la formule (13), conformément à ce qui a été dit au nº 6 sur les équations (10).

Au moyen de la formule (13) on peut déterminer la somme S

des aires totales des deux ovales conjugués. En supposant le pôle au foyer intérieur extrême, il faudra poser $\omega' = 0$, $\omega'' = \pi$ et doubler le résultat, puisque chacune des deux équations (10) ne représente que l'ensemble des moitiés des ovales conjugués. On trouve ainsi

$$(14) \qquad S = (2a^2 + b^2 - \alpha^2)\, 2\pi.$$

Cette formule admet une interprétation géométrique simple. Les ovales de Descartes possèdent une tangente double et deux points de rebroussement coïncidant avec les points circulaires à l'infini. Les tangentes à la courbe en ces points de rebroussement se coupent en un point nommé *foyer triple* (¹), dont les coordonnées sont $\rho = b$, $\omega = 0$. Si l'on décrit de ce point comme centre un cercle qui passe par les deux points de contact de la tangente double, le rayon de ce cercle sera égal à $\sqrt{2a^2 + b^2 - \alpha^2}$ (²). L'équation (14) exprime donc que *la somme des aires totales des deux ovales conjugués est le double de l'aire de la circonférence ayant le foyer triple pour centre et passant par les points de contact de la tangente double*. Ce résultat a été déjà obtenu par M. S. Roberts, qui est arrivé aussi, quoique par une voie différente, à la formule (13) (³).

(¹) *Voir* Salmon, *Higher plane curves*.

(²) En effet, si l'on remplace dans l'équation (11) les coordonnées polaires par des coordonnées rectangulaires ayant la même origine et l'axe des x dirigé suivant l'axe de la courbe, on aura

$$(x^2 + y^2 - 2bx + \alpha^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0,$$

ce qu'on peut écrire

$$[(x-b)^2 + y^2 - 2a^2 - b^2 + \alpha^2)]^2 = 4a^2(a^2 - \alpha^2 + 2bx).$$

Cette équation montre que la droite

$$a^2 - \alpha^2 + 2bx = 0$$

est la tangente double, et le cercle dont il s'agit a pour équation

$$(x-b)^2 + y^2 - 2a^2 - b^2 + \alpha^2 = 0.$$

Or, le centre de ce cercle est au point $(x = b,\ y = 0)$ et son rayon est égal à

$$\sqrt{2a^2 + b^2 - \alpha^2}.$$

(³) *Voir* le Mémoire cité de M. S. Roberts, p. 123.

Lorsque $\alpha = 0$, les ovales de Descartes dégénèrent en une conchoïde circulaire dont l'équation est

(15) $$r = 2(a + b\cos\omega),$$

et la formule (14) donne, pour la somme des aires totales de la courbe et du nœud de cette conchoïde si $a < b$, ou pour l'aire totale de la courbe si $a > b$,

$$S_1 = (2a^2 + b^2)2\pi,$$

expression connue que l'on obtient soit en évaluant l'aire de la conchoïde (15), considérée comme épicycloïde ([1]), soit en calculant cette aire directement par les règles du Calcul intégral.

La différence $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ (n° 5) des aires comprises entre deux branches correspondantes des ovales de Descartes représentées par l'une des équations (10), la conchoïde (12) servant de podaire au cercle déférent et deux rayons vecteurs issus du centre du cercle fixe et formant les angles ω', ω'' avec l'axe s'exprime aussi en termes finis, d'après le théorème II du n° 5. La formule générale (7) donne, pour cette différence,

(16) $$\left\{\begin{aligned} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = {} & \left(a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \alpha^2\right)(\omega'' - \omega') \\ & + 2ab(\sin\omega'' - \sin\omega') + \frac{1}{4}b^2(\sin 2\omega'' - \sin 2\omega'), \end{aligned}\right.$$

et pour la différence U des aires totales, en posant $\omega' = 0$, $\omega'' = \pi$ et doublant le résultat,

$$U = (2a^2 + b^2 - 2\alpha^2)\pi,$$

ce qu'on peut écrire

(17) $$U = (2a^2 + b^2 - \alpha^2)\pi - \pi\alpha^2.$$

Cette formule exprime que la différence U est égale à la différence des aires de deux cercles : du cercle considéré précédem-

---

([1]) *Voir* mon Mémoire *Sur les aires des trajectoires décrites dans le mouvement plan d'une figure de forme invariable* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. II, année 1878).

ment, ayant le foyer triple pour centre et passant par les points de contact de la tangente double, et du cercle fixe orthogonal à toutes les circonférences enveloppées par les ovales.

8. Comme second exemple, considérons l'anallagmatique qui a pour déférente une ellipse dont le centre coïncide avec le centre du cercle fixe. La podaire d'une ellipse relative à son centre a pour équation, en désignant par a et b les deux demi-axes et en prenant le grand axe pour axe polaire,

$$\rho^2 = a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega.$$

En remplaçant Ω^2 par cette valeur dans les formules (6) et (7), on obtient, après toutes les intégrations et réductions,

$$A_1 + A_2 = (a^2 + b^2 - \alpha^2)(\omega'' - \omega') + \frac{a^2 - b^2}{2}(\sin 2\omega'' - \sin 2\omega'),$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 2\alpha^2)(\omega'' - \omega') + \frac{a^2 - b^2}{4}(\sin 2\omega'' - \sin 2\omega').$$

Posons, dans la première formule, $\omega' = 0$, $\omega'' = \pi$, et doublons le résultat; nous aurons, pour la somme S des aires totales des deux branches,

$$S = (a^2 + b^2 - \alpha^2) 2\pi.$$

Dans le cas particulier où $\alpha = a - b$, il vient

$$S = 4\pi ab;$$

donc, dans ce cas, la somme des aires totales est égale à quatre fois l'aire de l'ellipse servant de déférente.

En posant $a = b$ dans les formules précédentes, on arrive au cas où la déférente est un cercle concentrique au cercle fixe; l'anallagmatique se compose alors de deux cercles concentriques aux premiers.

9. Considérons enfin, comme dernière application, l'anallagmatique ayant pour déférente la spirale logarithmique

$$\rho' = ab^{\omega},$$

dont le pôle coïncide avec le centre du cercle fixe. En vertu de cette propriété que la tangente à la spirale logarithmique fait un angle constant avec le rayon vecteur passant par le point de contact, on s'assure facilement que la podaire de cette spirale relative à son pôle est la même courbe tournée d'un certain angle autour de ce pôle et que l'équation de cette podaire est

$$\rho = cab^{\omega},$$

c désignant le sinus de l'angle constant formé par la tangente et le rayon vecteur. En portant cette valeur de ρ ou Ω dans les formules (6) et (7), on obtient, toutes les intégrations effectuées,

$$A_1 + A_2 = \frac{a^2 c^2}{\log b} (b^{2\omega''} - b^{2\omega'}) - \alpha^2(\omega'' - \omega'),$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \frac{a^2 c^2}{\log b} (b^{2\omega''} - b^{2\omega'}) - \alpha^2(\omega'' - \omega').$$

La somme des aires correspondantes et la différence des aires ε_1, ε_2 de l'anallagmatique considérée s'expriment donc en termes finis.

10. Dans le n° 5, nous avons cherché comment on peut exprimer la somme des aires correspondantes A_1, A_2 ou la différence des aires ε_1, ε_2 d'une anallagmatique pour une déférente donnée. On peut se proposer le problème inverse et chercher quelle doit être la déférente pour que la somme des aires correspondantes A_1, A_2 ou la différence des aires ε_1, ε_2 d'une anallagmatique s'exprime en aires d'une courbe donnée.

Cherchons, par exemple, la déférente d'une anallagmatique pour laquelle la somme des aires $A_1 + A_2$ ou la différence des aires $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ comprises entre deux rayons vecteurs issus du centre du cercle fixe s'exprime en portions de cercle. D'après les formules générales (6) et (7), il suffit de prendre pour déférente une courbe dont la podaire par rapport à un point de son plan soit un cercle ou une droite et de faire coïncider ce point avec le centre du cercle fixe. On sait, par exemple, que l'ellipse et l'hyperbole ont pour podaire relativement à l'un de leurs foyers un cercle et que la parabole a pour podaire relativement à son foyer une droite. On

peut donc prendre pour la déférente cherchée une ellipse, une hyperbole ou une parabole ayant le centre du cercle fixe pour foyer. Par conséquent, *la somme des aires correspondantes et la différence des aires* ε_1, ε_2 *d'une anallagmatique ayant pour déférente une conique dont un foyer est au centre du cercle fixe est exprimable en aires de cercles.*

Les exemples considérés dans les nos 6-10 suffiront pour faire voir le parti qu'on peut tirer dans certains cas des théorèmes généraux énoncés dans cette Note.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

PETERSEN (J.). — Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques, avec application a plus de 400 problèmes, traduit par O. Chemin. Paris, Gauthier-Villars, 1880; petit in-4°, 111 pages.

Nous sommes un peu en retard pour signaler à nos lecteurs cet Ouvrage excellent et original qui, publié en 1866 et en langue danoise ([1]), a fait peu à peu son chemin et sera bientôt traduit en anglais, en allemand et en italien. Voici comment l'auteur définit dans sa Préface le but qu'il a voulu atteindre :

« L'Ouvrage actuel a pour objet d'essayer d'apprendre aux élèves comment on doit attaquer un problème de construction. Après avoir résolu un grand nombre de questions, les unes originales, les autres extraites des nombreuses collections existantes, j'ai essayé d'analyser l'enchaînement des idées qui conduisent à la solution de chacune d'elles et d'en faire une classification sous forme de règles générales. S'il se trouve que mes solutions diffèrent de celles des autres auteurs et si, dans certains cas, elles paraissent plus compliquées, c'est que j'ai préféré celles qui sont méthodiques à celles qui semblent dues à un hasard heureux. L'objet que j'ai principalement en vue, c'est la méthode ; dans la plupart des cas je n'ai fait qu'indiquer la clef de la solution et j'en ai laissé la discussion détaillée au lecteur ou au professeur. »

Ce que l'auteur ne dit pas, c'est qu'il a résolu bien des problèmes d'une manière absolument nouvelle et très intéressante. Son petit Recueil mérite d'être accueilli avec faveur; ce n'est pas une compilation, un ouvrage de seconde main : en bien des points M. Petersen a fait œuvre de géomètre.

M. Zeuthen a bien voulu nous envoyer la liste des questions proposées depuis 1872 aux candidats à l'École Polytechnique danoise, questions qui ont été résolues par la plupart des candidats. Le simple énoncé de ces questions prouvera quels services le

([1]) *Methoder og Theorier til Lösning af geometriske Konstruktionsopgaver, anvendte paa c. 400 Opgaver*. Kjöbenhavn.

livre de M. Petersen a rendus à l'enseignement géométrique dans son pays. Voici quels sont ces sujets de composition :

1872. *Construire un trapèze, connaissant les diagonales, l'angle qu'elles font entre elles et l'angle formé par les côtés non parallèles.*

1873. *Construire un triangle* ABC, *le côté* BC *devant être tangent à un cercle donné, le côté* CA *devant être tangent à un autre cercle en* A, *pendant que le troisième côté* AB, *prolongé s'il est nécessaire, passe par un des deux centres de similitude des deux cercles, et l'angle* C *étant égal à* 60°. *Combien y a-t-il de solutions?*

1874. *Inscrire à un secteur de cercle* ABC *un secteur abc semblable au premier, de telle manière que le centre c se trouve en un point donné de l'arc de cercle* AB.

1875. *Construire un quadrilatère* ABCD, *connaissant les deux distances des milieux des côtés opposés, l'angle formé par les deux droites joignant ces milieux et deux angles du quadrilatère, ces deux angles pouvant être soit deux angles consécutifs, soit deux angles opposés.*

1876. *Un cercle et deux droites étant donnés dans un plan, construire une droite, de direction donnée, rencontrant le cercle en deux points* A, B, *et les droites en deux points a, b, tels que les distances* A*a*, B*b* *soient égales en grandeur.*

Comment résout-on la question si l'on remplace le cercle donné par une ellipse?

1877. *Construire un trapèze, connaissant les deux diagonales, la distance de leurs milieux et la hauteur.*

1878. 1° *Construire un triangle dont les côtés sont parallèles à des droites données et dont les sommets se trouvent sur des droites données.*

2° *Mener une droite parallèle à une droite donnée de telle manière qu'elle divise dans le même rapport deux côtés opposés d'un quadrilatère plan. Montrer que la même question n'est résoluble pour un quadrilatère gauche que dans le cas où la*

droite donnée se trouve dans un plan parallèle aux côtés qu'on ne divise pas.

1879. 1° *Construire un triangle dont on connaît un angle, le côté opposé et le rapport des deux autres côtés.*

2° *Construire un quadrilatère* ABCD *circonscriptible à un cercle, connaissant la différence des angles opposés* B *et* D, *la différence des côtés* AB *et* AD *et les rapports* $\frac{OB}{OD}$ *et* $\frac{OA}{OC}$ *des distances du centre du cercle inscrit aux sommets opposés.*

Les candidats à l'École Polytechnique ne connaissant que la Géométrie élémentaire, il faut convenir avec M. Zeuthen que la possibilité d'avoir de bonnes solutions de ces questions témoigne favorablement des bons fruits qu'a portés en Danemark la première édition du Livre de M. Petersen. Nous espérons que, dans sa traduction française, ce Livre sera consulté par tous nos professeurs, et nous n'hésitons pas à le leur recommander sans restriction.

WORPITZKY (J.). — Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. 1 vol in-8°, 794 pages. Berlin, 1880.

M. Worpitzky enseigne le Calcul différentiel et intégral à la *Kriegs-Akademie*, et c'est le résumé de ses leçons qu'il donne au public.

Il est intéressant de voir, sur cet exemple, quelle peut être la nature de l'enseignement scientifique dans une école pratique d'Allemagne. On est tout d'abord frappé, en parcourant le livre de M. Worpitzky, de l'absence de préoccupations utilitaires : évidemment le but principal de l'auteur n'est pas de rendre ses lecteurs familiers avec les procédés de calcul qu'ils pourront avoir à appliquer pour la solution de problèmes pratiques, mais bien de leur donner des idées justes sur les éléments de la Science et de leur inspirer tout au moins le goût de la haute science. Au surplus, il s'explique longuement dans sa Préface sur l'importance qu'il attribue à l'étude des Mathématiques pour la formation et le

développement des intelligences, et c'est ce développement qui le préoccupe tout d'abord.

M. Worpitzky n'a pas cru devoir séparer le Calcul intégral du Calcul différentiel; il est certain que cette séparation est souvent artificielle. La notion d'intégrale définie ou indéfinie est liée intimement à la notion de dérivée et il est parfois incommode de vouloir se passer de cette notion pour la démonstration de certains théorèmes que l'on regarde habituellement comme appartenant au Calcul différentiel. On remarquera encore que l'auteur a exclu systématiquement la notion de différentielle, et, à la vérité, cette notion n'a guère d'utilité (¹) tant qu'on n'aborde pas la théorie des équations différentielles.

Après avoir précisé le sens du mot *fonction,* l'auteur définit les dérivées et donne les règles principales de différentiation; il établit ensuite la notion d'intégrale définie, en se bornant d'ailleurs au cas où l'on peut décomposer l'intervalle compris entre les limites d'intégration en intervalles partiels, en nombre fini, tels que, dans chacun d'eux, la fonction soit finie, continue et varie dans le même sens. Il donne ensuite les règles élémentaires d'intégration; nous noterons, en passant, la forme générale que M. Worpitzky donne à la règle d'intégration par parties, règle qui consiste pour lui dans l'égalité :

$$\begin{aligned}&\int f(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)\,dx\\ &\quad=\int f(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)\,\partial x\\ &\qquad-\sum_{i=1}^{i=n}\int\left[\frac{\partial}{\partial u_i}\int f(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)\,\partial x\right]\frac{du_i}{dx}\,dx,\end{aligned}$$

où $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont des fonctions quelconques de x.

Il traite ensuite de la répétition des opérations de différentiation et d'intégration; puis il aborde le théorème de Taylor : ce théorème est démontré en donnant au reste la forme d'une intégrale définie, puis appliqué au développement de $(1+x)^m$; ce dé-

(¹) Nous ne pouvons accepter sans réserves cette assertion de notre savant collaborateur. J. H.

veloppement conduit à la notion de la fonction exponentielle, et cette dernière à la notion de la fonction logarithmique. L'auteur fait avec soin l'étude de la façon dont se comporte, pour x infini, la fonction

$$\varphi(x, n, p) = l^0 x\, l^1 x\, l^2 x \ldots l^{n-1} x\, (l^n x)^{1+p},$$

où

$$l^0 x = x, \quad l^1 x = l x, \quad l^2 x = l l x, \quad \ldots$$

et où p est supérieur à -1 : cette étude est faite en vue de la démonstration des règles très générales que fournit la considération de cette fonction pour la détermination de la convergence soit des intégrales à limites infinies, soit des intégrales relatives à des fonctions qui passent par l'infini entre les limites d'intégration, soit des séries infinies; la considération de la même fonction, lorsqu'il y a divergence, conduit, dans des cas très étendus, à des renseignements importants sur la nature de la divergence : toutes ces règles résultent sans difficulté des identités évidentes

$$\int_a^x \frac{dx}{\varphi(x, n, p)} = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{(l^n a)^p} - \frac{1}{(l^n x)^p}\right],$$

$$\int_a^\infty \frac{dx}{\varphi(x, n, p)} = \frac{1}{p(l^n a)^p} \quad (p > 0),$$

$$\int_a^x \frac{dx}{\varphi(x, n, 0)} = l^{n+1} x - l^{n+1} a.$$

L'auteur traite ensuite des séries et des produits infinis, de leur convergence conditionnelle ou inconditionnelle, des séries à double entrée, de la différentiation et de l'intégration des séries dont les termes sont fonctions d'une variable.

Passant ensuite à la considération des fonctions de variables imaginaires, il prend l'egalité

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x,$$

pour point de départ de la définition des fonctions circulaires, fonctions dont l'étude est faite indépendamment de leur signification trigonométrique; il donne leurs développements en séries, en produits infinis, et les développements de leurs puissances en séries de Fourier. Il traite ensuite de la différentiation et de l'intégration des fonctions de variables imaginaires, ainsi que de leur dé-

veloppement en série suivant les puissances de la variable, et termine ce Chapitre en établissant les propriétés essentielles des équations algébriques entières : l'existence d'une racine, pour une telle équation $f(x) = 0$, est prouvée par l'absurdité à laquelle conduirait l'égalité

$$\frac{2\pi i}{f(z)} = \int \frac{dx}{(x-z)f(z)},$$

appliquée à un contour circulaire infiniment grand, si la fonction $f(z)$ ne s'annulait pour aucune valeur finie de z.

Dans le reste du Volume, où l'on trouvera l'étude des formes illusoires, la décomposition des fonctions rationnelles en éléments simples, l'intégration des différentielles rationnelles binômes, algébriques et transcendants, enfin la recherche des maxima et des minima des fonctions d'une ou de plusieurs variables, il convient de signaler un chapitre entier consacré à la formule sommatoire de Maclaurin.

Enfin un Appendice contient les éléments de la Géométrie analytique et les applications géométriques les plus simples du Calcul différentiel et intégral.

MÉLANGES.

TRAVAUX CONCERNANT LE PROBLÈME DES TROIS CORPS ET LA THÉORIE DES PERTURBATIONS;

PAR M. R. RADAU.

La méthode de la variation des constantes, telle qu'on l'enseigne d'ordinaire, se montre hérissée d'épines dès qu'on a dépassé les premières étapes des approximations successives. Il se trouve aussi qu'elle n'assure pas toujours d'une manière suffisante l'économie du travail, de fortes variations des éléments elliptiques pouvant se compenser mutuellement et ne produire que de faibles changements des coordonnées. On a donc cherché d'autres voies, et essayé tour à tour des moyens d'intégration très divers. Au point de vue pratique, les méthodes de quadrature ont rendu de grands services

elles n'ont pas dit leur dernier mot. Il faut ensuite citer les méthodes de Hansen, applicables aux perturbations spéciales comme aux perturbations absolues, qui commencent à se répandre aujourd'hui, et auxquelles se rattachent les récents travaux de M. Gyldén. Enfin on a tenté d'utiliser d'une manière plus directe les intégrales connues du problème des trois corps. C'est à ce sujet que je me propose d'entrer dans quelques détails. Je commencerai par rappeler brièvement les données du problème, en partant de la transformation orthogonale dont je me suis occupé plus longuement ailleurs [1].

1. On sait que, lorsque les coordonnées X, Y, Z sont remplacées par leurs différences, les équations différentielles du mouvement de trois corps perdent la forme canonique, en d'autres termes, que les accélérations ne sont plus les dérivées partielles d'une même fonction U. On peut leur rendre cette forme au moyen d'une transformation orthogonale indiquée par Jacobi, qui ne change pas la direction des axes, mais s'applique de la même façon aux coordonnées X, aux coordonnées Y et aux coordonnées Z. La manière la plus simple d'opérer cette transformation consiste à rapporter la planète principale (m) au corps central (m_0), et la planète troublante (m_1) au centre de gravité commun des corps m_0 et m [2]. Lorsqu'il s'agit de la Lune, c'est la Terre qui est le corps central, et m_1 représente le Soleil.

On posera donc

$$\begin{aligned} X - X_0 &= x, \\ X_1 - X_0 &= x_1 + \frac{m}{M} x, \\ X_1 - X &= x_1 - \frac{m_0}{M} x, \end{aligned}$$

où $M = m_0 + m$, et des relations analogues serviront à trans-

---

[1] *Annales de l'École Normale supérieure*, t. V, 1868. — *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, mai 1869. — *Voir* aussi deux Mémoires de M. Émile Mathieu (*Journal de Mathématiques*, 1876 et 1877).

[2] D'après une remarque que je dois à M. Tisserand, Newton aurait déjà indiqué cette transformation spéciale pour Jupiter et Saturne.

former les coordonnées Y, Z. Soit encore

$$(1) \qquad \mathrm{M}_1 = m_0 + m + m_1, \quad \mu = \frac{m m_0}{\mathrm{M}}, \quad \mu_1 = \frac{m_1 \mathrm{M}}{\mathrm{M}_1};$$

les équations du mouvement prendront la forme

$$x'' = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}, \quad x_1'' = \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_1},$$

. . . .

La fonction des forces U dépend des trois distances planétaire r (distance de m à m_0), R (distance de m à m_1) et R_0 (distance d m_0 à m_1). En désignant par r_1 la distance de m_1 au centre de gra vité de $m_0 + m$, nous aurons

$$\mathrm{R}_0^2 = r_1^2 + \left(\frac{m}{\mathrm{M}} r\right)^2 + \frac{2m}{\mathrm{M}} r r_1 s,$$

$$\mathrm{R}^2 = r_1^2 + \left(\frac{m_0}{\mathrm{M}} r\right)^2 - 2\frac{m_0}{\mathrm{M}} r r_1 s,$$

où

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$
$$r r_1 s = x x_1 + y y_1 + z z_1.$$

La fonction des forces U et la fonction perturbatrice Ω ont pou expressions

$$\mathrm{U} = \frac{m_0 m_1}{\mathrm{R}_0} + \frac{m m_1}{\mathrm{R}} + \frac{m m_0}{r},$$

$$\Omega = \frac{m_0 m_1}{\mathrm{R}_0} + \frac{m m_1}{\mathrm{R}} - \frac{m_1 \mathrm{M}}{r_1}$$
$$= -\frac{m_1 \mu}{2 r_1}\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \left[1 - 3s^2 + \frac{m_0 - m}{m_0 + m}(3s - 5s^3)\frac{r}{r_1} + \ldots\right],$$

et les équations différentielles peuvent s'écrire

$$x'' + \frac{\mathrm{M}x}{r^3} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad x_1'' + \frac{\mathrm{M}_1 x_1}{r_1^3} = \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial \Omega}{\partial x_1},$$

. . . .

Pour simplifier l'écriture, je suppose ici que la constante d l'attraction $\varkappa$ est contenue dans dt, c'est-à-dire qu'on a mis partou dt^2 à la place de $\varkappa dt^2$. Les lettres accentuées représentent tou jours des dérivées prises par rapport au temps.

2. En introduisant les variables $\mu x'$, $\mu y'$, $\mu z'$, et posant

$$T = \frac{1}{2} \mu (x'^2 + y'^2 + z'^2),$$
$$H = T + T_1 - U,$$

où $T + T_1$ représente la force vive du système, les équations du mouvement pourraient encore s'écrire

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial(\mu x')}, \quad \frac{d(\mu x')}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$
. . . .

et l'intégrale des forces vives serait $H = \text{const.}$

Soient encore

(2) $$h = T - \frac{mm_0}{r}, \quad h_1 = T_1 - \frac{m_1 M}{r_1}$$

les deux fonctions qui deviennent les constantes des forces vives dans le mouvement non troublé, où

$$h = -\frac{mm_0}{2a}, \quad h_1 = -\frac{m_1 M}{2a_1},$$

en désignant par $2a$, $2a_1$ les grands axes des deux ellipses ; l'intégrale des forces vives prendra la forme

(3) $$h + h_1 = \Omega + H.$$

En outre

$$\frac{dh}{dt} = x' \frac{\partial \Omega}{\partial x} + y' \frac{\partial \Omega}{\partial y} + z' \frac{\partial \Omega}{\partial z},$$

ou bien, en regardant x, y, z comme fonctions du temps t, et x_1, y_1, z_1 comme fonctions du temps t_1,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d\Omega}{dt}, \quad \frac{dh_1}{dt} = \frac{d\Omega}{dt_1}.$$

Les fonctions h, h_1 sont des constantes arbitraires, des *éléments* des orbites troublées ; elles en déterminent les dimensions absolues.

Remarquons, en passant, qu'on a aussi

$$(4)\qquad \frac{1}{2}(\mu r^2)'' = 2T + r\frac{\partial U}{\partial r} = 2h + \frac{mm_0}{r} + r\frac{\partial \Omega}{\partial r},$$

$$(5)\qquad \frac{1}{2}(\mu r^2 + \mu_1 r_1^2)'' = U + 2H.$$

Si l'on désigne encore par f la vitesse aréolaire, par $\alpha\beta\gamma$ les cosinus qui en déterminent le plan (le plan de l'orbite instantanée), les trois projections de f seront

$$f\alpha = yz' - zy', \quad f\beta = zx' - xz', \quad f\gamma = xy' - yx',$$

et, en posant

$$\mu f = k, \quad \mu_1 f_1 = k_1,$$

les intégrales des aires, rapportées au plan invariable, pourront s'écrire comme il suit :

$$(6)\qquad k\alpha + k_1\alpha_1 = 0, \quad k\beta + k_1\beta_1 = 0, \quad k\gamma + k_1\gamma_1 = K;$$

d'où l'on voit que les deux orbites se coupent dans le plan invariable (K étant la résultante de k, k_1, si l'on considère K, k, k_1 comme des forces normales au plan fixe et aux deux orbites).

Les fonctions f, f_1, ou bien k, k_1, deviennent les constantes des aires dans le mouvement non troublé, où $f = \sqrt{Mp}$, $f_1 = \sqrt{M_1 p_1}$, en désignant par p, p_1 les paramètres des deux ellipses. On voit que k (aussi bien que $k\alpha$, $k\beta$, $k\gamma$) peut jouer le rôle de constante arbitraire, d'*élément* de l'orbite troublée.

3. Comme les orbites planétaires sont approximativement planes, il est naturel d'introduire, à titre de constantes arbitraires, les deux angles qui déterminent le plan de l'orbite instantanée. Une méthode plus élégante consiste à introduire, avec Hansen, trois axes mobiles dont deux sont situés dans le plan de l'orbite, et qui dépendent de *trois* constantes arbitraires.

Hansen appelle *coordonnées idéales* des coordonnées mobiles ξ, η, ζ, déterminées de telle manière que non seulement ξ, η, ζ, mais encore ξ', η', ζ' soient les mêmes fonctions du temps et des éléments dans le mouvement troublé que dans le mouvement non troublé; en posant, par exemple,

$$\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

on aura

$$\xi' = \alpha x' + \beta y' + \gamma z',$$
$$o = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z,$$

et de même pour η, ζ. Il se trouve alors que l'axe instantané de rotation du système doit toujours coïncider avec le rayon vecteur. Si nous prenons pour plan des $\xi\eta$ le plan de l'orbite instantanée, nous aurons $\zeta = o$, $\zeta' = o$, et les équations du mouvement deviennent, pour la planète considérée,

$$\xi'' = \frac{1}{\mu}\frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \eta'' = \frac{1}{\mu}\frac{\partial U}{\partial \eta},$$

$$\xi^0 \eta' - \eta^0 \xi' = \frac{r^0}{r}(\xi\eta' - \eta\xi') = \frac{1}{\mu}\frac{\partial U}{\partial \zeta},$$

où ξ^0, η^0 sont les rotations du système autour des axes ξ, η, et r^0 sa rotation totale, qui a lieu autour du rayon vecteur. Il est entendu qu'après la différentiation on fera $\zeta = o$.

Soit encore u la longitude dans l'orbite, comptée à partir de l'axe des ξ; on aura

$$\xi = r\cos u, \quad \eta = r\sin u,$$

et r, u seront, comme ξ, η, des coordonnées idéales, c'est-à-dire qu'on aura

$$\delta r = o, \quad \delta u = o, \quad \delta\xi = o, \quad \delta\eta = o,$$

comme on a $\delta x = o$, $\delta y = o$, $\delta z = o$, en indiquant par le symbole δ la différentiation par rapport aux constantes arbitraires qui figurent dans l'expression des coordonnées, lorsqu'on introduit les éléments elliptiques. Mais il y a là une difficulté sur laquelle Jacobi appelle l'attention dans une lettre adressée à Hansen, que l'on trouve dans le Tome II des *Opuscula mathematica.*

En effet, Jacobi critique la définition des coordonnées idéales, proposée par Hansen, parce que les quantités qui déterminent la situation de l'axe des ξ ne sont pas de véritables constantes arbitraires ou éléments, dans l'acception consacrée du mot. Si nous désignons par σ la distance de cet axe à la ligne des nœuds, l'angle σ est déterminée par l'équation différentielle

$$d\sigma = \cos i\, d\vartheta,$$

qui n'est pas directement intégrable; on ne saurait donc considérer

σ comme une fonction des constantes arbitraires i, ϑ
Jacobi, en s'appuyant sur un précédent créé par Lagrar
d'étendre le nom d'*éléments* à des quantités de cette r
nies par des intégrales de la forme

$$\int(\mathrm{A}\,da + \mathrm{B}\,db + \ldots),$$

où A, B, ... sont des fonctions des constantes arbitrair
On pourra donc appeler *éléments* l'angle σ, l'angle ϖ (
la distance du périhélie à l'axe des ξ, etc., et, en posant
où v est l'anomalie vraie dans l'ellipse osculatrice, on

$$u' = v' + \varpi' = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \delta u = \delta v + \varpi'\,dt = 0,$$

en indiquant toujours par des accents les dérivées total

4. Les relations

$$\xi = r\cos u, \quad \eta = r\sin u$$

donnent

$$\xi\eta' - \eta\xi' = r^2 u' = f,$$

et les équations du mouvement deviennent, pour
orbite,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} r'' - \frac{f^2}{r^3} &= \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r},\\ f' &= \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u},\\ f r^0 &= \frac{r}{\mu}\,\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \zeta}.\end{aligned}\right.$$

En même temps

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\mu\left(r'^2 + \frac{f^2}{r^2}\right).$$

Si l'on fait toujours $\mathrm{H} = \mathrm{T} + \mathrm{T}_1 - \mathrm{U}$, et qu'on obser
renferme pas les vitesses, comme $\mathrm{T} + \mathrm{T}_1$ ne renfe
angles u, u_1, on pourra donner aux deux premières
équations la forme suivante :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial(\mu r')}, \quad \frac{d(\mu r')}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial r},$$
$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial(\mu f)}, \quad \frac{d(\mu f)}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u}.$$

A ces équations, qui déterminent le mouvement orbitaire, il faut ajouter celles qui déterminent le plan de l'orbite.

Soient :

i l'inclinaison de l'orbite sur le plan fixe,
ϑ la longitude du nœud dans le plan fixe,
σ la longitude du nœud dans l'orbite,
υ l'angle que fait le rayon vecteur avec le nœud ascendant (ce qu'on appelle l'*argument de la latitude*).

On aura d'abord $u = \upsilon + \sigma$; le cosinus de l'angle (r, r_1), qui figure dans U et dans Ω, et que nous avons désigné par s, s'exprimera par υ, υ_1, i, i_1, $\vartheta - \vartheta_1$, et l'on aura

$$\frac{\partial U}{\partial \upsilon} = \frac{\partial U}{\partial u} = -\frac{\partial U}{\partial \sigma},$$

en mettant $u - \sigma$ à la place de υ. Par suite de l'introduction des axes mobiles, dont la position initiale est arbitraire, le nombre des variables contenues dans A est maintenant de quatorze au lieu de douze; mais, si nous conservons υ au lieu de $u - \sigma$, les variables σ, σ_1 restent en dehors du système à intégrer. Il faut maintenant chercher l'expression de la dérivée υ'.

Par des considérations géométriques très simples, on trouve d'abord

$$(8) \qquad \begin{cases} r^0 \cos\upsilon = i', \\ r^0 \sin\upsilon = \vartheta' \sin i, \\ \sigma' = \vartheta' \cos i, \end{cases}$$

i' étant la rotation du plan de l'orbite autour de la ligne des nœuds, et $r^0 \sin\upsilon$ sa rotation autour d'un axe perpendiculaire à cette ligne.

Puis l'on voit aisément que $\frac{\partial U}{\partial \zeta}$ est la force perturbatrice normale au plan de l'orbite, qui produit la rotation actuelle de ce plan autour du rayon vecteur, et que le déplacement virtuel $\delta\zeta$ équivaut à une rotation $\delta i = \frac{\delta\zeta}{r \sin\upsilon}$ autour du nœud. Il s'ensuit.

en posant toujours $\mu f = k$,

$$
(9)\quad \begin{cases}
k r^0 = r \dfrac{\partial U}{\partial \zeta} = \dfrac{1}{\sin \upsilon} \dfrac{\partial U}{\partial i}, \\
k i' = \cot \upsilon \dfrac{\partial U}{\partial i}, \\
k \vartheta' = \dfrac{1}{\sin i} \dfrac{\partial U}{\partial i}, \\
k \sigma' = \cot i \dfrac{\partial U}{\partial i}.
\end{cases}
$$

On a aussi

$$(k \cos i)' = \frac{\partial U}{\partial \vartheta},$$

en vertu de l'identité

$$\frac{\partial s}{\partial \vartheta} - \cos i \frac{\partial s}{\partial \upsilon} + \cot \upsilon \sin i \frac{\partial s}{\partial i} = 0,$$

et, puisque

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta} + \frac{\partial U}{\partial \vartheta_1} = 0,$$

on peut écrire l'intégrale

$$k \cos i + k_1 \cos i_1 = K.$$

Ensuite

$$k \sin i = k_1 \sin i_1,$$
$$\vartheta_1 - \vartheta = 180°.$$

Ce sont les intégrales des aires, que nous n'avons de démontrer, puisque nous les avons établies plus ha forme peu différente; nous avons déjà dit que les deu coupent dans le plan invariable, sur lequel se compt gitudes ϑ, ϑ_1.

5. Nous désignerons par $J = i + i_1$ l'inclinaison n orbites, et nous compterons les angles υ, υ_1 du nœu de chaque orbite; nous aurons dès lors

$$
\begin{aligned}
-s &= \cos \upsilon \cos \upsilon_1 + \sin \upsilon \sin \upsilon_1 \cos J \\
&= \cos(\upsilon - \upsilon_1) - 2 \sin \upsilon \sin \upsilon_1 \sin^2 \frac{1}{2} J,
\end{aligned}
$$

et les intégrales des aires donnent encore

$$\text{(10)} \qquad \frac{\sin i}{k_1} = \frac{\sin i_1}{k} = \frac{\sin J}{K},$$

$$K^2 = k^2 + k_1^2 + 2kk_1 \cos J = (k + k_1)^2 - 4kk_1 \sin^2 \frac{1}{2} J,$$

d'où il résulte que la somme des vitesses aérolaires $k + k_1$ varie fort peu, si les orbites sont peu inclinées l'une sur l'autre.

On voit que s ne dépend que des trois angles υ, υ_1, J. Le nœud a été éliminé; et si nous remplaçons cos J par sa valeur tirée des intégrales des aires, les inclinaisons disparaissent à leur tour et il ne reste dans H que les huit variables $r, r_1, r', r_1', \upsilon, \upsilon_1, k, k_1$.

En différentiant l'expression de la constante K par rapport à k, on trouve d'ailleurs

$$\cos i - k \sin i \frac{\partial J}{\partial k} = 0,$$

et il s'ensuit qu'en remplaçant cos J par sa valeur on aura

$$\sigma' = \frac{\partial U}{\partial k}.$$

Or on avait $u' = \frac{\partial T}{\partial k}$; et, puisque $\upsilon' = u' - \sigma'$, il vient

$$\upsilon' = \frac{\partial H}{\partial k},$$

les vitesses k, k_1 étant contenues à la fois dans $T + T_1$ et dans U. Les équations du mouvement prennent donc la forme suivante :

$$\text{(11)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial(\mu r')}, & \frac{d(\mu r')}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{dr}, \\ \frac{d\upsilon}{dt} &= \frac{\partial H}{dk}, & \frac{dk}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \upsilon}. \end{aligned} \right.$$

Leur ensemble forme un système de huit équations simultanées du premier ordre, qui peut s'intégrer séparément, et auquel s'ajoute la quadrature

$$\text{(12)} \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial K}.$$

Les inclinaisons i, i_1 se déterminent finalement par k, k_1. On a

d'ailleurs l'intégrale des forces vives H = const. Mais, le système ci-dessus ne pouvant jamais être intégré que par approximation, il importe d'introduire d'autres variables qui puissent jouer le rôle de constantes arbitraires, d'éléments des orbites troublées, ce qui veut dire que leurs variations ne doivent dépendre que de la fonction perturbatrice. A cet égard, il est à remarquer que k, ϑ, σ jouissent déjà de cette propriété, car on a évidemment

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial K}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial k}, \quad \frac{dk}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\vartheta} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma}.$$

Il en est de même de la variable h, déjà définie plus haut, que l'on peut introduire à la place de r', en vertu des relations

$$h = \frac{1}{2}\mu\left(r'^2 + \frac{f^2}{r^2} - \frac{2M}{r}\right),$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial r} r' + \frac{\partial\Omega}{\partial u} u',$$

$$= \frac{\partial\Omega}{\partial r} r' + \frac{\partial\Omega}{\partial\vartheta}\frac{f}{r^2},$$

où $f = \frac{k}{\mu}$. Si nous exprimons les coordonnées polaires r, u en fon-tion de $t + \tau$ et de diverses constantes arbitraires, de telle faç que leurs dérivées totales se confondent avec leurs dérivées pa tielles prises par rapport à t ou à τ, nous aurons

$$(13) \qquad \frac{dh}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\tau}.$$

6. On y arrive par l'emploi d'une ellipse osculatrice qui satis aux équations du mouvement dans l'hypothèse de $\Omega = 0$. L'é ment h représente alors le grand axe $\left(h = -\frac{mm_0}{2a}\right)$, et k le p ramètre $(k = \sqrt{Mp})$; les mêmes éléments déterminent encore l'e centricité e et le moyen mouvement n, car on a

$$\frac{p}{a} = 1 - e^2, \quad \frac{M}{a^3} = n^2.$$

Les nouvelles constantes arbitraires qui achèvent de définir l'e lipse keplérienne sont l'époque τ et la longitude du périhélie comptée à partir de l'axe des ξ, que l'on peut aussi remplacer p

la distance du périhélie au nœud π; on a dans ce cas $\varpi = \pi + \sigma$. En désignant par v l'anomalie vraie, par ε l'anomalie excentrique, on a les relations

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos v, \quad \frac{r}{a} = 1 - e\cos\varepsilon,$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon, \quad \varepsilon - e\sin\varepsilon = n(t+\tau),$$

$$u = v + \varpi, \quad \upsilon = v + \pi.$$

Les vitesses elliptiques devant coïncider avec les vitesses orbitaires, les dérivées r', u' sont égales aux dérivées partielles des variables r, u prises par rapport à τ; par conséquent,

$$r' = \frac{\partial r}{\partial \tau},$$

$$u' = v' + \varpi' = \frac{\partial v}{\partial \tau}.$$

En partant de ces relations, on trouve

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} h' &= \frac{\partial \Omega}{\partial \tau}, \quad \tau' = -\frac{\partial \Omega}{\partial h}, \\ k' &= \frac{\partial \Omega}{\partial \pi}, \quad \pi' = -\frac{\partial \Omega}{\partial k}. \end{aligned} \right.$$

En prenant la dérivée partielle de Ω par rapport à k, on suppose ici que k existe dans les expressions des coordonnées r, v aussi bien que dans $\cos J$. On a vu plus haut qu'en prenant k seulement dans $\cos J$ on avait

$$\sigma' = \frac{\partial \Omega}{\partial k};$$

on a de même

$$\varpi' = -\frac{\partial \Omega}{\partial k}$$

en prenant k seulement dans les coordonnées r, v; cela résulte de la relation $\varpi' = \pi' + \sigma'$. Enfin

$$\vartheta' = -\frac{\partial \Omega}{\partial K}.$$

On voit aussi qu'on aura

$$(15)\quad (k + k_1)' = 2\sin^2\frac{1}{2}J\,\sin(\upsilon + \upsilon_1)\,\frac{\partial \Omega}{\partial s}.$$

Sous cette forme, les équations sont préparées pour la variation des constantes. Nous allons les modifier de manière à éviter l'emploi des éléments elliptiques variables, le point de départ étant dès lors une ellipse invariable, comme dans l'une des méthodes du Livre II de la *Mécanique céleste*. On verra comment M. Weiler a tenté de résoudre le problème ainsi modifié. Mais auparavant il ne sera pas sans intérêt de rappeler brièvement certains détails des méthodes de Hansen, à cause des rapprochements qui s'offriront d'eux-mêmes.

7. On sait que, pour le calcul des perturbations spéciales des petites planètes, Hansen a renoncé à l'ellipse osculatrice. Dans sa méthode, on emploie une ellipse keplérienne où l'époque τ est seule variable (¹), tandis que a, p, e, n, ϖ sont des constantes absolues, déterminées une fois pour toutes de manière à représenter des éléments osculateurs à l'origine du temps. Au rayon vecteur fictif r_e pris dans cette ellipse, on compare le rayon vecteur actuel r, en posant $r = r_e(1+\rho)$ et en les faisant coïncider en direction, de sorte que $u = v + \varpi$. On a donc

$$f = r^2 u' = r^2 v' = (1+\rho)^2 r_e^2 v', \tag{16}$$

et

$$r_e^2 v' = f_0(1+\tau'), \tag{17}$$

où $f_0 = \sqrt{Mp}$ est la valeur de f à l'origine du temps. Par définition, on a aussi, à l'origine du temps, $\rho = 0$, $\rho' = 0$, $\tau = \tau_0$, $\tau' = 0$, les dérivées des variables ρ, τ devant, pour $t = 0$, se confondre avec les dérivées nulles des quantités analogues prises sur une ellipse osculatrice. Pour déterminer f, on a la quadrature

$$f - f_0 = \int \frac{\partial\Omega}{\partial v}\,dt \tag{18}$$

(nous écrivons ici Ω sous sa forme ordinaire). Puis

$$\tau' = \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^2 \left(\frac{f-f_0}{f_0} - 2\rho - \rho^2\right),$$

(¹) Hansen met à la place de t une fonction du temps $z = t + \delta z$; mais cela revient à faire varier l'époque.

et, en supprimant les termes du second ordre,

$$(19)\qquad \tau - \tau_0 = \int \left(\frac{f - f_0}{f_0} - 2\rho \right) dt,$$

les intégrales étant toujours prises de manière qu'elles s'annulent pour $t = 0$. La valeur de ρ se trouve par une double quadrature. En différentiant l'équation

$$\frac{1+\rho}{r} = \frac{1 + e\cos v}{p},$$

on a d'abord

$$r\rho' - (1+\rho)r' = -\frac{e}{p}\sin v f,$$

puis

$$r\rho'' - (1+\rho)r'' = -\frac{e}{p}\sin v f' - \frac{e}{p}\cos v \frac{f^2}{r^2}.$$

Les dérivées r'' et f' étant remplacées par leurs valeurs tirées des équations du mouvement, il vient

$$(20)\qquad \rho'' + \frac{M\rho}{r^3} = \frac{1}{r_e}\frac{\partial\Omega}{\partial r} - \frac{e \sin v}{pr}\frac{\partial\Omega}{\partial v} + \frac{M}{r^3}\left(\frac{f^2}{f_0^2} - 1\right).$$

On a d'ailleurs $\rho = 0$, $\rho' = 0$, pour $t = 0$. Le facteur $\left(\frac{f^2}{f_0^2} - 1\right)$ peut être remplacé par $2\frac{f - f_0}{f_0}$.

8. Les valeurs de ρ et de τ une fois obtenues par des quadratures, on connaît les coordonnées polaires r, u, c'est-à-dire la position de la planète par rapport aux axes mobiles qui tournent avec l'orbite. Il reste à tenir compte du déplacement de ces axes. Par une ingénieuse transformation, Hansen a ramené cette partie du calcul à la recherche de la différence

$$\Delta z = z - z_0,$$

où z_0 signifie la valeur de z qu'on obtient en remplaçant les variables i, σ par i_0, σ_0. Cela revient à faire tourner les axes mobiles (ξ, η, ζ) d'un angle $\sigma - \sigma_0$ autour de la normale à l'orbite, et d'un angle $i - i_0$ autour de la ligne des nœuds. Les axes (ξ, η) sont ainsi amenés dans les positions (ξ_0, η_0), et r dans la position r_0,

sans rien changer aux valeurs des variables ξ, η, r, u, déjà déterminées. On a évidemment

$$z = r\cos(z, r) = \xi\cos(z, \xi) + \eta\cos(z, \eta),$$
$$z_0 = r\cos(z, r_0) = \xi\cos(z, \xi_0) + \eta\cos(z, \eta_0);$$

la variable z_0 est donc simplement une fonction linéaire donnée de ξ, η. En posant $\Delta z = rs$, nous avons

$$\begin{aligned} s &= \cos(z, r) - \cos(z, r_0) \\ &= \sin i \sin(u - \sigma) - \sin i_0 \sin(u - \sigma_0). \end{aligned}$$

Cette expression représente ce qu'on pourrait appeler la perturbation de la latitude b, puisque $\cos(z, r) = \sin b$. Comme elle n'est pas affectée par la rotation instantanée de l'orbite, on peut la différentier en traitant i, σ comme des constantes, et il vient

$$\frac{r^2}{f} s' = \sin i \cos(u - \sigma) - \sin i_0 \cos(u - \sigma_0);$$

le second membre représente la perturbation de la latitude du rayon vecteur perpendiculaire à r; je le désignerai par s_p.

En nous rappelant que les équations du mouvement ont la même forme en z et en ξ, η, nous pouvons écrire (¹)

$$(\Delta z)'' + \frac{M}{r^3}\Delta z = \frac{\partial\Omega}{\partial z} - \frac{\partial\Omega}{\partial z_0} = \cos i\,\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta} + s_\xi\frac{\partial\Omega}{\partial\xi} + s_\eta\frac{\partial\Omega}{\partial\eta},$$

où s_ξ, s_η sont les perturbations de la latitude des deux axes.

Si l'on fait tour à tour coïncider l'axe des ξ avec le rayon vecteur r et avec un rayon vecteur χ parallèle à la projection de la force perturbatrice sur l'orbite, on voit facilement que la somme des deux derniers termes peut être représentée par

$$s\frac{\partial\Omega}{\partial r} + s_p\frac{\partial\Omega}{r\,\partial u} = s_\chi\frac{\partial\Omega}{\partial\chi}.$$

Ces termes sont du second ordre et peuvent généralement être

(¹) Je me suis efforcé de simplifier la démonstration de ces équations. On peut consulter, sur la méthode de Hansen, une thèse de M. Périgaud (1877). Une démonstration géométrique des formules (23) a été donnée par M. L. Hopff, en 1862 (*Astronom. Nachrichten*, n° 1353).

négligés. On trouve donc rs par la double quadrature

(21) $$(rs)'' + \frac{M}{r^3}(rs) = \cos i \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}.$$

La latitude b s'obtient ensuite par la formule

(22) $$\sin b = \sin i_0 \sin(u - \sigma_0) + s.$$

Faisons maintenant tourner le système (ξ_0, η_0) autour de l'axe des z d'un angle $\vartheta - \vartheta_0 - \Gamma$; le nœud deviendra $\vartheta_0 + \Gamma$, et l'angle Γ pourra être choisi de manière que les différences $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, des coordonnées relatives à la nouvelle ligne des nœuds soient proportionnelles à Δz, ou que les rapports des Δ soient indépendants de u. Cette condition est remplie quand r et r_0 *coïncident* pour l'intersection des plans (ξ, η) et (ξ_0, η_0). En effet, cette intersection fait alors des angles égaux avec les axes ξ et ξ_0, et avec deux rayons conjugués quelconques r, r_0, d'où il suit que les lignes qui joignent les extrémités des couples r, r_0 sont toutes parallèles, et que leurs projections Δx, Δy, Δz ont les mêmes rapports, quel que soit u. Les équations qui fournissent la longitude l peuvent dès lors être mises sous cette forme :

(23) $$\begin{cases} \cos b \sin(l - \vartheta_0 - \Gamma) = \cos i_0 \sin(u - \sigma_0) - s \tang i_0 - \dfrac{sq}{\varkappa \cos i_0}, \\ \cos b \cos(l - \vartheta_0 - \Gamma) = \cos(u - \sigma_0) + \dfrac{sp}{\varkappa}, \end{cases}$$

où

$$p = \sin i \sin(\sigma - \sigma_0), \quad q = \sin i \cos(\sigma - \sigma_0) - \sin i_0,$$
$$\varkappa = 1 + \cos i \cos i_0 - \sin i \sin i_0 \cos(\sigma - \sigma_0)$$
$$\varkappa \sin(\vartheta - \vartheta_0 - \Gamma) = (\cos i + \cos i_0)\sin(\sigma - \sigma_0).$$

On prend d'habitude $\sigma_0 = \vartheta_0$. Les quantités Γ, sp, sq sont du second ordre et le plus souvent négligeables; mais on peut les déterminer aisément en fonction de s et s_p.

9. Au lieu de faire varier l'époque τ, comme le veut cette méthode, il y aurait peut-être avantage à faire varier le périhélie ϖ. Le point de départ serait alors une ellipse keplérienne complètement déterminée, qui changerait seulement de position; r_r et v

seraient des fonctions *données* du temps. On aurait, dans ce cas

$$(24) \qquad r_e^2 v' = f_0, \quad r^2 v' = f_0(1+\rho)^2,$$

$$(25) \qquad u' = v' + \varpi', \quad f = f_0(1+\rho)^2 + r^2\varpi'.$$

Après avoir déterminé $f - f_0$ comme dans le cas précédent, on trouverait ϖ par la quadrature

$$(26) \qquad \varpi - \varpi_0 = \int [f - f_0 - (2\rho + \rho^2) f_0] \frac{dt}{r^2}.$$

L'équation différentielle en ρ peut s'établir comme il suit.

La relation $1 + \rho = \dfrac{r}{r_e}$ donne d'abord

$$(r_e^2 \rho')' = r_e r'' - r r_e'',$$

puis, en remplaçant r'', r_e'' par leurs valeurs,

$$(r_e^2\rho')' + \frac{f_0^2}{r_e^2}\rho = r_e\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r} + \frac{f^2 - f_0^2}{r^3}\right) + \mathrm{M} r_e (r - p)\left(\frac{1}{r_e^3} - \frac{1}{r^3}\right).$$

Mais cette équation se prête mal aux quadratures, et il y a lieu de la transformer.

Pour y arriver, remarquons que les deux coordonnées fictives

$$x_e = r_e \cos v, \quad y_e = r_e \sin v$$

sont des fonctions données du temps qui satisfont aux équations différentielles

$$x_e'' + \frac{\mathrm{M} x_e}{r_e^3} = 0, \quad y_e'' + \frac{\mathrm{M} y_e}{r_e^3} = 0.$$

Soit maintenant φ une fonction des coordonnées véritables, et posons

$$(27) \qquad \begin{cases} \varphi = \alpha x_e + \beta y_e, \\ \varphi' = \alpha x_e' + \beta y_e', \\ 0 = \alpha' x_e + \beta' y_e, \end{cases}$$

nous aurons

$$\varphi'' + \frac{\mathrm{M}\varphi}{r_e^3} = \alpha' x_e' + \beta' y_e',$$



et par suite

$$(28)\quad \begin{cases} -f_0.\alpha' = y_e\left(\varphi'' + \dfrac{M\varphi}{r_e^3}\right), \\ f_0.\beta' = x_e\left(\varphi'' + \dfrac{M\varphi}{r_e^3}\right), \end{cases}$$

puisque $x_e y'_e - y_e x'_e = f_0$.

Si nous prenons $\varphi = r - r_e$, nous aurons, d'une part,

$$r = r_e + \alpha x_e + \beta y_e,$$

et de l'autre

$$(29)\quad \begin{cases} -f_0.\alpha' = y_e\left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial r} + \dfrac{f^2 - f_0^2}{r^3}\right) + M y_e (r-p)\left(\dfrac{1}{r_e^3} - \dfrac{1}{r^3}\right), \\ f_0.\beta' = x_e\left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial r} + \dfrac{f^2 - f_0^2}{r_1^3}\right) + M x_e (r-p)\left(\dfrac{1}{r_e^3} - \dfrac{1}{r^3}\right), \end{cases}$$

ou bien, en négligeant des termes très petits,

$$(30)\quad \begin{cases} -f_0\,\alpha' = r_e \sin v\left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial r} + 2f_0\dfrac{f - f_0}{r_e^3}\right) + \dfrac{3M\rho}{r_e}(\rho - e\cos v)\sin v, \\ f_0\,\beta' = r_e \cos v\left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial r} + 2f_0\dfrac{f - f_0}{r_e^3}\right) + \dfrac{3M\rho}{r_e}(\rho - e\cos v)\cos v. \end{cases}$$

Ces deux quadratures fournissent α, β. Les intégrales doivent s'annuler pour $t = 0$, puisque $\rho = 0$, $\rho' = 0$, à l'origine du temps.

Pour appliquer sa méthode au calcul des perturbations absolues, Hansen introduit les éléments de l'ellipse osculatrice à côté des éléments constants qui sont employés ici. Mais nous n'avons pas, pour le moment, à nous occuper de cette application, qui nous écarterait trop de notre sujet.

10. On pourrait encore modifier l'énoncé de la méthode en écrivant p_0 à la place de p et posant $p_0(1 + \rho) = p$, de sorte que l'équation de l'ellipse deviendrait

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos v.$$

A la place de la variable r, on introduirait ainsi le paramètre variable d'une ellipse keplérienne, dans laquelle les éléments e, n, τ seraient des constantes numériques données; la relation

$n^2 a^3 = M$ n'aurait plus lieu, puisque a serait variable en vertu d
la relation $p = a(1 - e^2)$. Mais cette conception, qui est le poi
de départ des récents travaux de M. Weiler, me paraît moins clai
que celle d'une ellipse auxiliaire invariable. L'emploi du paramèt
variable ne sert qu'à compliquer sans nécessité les démonstration
Notre équation $r^2 v' = f_0(1 + \rho)^2$ devient, chez M. Weiler,

$$v' = \frac{f_0}{p_0^2}\left(\frac{p}{r}\right)^2 = l\left(\frac{p}{r}\right)^2,$$

où l est une constante absolue. Mais, sous prétexte d'abréger l'é
criture, il modifie ensuite l'unité de temps, l'unité de longueur, etc
de sorte que les distances et les vitesses n'ont plus chez lui la s
gnification qu'on y attache d'ordinaire, ce qui rend la lecture c
ses Mémoires difficile (¹). Je me bornerai donc à donner une id
de ses recherches, en suivant une marche différente qui me para
plus simple.

Il s'agit de déterminer les perturbations mutuelles de trois cor
célestes, en partant des équations transformées par la substituti
orthogonale de Jacobi. Nous nous servirons pour cela d'une e
lipse auxiliaire invariable, qui change seulement de positi
($u' = v' + \varpi'$). Mais il faut maintenant aborder le problème da
toute sa généralité, tandis que, dans la méthode exposée au n° 1
on n'a en vue qu'une première approximation numérique.

11. Cherchons d'abord à établir les relations qui nous fourn
ront r en fonction de r_e. Nous y arriverons en posant, comme a
n° 9,

$$\varphi = \alpha x_e + \beta y_e,$$

mais en prenant cette fois $2\varphi = r^2 - r_e^2$.

Les nouvelles variables α, β seront alors déterminées par l
équations différentielles

$$f_0 . \alpha' = -y_e\left(\varphi'' + \frac{M\varphi}{r_e^3}\right),$$
$$f_0 . \beta' = \quad x_e\left(\varphi'' + \frac{M\varphi}{r_e^3}\right),$$

(¹) *Grundzüge einer neuen Störungstheorie*. Leipzig, 1872. — ***Astronom. Nac richten***, nos 2291-2292, 2311-2317; 1880.

où il reste à remplacer φ par sa valeur. Si l'on admet que l'ellipse auxiliaire était une ellipse osculatrice à l'origine du temps, on aura, pour $t=0$, $\varphi=0$, $\varphi'=0$, puisque r' coïncide alors avec r'_e, et il s'ensuit qu'il faudra prendre $\alpha_0=0$, $\beta_0=0$ pour $t=0$. Cette condition détermine les constantes qui entrent dans les intégrales par lesquelles se trouvent α, β.

En vertu de (4), nous avons

$$\frac{\mu}{2}(r^2)''=2h+\frac{mm_0}{r}+r\frac{\partial\Omega}{\partial r},$$

d'où

$$\mu\left(\varphi''+\frac{M\varphi}{r_e^3}\right)=r\frac{\partial\Omega}{\partial r}+2(h-h_0)+\mathbf{r},$$

en désignant par $\mathbf{r}$ le terme du second ordre

$$\mathbf{r}=\frac{mm_0}{2}\frac{2r_e+r}{rr_e^3}(r-r_e)^2=\frac{\mu M}{2r}(3\rho^2+\rho^3).$$

Par conséquent,

$$(31)\quad\left\{\begin{aligned}\mu f_0.\alpha'&=-y_e\left[\frac{r\partial\Omega}{\partial r}+2(h-h_0)+\mathbf{r}\right],\\ \mu f_0.\beta'&=\quad x_e\left[\frac{r\partial\Omega}{\partial r}+2(h-h_0)+\mathbf{r}\right].\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations sont, au fond, identiques avec celles qui, chez M. Weiler, déterminent le paramètre variable, et qui servent de base à sa théorie des perturbations. Mais M. Weiler ne fait pas $\alpha_0=0$, $\beta_0=0$, ce qui suppose que l'ellipse auxiliaire n'est pas osculatrice pour $t=0$.

Les seconds membres des équations ci-dessus dépendent de l'élément $(h-h_0)$, et l'on se rappelle que

$$2h=\mu\left(r'^2+\frac{f^2}{r^2}-\frac{2M}{r}\right),$$

$$h'=r'\frac{\partial\Omega}{\partial r}+\frac{f}{r^2}\frac{\partial\Omega}{\partial v}.$$

L'intégrale des forces vives donne encore

$$h-h_0+h_1-h_{10}=\Omega-\Omega_0,$$

où Ω_0 est une constante comme h_0 et h_{10}; on a enfin l'identité

$$r\frac{\partial\Omega}{\partial r}+r_1\frac{\partial\Omega}{\partial r_1}+\Omega=0,$$

et ces deux relations permettent d'introduire h_1 et $\frac{\partial\Omega}{\partial r_1}$ à la place de h et de $\frac{\partial\Omega}{\partial r}$.

Dans son Mémoire de 1872, M. Weiler propose de déterminer d'abord l'élément $q=2(h-h_0)$, après quoi on procéderait à la détermination des éléments α, β (chez lui k, h), d'où se déduirait le paramètre p à l'aide de la relation

$$\frac{1}{2p_0}(p^2-p_0^2)=\frac{p}{r}(\alpha\cos v+\beta\sin v).$$

Connaissant p, on tirerait la valeur de f de l'équation qui définit h, et l'on trouverait l'élément π par l'équation

$$\varpi'=\pi'+\cos i\,\vartheta'=\frac{f-lp^2}{r^2},$$

ϑ et i étant déterminés par les équations connues.

Mais, dans sa dernière publication, M. Weiler abandonne ce mode d'intégration pour s'engager dans une voie toute différente, qu'il nous reste à indiquer.

12. M. Weiler commence par déterminer l'élément

$$S=\mu f+\mu_1 f_1$$

à l'aide de l'équation

$$(15)\qquad S'=2\sin^2\frac{1}{2}J.\sin(\upsilon+\upsilon_1)\frac{\partial\Omega}{\partial s},$$

qui a été établie au n° 6, et dont le second membre est très petit, si l'inclinaison J est petite. Connaissant S, on peut se servir de l'intégrale des forces vives pour exprimer f et f_1 en fonction d'autres variables, susceptibles d'être déterminées directement comme S. Pour y arriver, il y a lieu d'introduire d'abord, à la place de $h-h_0$, le nouvel élément

$$(32)\qquad g=2(h-h_0)-\mu\frac{f^2-f_0^2}{r^2},$$



qui ne contient plus f. En effet, nous avons (en faisant $f_0^2 = \mathrm{M}p_0$)

$$\frac{1}{\mu} g = r'^2 - r_e'^2 - \frac{2\mathrm{M}}{r} + \frac{2\mathrm{M}}{r_e} - \mathrm{M}p_0\left(\frac{1}{r_e^2} - \frac{1}{r^2}\right).$$

En tenant compte des relations

$$2\varphi = r^2 - r_e^2, \quad rr' = r_e r_e' + \varphi', \quad f_0 r_e r_e' = \mathrm{M}e y_e,$$
$$f_0 \alpha = y_e' \varphi - y_e \varphi',$$

on trouve

$$(33) \qquad \frac{1}{\mu} gr^2 = -2\mathrm{M}e\alpha + \varphi'^2 + \frac{\mathrm{M}}{r_e}(r - r_e)^2.$$

Posant toujours

$$r = r_e(1 + \rho),$$

on a encore

$$\frac{1}{\mu} gr_e^2 = -2\mathrm{M}e\alpha + r_e^4 \rho'^2 + \frac{\mathrm{M}p_0}{r^2 r_e^2}(r^2 - r_e^2)^2 - \mathrm{M}\frac{2r_e + r}{rr_e}(r - r_e)^2.$$

On voit que, en négligeant les termes du second ordre, on aurait simplement

$$(34) \qquad g = -2\mu\mathrm{M}e\frac{\alpha}{r_e^2}.$$

Ces relations nous permettront de démontrer que la dérivée de la fonction

$$(35) \qquad \psi = \frac{\mu\mathrm{M}e\alpha f_{10} + \mu_1\mathrm{M}_1 e_1 \alpha_1 f_0}{r_e^2 f_{10} - r_{1e}^2 f_0}$$

peut s'intégrer directement, tandis que celle de la variable α n'a pas cette propriété.

En indiquant toujours par le signe Σ la somme de deux termes symétriques, correspondant aux deux orbites, nous avons d'abord

$$\Sigma gr^2 f_{10} = -2\Sigma\mu\mathrm{M}e\alpha f_{10} + \gamma,$$

où γ représente l'ensemble des termes du second ordre. Ensuite

$$\Sigma gr^2 f_{10} = \Sigma 2(h - h_0) r^2 f_{10} - 2 f_0 f_{10}(\mathrm{S} - \mathrm{S}_0) - \lambda,$$

où le terme

$$\lambda = \mu f_{10}(f - f_0)^2 + \mu_1 f_0 (f_1 - f_{10})^2$$

est encore du second ordre. On tire de là

$$2\Sigma\mu M e\alpha f_{10} = -\Sigma 2(h-h_0)r^2 f_{10} + 2f_0 f_{10}(S-S_0$$

ou bien

$$2\Sigma\mu M e\alpha f_{10} = -\Sigma 2(h-h_0)r_e^2 f_{10} + 2f_0 f_{10}(S-$$

en désignant par ε la somme $\lambda+\gamma$ augmentée d'un te pend de $(h-h_0)(r^2-r_e^2)$.

La dérivée de l'expression ci-dessus, qui représent teur de ψ, peut être formée à l'aide de l'équation pa détermine α'. En nous rappelant que $Mey_e = f_0 r_e r_e'$ vons

$$-2\Sigma\mu M e\alpha' f_{10} = \Sigma\left[2(h-h_0) + r\frac{\partial\Omega}{\partial r} + \mathbf{r}\right](r$$

Pour abréger, je poserai

$$r_e^2 f_{10} = a, \quad r_{1e}^2 f_0 = b,$$

d'où

$$\psi = \frac{\Sigma\mu M e\alpha f_{10}}{a-b};$$

on trouvera ψ' en formant

$$(a-b)\Sigma\mu M e\alpha f_{10} - (a'-b')\Sigma\mu M e\alpha' f_{10}.$$

Or, on a, d'une manière générale,

$$(a-b)(Aa'+Bb') - (a'-b')(Aa+Bb) = (A+B)$$

En faisant ici

$$A = 2(h-h_0), \quad B = 2(h_1-h_{10}),$$

remarquant que

$$A+B = 2(\Omega-\Omega_0),$$

et laissant de côté les termes du second ordre, l'ap cette formule donne

$$-2(a-b)^2\psi' = 2(\Omega-\Omega_0)(ab'-ba')$$
$$+(a-b)\Sigma r\frac{\partial\Omega}{\partial r}a' + (a'-b')2f_0 f$$

En tenant compte de l'identité

$$r\frac{\partial\Omega}{\partial r}+r_1\frac{\partial\Omega}{\partial r_1}+\Omega=0,$$

on aurait encore

$$(a-b)\Sigma r\frac{\partial\Omega}{\partial r}a'=(a'-b')\Sigma r\frac{\partial\Omega}{\partial r}a-\Omega(ab'-ba');$$

par conséquent,

$$-2\psi'=(\Omega-2\Omega_0)\frac{ab'-ba'}{(a-b)^2}+\frac{a'-b'}{(a-b)^2}[\Sigma r\frac{\partial\Omega}{\partial r}a+2f_0f_{10}(S-S_0)].$$

On voit que ψ' ne dépend que de la fonction perturbatrice Ω et de S, en dehors des quantités données a, b et des termes du second ordre que nous avons supprimés ici. L'élément ψ s'obtient donc, comme S, par une quadrature. Connaissant S et ψ, on pourra aussi intégrer les équations en α', β'. En effet, nous avons

$$-2\Sigma\mu Me\alpha f_{10}=\Sigma 2(h-h_0)a-2f_0f_{10}(S-S_0)-\varepsilon.$$

Or,

$$\Sigma 2(h-h_0)a=2(h-h_0)(a-b)+2(\Omega-\Omega_0)b;$$

par suite,

$$(36)\qquad -\psi=h-h_0+\frac{b(\Omega-\Omega_0)-f_0f_{10}(S-S_0)}{a-b},$$

en supprimant le terme du second ordre ε. On peut donc exprimer $(h-h_0)$ en fonction des variables S, ψ, déjà connues, et les équations différentielles en α', β' deviennent ainsi des quadratures.

13. Il nous reste à exprimer par les mêmes variables l'inconnue f. Nous avons

$$(32)\qquad \mu\frac{f^2-f_0^2}{2r^2}=h-h_0-\frac{1}{2}g,$$

d'où, en ne conservant que les termes du premier ordre,

$$(37)\quad \frac{\mu f_0}{r^2}(f-f_0)=\frac{\mu Me}{r^2}\alpha-\psi-\frac{b(\Omega-\Omega_0)-f_0f_{10}(S-S_0)}{a-b}.$$

On a ainsi f en fonction de S, ψ, α et de quantités données.

En confondant ici r avec r_e, et nous rappelant que $r_e^2 v' = f_0$, cette relation peut s'écrire

$$\mu (f - f_0)(v' - v'_1) = \frac{\mu M e}{r^2} \alpha + \frac{\mu_1 M_1 e_1}{r_1^2} \alpha_1 + \Omega - \Omega_0 - v'_1 (S - S_0),$$

et sous cette forme on voit qu'elle peut se déduire directement de la suivante :

$$\Sigma \mu (f - f_0) v' = \Sigma \left(h - h_0 - \frac{1}{2} g \right).$$

Pour trouver les termes du second ordre qui ont été négligés, il suffit de remarquer que l'équation $f^2 - f_0^2 = 2C$ donne

$$f - f_0 = \frac{C}{f_0} - \frac{C^2}{2 f_0^3} + \frac{C^3}{2 f_0^5} - \frac{5 C^4}{8 f_0^7} + \dots.$$

La marche que j'ai suivie ici est beaucoup plus directe que celle par laquelle M. Weiler arrive aux mêmes résultats en partant de l'équation

$$\Sigma \mu \frac{f^2 - f_0^2}{r^2} = 2 (\Omega - \Omega_0) - g - g_1,$$

dans laquelle il remplace $\mu_1 f_1$ par $S - \mu f$.

Lorsqu'on a déterminé $f - f_0$ à l'aide de l'équation (37), la relation $S = \mu f + \mu_1 f_1$ fournit la valeur de f_1, les inclinaisons i, i_1, J se déduisent des intégrales des aires, le nœud ϑ s'obtient par une quadrature, et le périhélie par la relation suivante :

$$\pi' + \cos i \, \vartheta' = \frac{f}{r^2} - \frac{f_0}{r_e^2}.$$

14. Cette esquisse rapide suffira pour donner une idée des principes sur lesquels repose la méthode de M. Weiler. Je ne crois pas nécessaire d'entrer ici dans de plus amples détails sur l'intégration des équations destinées à fournir successivement les valeurs des éléments troublés. Il est d'ailleurs à présumer que la méthode en question, telle qu'elle a été ébauchée par M. Weiler, n'a pas encore reçu sa forme définitive, et qu'il sera possible de la simplifier sous plus d'un rapport. M. Weiler affirme qu'elle procure de grands avantages au point de vue des inégalités séculaires; mais les indications qu'il a données à ce sujet sont encore trop [illegible]

pour qu'on puisse se rendre un compte exact de la réalité de ces avantages.

COMPOSITIONS DONNÉES AUX EXAMENS DE LICENCE DANS LES DIFFÉRENTES FACULTÉS DE FRANCE, EN 1880.

SESSION DE JUILLET.

Marseille.

Composition d'Analyse. — La tangente MT menée d'un point quelconque M d'une surface à une sphère donnée de rayon a est dans un rapport constant $\frac{1}{\lambda}$ avec la moyenne proportionnelle entre la distance OP du centre O de cette sphère au plan tangent à la surface au point M et la longueur MN de la normale en ce point à la surface, cette normale étant terminée par sa trace N sur un plan diamétral fixe de la sphère. On demande :

1° De trouver l'équation générale de la surface ;

2° De trouver l'équation de la surface : 1° lorsque le rayon a de la sphère est nul ; 2° lorsque le rapport $\frac{1}{\lambda}$ est égal à l'unité ;

3° De discuter ces divers résultats.

Composition de Mécanique. — Deux points M, M′ mobiles dans un plan sans frottement sont reliés par un fil flexible, inextensible et sans masse qui passe sans frottement dans un anneau très petit situé dans le plan. Le point M′ étant astreint à décrire une droite AB du plan et le fil étant tendu, la vitesse initiale du point M étant perpendiculaire au rayon OM, on demande d'étudier le mouvement du système dans le cas général et dans celui où la droite AB passe par le point O.

Il n'y a pas de forces appliquées.

Épreuve pratique. — Étant données la latitude géographique φ d'un lieu, l'ascension droite α et la déclinaison δ d'un astre, calculer l'azimut et la distance zénithale de cet astre au temps sidéral t.

Besançon.

Composition d'Analyse. — Déterminer une courbe telle que, menant par un point quelconque la tangente MT et la normale MN, les diagonales du quadrilatère formé pour ces deux droites et les deux axes Ox et Oy fassent un angle donné θ.

Composition de Mécanique. — Déterminer la figure d'équilibre d'un fil fixé en deux de ses points et attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance.

Épreuve pratique. — On donne la distance zénithale d'un astre, sa distance polaire et la latitude du lieu. Calculer l'angle horaire du plan méridien qui contient l'astre.

Bordeaux.

Composition d'Analyse. — On a deux plans dont l'un se meut parallèlement à lui-même avec une vitesse constante, tandis que l'autre tourne aussi avec une vitesse constante autour d'une droite fixe A perpendiculaire à la direction du premier. La droite d'intersection rencontre dans chacune de ses positions une surface de révolution ayant pour axe l'axe de rotation du second plan.

Étudier la courbe tracée par ces rencontres sur la surface de révolution. On considérera plus spécialement le cas où la surface de révolution est un cône. Calculer alors les angles de contingence et de torsion de la courbe.

Examiner, si le temps le permet, le cas d'une sphère.

Composition de Mécanique. — Première question (lemme). — Une figure plane A, située dans le plan xy, tourne avec ce plan autour de l'axe des y; la vitesse angulaire ω est constante. On demande les expressions simplifiées de la résultante R des forces centrifuges nées du mouvement et du couple G, qu'on obtiendrait en transportant cette résultante parallèlement à elle-même au de gravité de la figure.

Seconde question (application). — Une tige p

a ses extrémités A et B obligées de rester l'une sur la verticale Oy, l'autre sur l'horizontale Ox, le plan xy tourne avec la vitesse constante ω autour de Oy. On néglige le frottement. On demande :

1° La position d'équilibre de la tige AB pour une vitesse angulaire donnée ω (détermination de l'angle θ qu'elle fait avec l'horizontale) ;

2° Les pressions exercées par la tige sur les axes Ox, Oy ;

3° Les équations différentielles du mouvement dans le cas général ;

4° La détermination complète du mouvement lorsque la tige est très légèrement écartée de sa position d'équilibre.

Épreuve pratique. — Calculer de 2^m en 2^m, et pour des angles horaires variant de 4^h à $4^h 10^m$, la hauteur au-dessus de l'horizon d'une étoile dont la déclinaison est $1°21'14'',32$. La latitude est de $44°50'19'',0$. On vérifiera l'exactitude des calculs par la méthode des différences.

Grenoble.

Composition de Mécanique. — Étudier le mouvement d'un point matériel dans un plan, en supposant qu'il soit attiré par un point fixe de ce plan, en raison inverse de la cinquième puissance de la distance.

Indiquer les différentes formes de la trajectoire au moyen de son équation différentielle. Dans quel cas peut-on effectuer complètement l'intégration?

Épreuve pratique. — Déterminer l'azimut du centre du Soleil à $3^h 10^m$ de l'après-midi (temps moyen) avec les données suivantes :

Latitude du lieu	45° 11′ 12″
Déclinaison australe du Soleil	17° 8′ 53″
Équation du temps	$13^m 48^s$.

Lyon.

Composition d'Analyse. — Déterminer en coordonnées curvilignes (u, v) le rayon de courbure d'une section normale à une surface.

Faire voir que ce rayon passe par un maximum et un minimum, quand on fait varier le rapport $\frac{du}{dv}$.

Composition de Mécanique. — Mouvement d'un point matériel soustrait à l'action de toute force extérieure et assujetti seulement à se mouvoir sur un ellipsoïde donné.

Épreuve pratique. — Le 17 juillet 1880, à midi moyen de Paris, la planète Mars a pour coordonnées héliocentriques

Longitude héliocentrique	$167°5'26'',3$
Latitude	$1°37'37'',8$
Logarithme du rayon vecteur	0,2204213

Au même instant la longitude du Soleil est $115°12'9'',2$. On a longitude du rayon vecteur de la Terre $= 0,0069929$. Déterminer la longitude et la latitude géocentriques de la planète à l'instant considéré.

Montpellier.

Composition d'Analyse. — Intégration de l'équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants : 1° lorsqu'elle est privée de second membre ; 2° lorsqu'elle possède un second membre fonction de x.

Composition de Mécanique. — Mouvement d'un point matériel pesant assujetti à se trouver constamment dans un plan qui tourne uniformément autour d'un axe vertical situé dans ce plan. Le mobile éprouve en outre la résistance d'un milieu supposée proportionnelle à la vitesse.

Épreuve pratique. — Les hauteurs apparentes de deux étoiles sont respectivement égales à $48°0'49''$ et $70°34'9''$. Leur distance apparente est $58°8'48''$:

1° Calculer les éléments nécessaires pour déterminer la distance vraie de ces étoiles ;

2° Former avec ces éléments le tableau des calculs à effectuer pour arriver à son expression numérique.

Nancy.

Composition d'Analyse. — 1° Intégrer l'équation aux différentielles partielles

$$\frac{x}{y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+(1-y^2)\frac{\partial\varphi}{\partial z}+(a-yz)\frac{\partial\varphi}{\partial z}+(b-yu)\frac{\partial\varphi}{\partial u}=0.$$

2° Trouver la valeur de l'intégrale définie $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ et en conclure les valeurs des intégrales

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n}\,dx,\quad \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx,\quad \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx.$$

Composition de Mécanique. — 1° En un point O de la surface de la Terre, situé à la latitude λ, on considère un plan poli P, supposé vertical et perpendiculaire au plan méridien. Un mobile pesant assujetti à demeurer dans le plan P est lancé du point O avec une vitesse initiale donnée.

Étudier le mouvement du mobile dans le plan P, en tenant compte de la rotation de la Terre. Calculer la réaction du plan.

2° Un corps solide dont deux points sont fixes est en équilibre sous l'action de forces données. Rechercher les pressions supportées par les deux points fixes.

Épreuve pratique. — Résolution d'un triangle sphérique.

Poitiers.

Composition d'Analyse. — Trouver les courbes telles que, si par le point N où une normale quelconque MN rencontre l'axe Ox on mène une parallèle à la tangente en M, cette droite passe par un point A donné sur l'axe Oy.

Trouver les trajectoires orthogonales de ces courbes.

Composition de Mécanique. — Un point matériel, non pesant, est lancé avec une vitesse v_0, parallèlement à une droite fixe vers laquelle il est attiré avec une force proportionnelle à la distance

et dont la valeur est μ à l'unité de distance; il éprouve en outre, de la part du milieu dans lequel il se meut, une résistance proportionnelle à sa vitesse et dont la valeur est $2k$ pour une vitesse égale à l'unité.

Étudier les divers cas que peut présenter le mouvement de ce point suivant les grandeurs relatives de $\sqrt{\mu}$ et de K.

Épreuve pratique. — Quels seront, le 18 juillet 1880, l'azimut et la distance zénithale d'Arcturus, l'heure sidérale étant 18^h.

Latitude Poitiers	$46°34'55''$
Ascension droite Arcturus..........	$14^h 10^m 13^s,97$
Déclinaison boréale................	$19°48'21'',7$

Toulouse.

Composition d'Analyse. — 1° On considère la surface représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$zx^2 = ay^2,$$

a étant une constante. Trouver ses lignes asymptotiques.

2° Intégrer l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 2a^2\frac{d^2y}{dx^2} + a^4y = \cos ax,$$

où a est une constante.

Composition de Mécanique. — Soit un fil l, inextensible et sans poids, aux extrémités duquel sont attachées deux petites masses pesantes m, m'; l'une d'elles m' glisse sur un plan horizontal fixe PQ, tellement placé que le fil aABb s'enroule sur un cylindre droit par un quart de cercle AB, ce cylindre tournant autour d'un axe horizontal passant par le centre O de la circonférence AB. On demande la loi du mouvement de chacune des masses m, m' et du cylindre ainsi que les tensions des brins de fil aA, Bb.

On tiendra compte du frottement de glissement de la masse m' sur le plan PQ et de la résistance de l'air, résistance que l'on supposera proportionnelle au carré de la vitesse angulaire de rotation du cylindre.

Épreuve pratique. — Résoudre un triangle sphérique géodésique, connaissant deux côtés b, c et l'angle compris A.

Rennes.

Composition d'Analyse. — 1° Trouver une courbe telle que l'angle MOT sous lequel on voit d'un point donné O la portion MT de tangente à cette courbe comprise entre le point de contact M et une droite fixe DD′ soit constant.

2° C étant le point de rencontre du rayon vecteur OM avec la droite CC′ parallèle à DD′ et menée à égale distance du point O et de cette droite, trouver le lieu géométrique du point P conjugué harmonique du point C par rapport aux deux points O et M, et conclure de là une manière simple de déduire les points de la courbe en question d'une courbure connue, ainsi que la construction de la tangente.

Examiner spécialement le cas où l'angle MOT est égal à 90°.

Composition de Mécanique. — Définir le mouvement tautochrone. Un point sollicité par une force qui ne dépend que de la position ayant un mouvement rectiligne tautochrone, donner l'expression de cette force.

Expression de la composante tangentielle dans le mouvement tautochrone curviligne. Détermination de la courbe tautochrone dans le cas d'un point pesant, et étude de ce mouvement.

Épreuve pratique. — Épure : intersection d'un paraboloïde de révolution et d'un plan.

Clermont.

Composition d'Analyse. — Donner une méthode pour avoir les courbes dans lesquelles le rayon de courbure ρ est une fonction donnée de l'angle α que la tangente à la courbe fait avec une direction fixe

$$\rho = f(\alpha).$$

Application aux cas où $f(\alpha) = a\cos\alpha$, $f(\alpha) = \dfrac{a}{\cos^2\alpha}\cdot$

Composition de Mécanique. — Théorie du mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe. Cas où le corps se réduit à trois points de masses m, m', m'', situés sur une même perpendiculaire à cet axe.

Épreuve pratique. — En un lieu de la Terre, on observe l'azimut α d'une étoile à son lever et sa hauteur méridienne h. On demande la latitude du lieu et la déclinaison de l'étoile.

Dijon.

Composition d'Analyse. — Exposer une méthode permettant de déduire l'intégrale générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre quelconque de celle de la même équation privée de son second membre. Appliquer cette méthode à l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 6\frac{du}{dx} + 9u = \frac{9x^2 + 6x + 2}{x^3}.$$

Composition de Mécanique. — Soient trois axes coordonnés rectangulaires Ox, Oy, Oz, l'axe des z étant vertical et dirigé vers le haut; on considère un paraboloïde de révolution ayant pour équation $z = \frac{x^2 + y^2}{2a}$. Un point matériel pesant mobile sur la surface est repoussé par l'axe Oz proportionnellement à la distance. Étudier le mouvement du point, sachant que les coordonnées initiales du mobile sont

$$x_0 = a, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = \frac{a}{2},$$

et les projections de la vitesse initiale

$$(v_x)_0 = 0, \quad (v_y)_0 = b, \quad (v_z)_0 = 0, \quad b > 0.$$

Former l'équation différentielle de la projection de la trajectoire sur le plan des xy, et discuter cette courbe dans les cas où elle a des branches infinies.

Épreuve pratique. — L'excentricité d'une planète étant supposée égale à $\frac{1}{4}$, calculer l'anomalie vraie et l'anomalie moyenne

correspondant à une anomalie excentrique égale à

$$30^\circ 19' 24'', 54.$$

SESSION DE NOVEMBRE.

Marseille.

Composition d'Analyse. — 1° Recherche des lignes asymptotiques et des lignes de courbure de la surface

$$z = mxy.$$

2° Angles sous lesquels les premières lignes sont coupées par les secondes.

3° Courbes suivant lesquelles ces deux sortes de lignes se projettent sur le plan des xy.

Composition de Mécanique. — Un point M non pesant est mobile dans un canal circulaire poli; ce point est sollicité par une force perpendiculaire à un diamètre fixe AB de ce cercle et proportionnelle à la distance du point M à ce diamètre. Trouver le mouvement du point M.

Épreuve pratique. — Résolution d'un triangle sphérique, connaissant les trois côtés.

Besançon.

Composition d'Analyse. — On demande de calculer la surface détachée sur une des nappes d'un cône de révolution par un plan sécant donné.

Composition de Mécanique. — Mouvement d'un pendule dans un milieu résistant, en supposant la résistance proportionnelle à la vitesse. Cas des petites oscillations.

Épreuve pratique. — Épure de Géométrie descriptive.

Bordeaux.

Composition d'Analyse. — Équation différentielle des trajectoires orthogonales des courbes représentées par une équation contenant un paramètre variable.

Extension aux trajectoires obliquangles.

Application aux trajectoires orthogonales des courbes représentées par l'équation

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + a^2 = 0,$$

λ étant le paramètre variable.

Étendre, si le temps le permet, la recherche des trajectoires orthogonales ou obliquangles au cas des courbes représentées par des équations en coordonnées polaires.

Composition de Mécanique. — Un point matériel M assujetti à rester sur une droite CD est attiré vers le point O par une force qui varie en raison inverse du carré de la distance. Ce corps part sans vitesse d'un point A de la droite. On demande :

1° De déterminer la vitesse du point M à un instant donné (indiquer diverses méthodes);

2° De trouver la pression exercée par le point M sur la droite OA;

3° De résoudre complètement le problème en supposant les angles θ et α, que font les droites OM, OA avec la perpendiculaire à CD, assez petits pour que l'on puisse poser $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$, $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$. Exprimer en fonction de θ le temps t que le mobile met à atteindre une position M quelconque ;

4° De déterminer la longueur L du pendule simple OM′ qui, vu du point O, paraîtrait osciller dans le même temps que le point M (OM et OM′ doivent toujours former le même angle θ avec la perpendiculaire à CD, au degré d'approximation indiqué).

Épreuve pratique. — Le 12 mars 1880, on a observé α d'Orion vers l'Ouest, à 14°23′15″,23 au-dessus de l'horizon. On demande de calculer l'heure sidérale de l'observatoire et l'azimut de l'[illegible]

à l'instant de l'observation. Les coordonnées de α d'Orion sont

$$\mathcal{R} = 5^h 48^m 42^s,21,$$
$$\delta = 7^\circ 22' 57'',2.$$

La latitude du point d'observation est $44^\circ 50' 19'',0$.

Caen.

Composition de Géométrie analytique. — Trouver le lieu des foyers d'une hyperbole dont on connaît un sommet et une asymptote.

Composition d'Analyse et de Mécanique. — 1° Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}{c^2 \cos^2 x + d^2 \sin^2 x} dx.$$

2° Déterminer sur une surface gauche de révolution les trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes.

3° Déterminer l'accélération totale d'un point, connaissant son mouvement relatif par rapport à certains axes et le mouvement de ces axes.

4° Une barre homogène et très mince, reposant sur un plan horizontal parfaitement poli, est choquée par une bille dont la vitesse est perpendiculaire à la barre; en supposant les deux corps parfaitement élastiques, on demande le mouvement qu'ils prendront après le choc.

Épreuve pratique. — Résolution d'un triangle sphérique.

Grenoble.

Composition d'Analyse. — Trouver une courbe plane telle que, si d'un point fixe pris dans son plan on mène des rayons vecteurs à ses différents points, le lieu de la projection du centre de courbure sur le rayon vecteur correspondant soit une courbe symétrique de la proposée par rapport au point fixe.

On vérifiera que la courbe trouvée satisfait bien à la condition énoncée.

Composition de Mécanique. — On donne un cylindre vertical à base circulaire, et par un point B de sa surface on lance un point matériel pesant, assujetti à rester sur la surface de ce cylindre. La vitesse initiale est V_0; elle fait un angle α avec la génératrice du point B.

On demande de déterminer le mouvement du point. On demande en outre de déterminer à quelle hauteur maximum il s'élèvera.

Quelle doit être la vitesse initiale V_0 pour que le point, en atteignant cette hauteur maximum, se retrouve sur la génératrice du point de départ B?

Trouver la forme que prend la trajectoire du mobile lorsqu'on développe la surface cylindrique sur un plan.

Calculer la réaction du cylindre sur le point.

Épreuve pratique. — On a mesuré en un lieu de la Terre les hauteurs d'une étoile et du centre de la Lune au-dessus de l'horizon, ainsi que leur différence d'azimut, et l'on demande sous quel angle leur distance serait vue du centre de la Terre, en tenant compte de la réfraction.

Données.

Hauteur de l'étoile...............	$27^\circ, 35'$
Hauteur du centre de la Lune.....	$35, 20'$
Différence des azimuts............	$13, 15'$
Parallaxe horizontale de la Lune..	$57', 2''$

Réfraction $\theta = 60'', 6 \tang z$, z étant la distance zénithale de l'astre.

Lyon.

Composition d'Analyse. — On demande d'intégrer l'équation

$$(y^3 + 2xy^2)\,dy - 2y^3\,dx + (x + y)(x\,dy - x\,dx) = 0.$$

On indiquera de plus la marche à suivre pour trouver un facteur d'intégrabilité homogène quand l'équation à intégrer présente cette forme.

Composition de Mécanique. — Un mobile libre non [illegible] attiré vers deux centres fixes par deux forces proportio[illegible]

distance et dont les intensités sont respectivement comme 1 à 3, à l'unité de distance.

On demande d'étudier le mouvement du mobile en supposant qu'il soit d'abord en repos et que le mouvement ait lieu, soit dans le vide, soit dans un milieu résistant. On admettra dans ce dernier cas que la résistance est proportionnelle à la vitesse et a un coefficient très faible.

Épreuve pratique. — En un lieu dont la latitude est égale à 48°50′49″, on trouve, à un moment donné, pour hauteur d'une étoile 13°57′52″ et pour déclinaison 8°25′45″,2. On demande l'angle horaire de l'étoile au moment de l'observation.

Montpellier.

Composition d'Analyse. — Déterminer l'équation finie d'une courbe gauche d'après les conditions suivantes :

1° La courbe est située sur la surface du cône $x^2+y^2=k^2z^2$;

2° Toutes les tangentes à cette courbe rencontrent le cercle

$$z=h,\quad x^2+y^2=a^2.$$

Rectification de la courbe. Calcul de la surface du cône comprise entre l'arc et la courbe de deux génératrices fixes.

Composition de Mécanique. — Équations de l'équilibre d'un fil flexible. Application à la chaînette.

Épreuve pratique. — On a trouvé pour les distances zénithales de deux étoiles les valeurs

$$z=73^\circ 19' 26'',5,$$
$$z'=40^\circ 53' 56'',3,$$

leurs déclinaisons étant d'ailleurs

$$D=69^\circ 55' 36',4,$$
$$D'=81^\circ 34',$$

et la différence Æ — Æ′ de leurs ascensions droites étant

$$78^\circ 49' 38'',3.$$

On demande : 1° d'indiquer les opérations à effectuer pour trouver l'angle du vertical d'une de ces étoiles et de son plan horaire : 2° en supposant que cet angle ait été trouvé égal à $43°29'8'',3$, calculer la latitude du lieu et l'angle horaire correspondant à l'observation des deux astres faite simultanément par deux observateurs.

Nancy.

Composition d'Analyse. — 1° Soit une intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$, dans laquelle $f(x)$ devient infinie pour une valeur $x = c$ comprise entre a et b ; supposons qu'on puisse mettre $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(c-x)^n}$$

n étant positif, et $\varphi(x)$ n'étant pas nul pour $x = c$ et restant fini entre $x = a$ et $x = b$.

On demande d'expliquer dans quel cas $\int_a^b f(x)dx$ sera fini, dans quel cas $\int_a^b f(x)\,dx$ sera infini.

Exemples à prendre :

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{x^{\frac{3}{2}}}, \quad \int_0^\pi \cos^{-p} x \sin^{-q} x\,dx.$$

On demande de démontrer que $\int_a^b f(x)dx$ peut être indéte miné. Les candidats choisiront pour exemple $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$, et montu ront comment cette intégrale pourra devenir déterminée si l fait varier x de -1 à $+1$ en le faisant passer par des vale imaginaires.

2° Prouver que l'équation différentielle

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0,$$

où n est un nombre entier positif, peut être satisfaite

polynôme entier et comment on peut en conclure la solution générale.

Composition de Mécanique. — 1° Démontrer le principe de d'Alembert.

2° Étudier le mouvement du pendule cycloïdal dans un milieu qui résiste proportionnellement à la vitesse.

Épreuve pratique. — Résolution d'un triangle sphérique.

Toulouse.

Composition d'Analyse. — On considère la surface enveloppe de la sphère représentée par l'équation contenant deux paramètres arbitraires a et b,

$$(x-a)^2+(y-b)^2+[z-F(b)]^2=\varphi^2(a),$$

F et φ étant deux fonctions données quelconques. Trouver les lignes de courbure de cette surface. On montrera que les lignes de courbure sont des lignes planes et que les plans d'un des systèmes sont parallèles au plan des yz.

Composition de Mécanique. — Une plaque pesante, homogène, infiniment mince, d'égale épaisseur et dont la forme est celle d'un triangle rectangle, peut tourner dans un plan vertical autour d'un axe perpendiculaire à ce plan et passant par le sommet de l'angle droit. Déterminer :

1° L'angle que fait l'un des côtés de l'angle droit avec l'horizontale située dans le plan d'oscillation de la plaque et passant par le sommet de cet angle droit, quand la plaque est en équilibre ;

2° L'amplitude des oscillations que la plaque exécute lorsqu'on l'abandonne à son poids après avoir amené le côté considéré dans une position horizontale.

Épreuve pratique. — Une étoile dont la déclinaison est $+15°$ passe au méridien d'un lieu à 2^h (temps sidéral). La latitude du lieu est 35°. A quelle heure sidérale l'étoile se couchera-t-elle ?

Rennes.

Composition d'Analyse. — Intégration de l'expression

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

dans laquelle x, y, z sont trois variables indépendantes et X, Y, Z trois fonctions données de ces variables. Prouver que, si l'expression est une différentielle exacte, la valeur de l'intégrale

$$\int_a^b \left(X + Y\frac{dy}{dx} + Z\frac{dz}{dx}\right) dx,$$

dans laquelle on regarde y et z comme des fonctions de x, est indépendante de ces fonctions, pourvu que leurs valeurs limites soient toujours les mêmes.

Composition de Mécanique. — Un mobile sollicité par une force dirigée vers un point fixe et fonction de sa distance à ce point est observé par une personne placée au centre d'action, perpendiculairement au plan qui contient ce centre, et la vitesse initiale du mobile est animée d'un mouvement de rotation sur elle-même. Le rayon vecteur qui joint l'observateur au mobile paraît tourner uniformément avec la vitesse angulaire ω'. Quelle est à chaque instant la vitesse angulaire ω de l'observateur et quelle sera la trajectoire apparente?

Si la force est proportionnelle à la $n^{\text{ième}}$ puissance de la distance, que devra être l'exposant de cette puissance pour que les calculs puissent se ramener aux fonctions élémentaires? Examiner spécialement les cas $n = 1$, $n = -2$.

Épreuve pratique. — Épure : intersection d'une sphère et d'un cône.

Clermont.

Composition d'Analyse. — Trouver les aires des boucles formées par les courbes dont les équations suivent :

1° $x^{2n+1} + y^{2n+1} = a(xy)^n$,

2° $x^{2n} + y^{2n} = a(xy)^{n-1}$.

Dans les deux cas, n désigne un nombre entier positif.

Composition de Mécanique. — Mouvement d'un point pesant sur la courbe

$$ax + s - \frac{e^{ns} - 1}{n} = 0,$$

sachant qu'il y a une résistance proportionnelle au carré de la vitesse, cette résistance étant exprimée par la formule $R = nv^2$.

Épreuve pratique. — On donne la déclinaison et l'ascension droite d'une étoile. On demande de calculer la longitude et la latitude.

Lille.

Composition d'Analyse. — 1° Intégrer l'équation différentielle du premier ordre

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (y - x)^2.$$

2° Des lignes asymptotiques sur une surface à courbures opposées. Équation différentielle de ces lignes. Détermination de leur plan osculateur. Leur courbure peut-elle s'obtenir par l'emploi du théorème de Meusnier, relatif à la courbure des sections obliques d'une surface?

Composition de Mécanique. — 1° Établir les trois équations, dites *équations d'Euler*, qui déterminent le mouvement d'un corps solide autour d'un corps fixe sous l'action de forces données.

2° Un pendule composé est formé : 1° d'une tige OA pesante et homogène, de longueur connue $2a$ et de masse M; 2° d'un corps de forme quelconque, de masse μ, dont le centre de gravité B peut être fixé en un point variable de la tige OA. On connaît le rayon K de giration de ce corps par rapport à un axe mené par son centre de gravité, parallèle à l'axe de suspension horizontale Oz.

Comment varie la durée des oscillations infiniment petites de ce pendule avec la position du point B sur la tige? (On ne déplace le corps B le long de la tige que par un mouvement de translation.)

Épreuve pratique. — La longitude de Moscou étant 35°17′30″ et sa colatitude 34°14′47″, trouver l'azimut de Moscou sur l'horizon de Paris, azimut compté du Nord et sa distance sphérique à Paris. On sait que la colatitude de Paris est 41°9′8″.

SUR QUELQUES POINTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS (¹);

PAR M. HERMITE.

L'importante Communication de M. Hermite que nous analysons comprend deux Parties bien distinctes : la première se rapporte à la théorie des fonctions analytiques uniformes, la seconde à la notion de *coupure*.

I. Il s'agit principalement du théorème de M. Mittag-Leffler :

Soit $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... *une suite indéfinie de fonctions rationnelles, telles que* $f_\nu(x)$ *ne devienne infinie que pour* $x = a_\nu$, *et supposons que, les modules de la suite indéfinie* $a_1, a_2, \ldots$ *allant en croissant, on ait la condition* $\lim a_\nu = \infty$. *On peut alors toujours former une fonction analytique uniforme* $F(x)$, *avec le seul point singulier* ∞, *n'ayant d'autres pôles que* $a_1, a_2, \ldots$, *et telle que la différence* $F(x) - f_\nu(x)$ *soit finie pour* $x = a_\nu$.

Considérant d'abord le cas où les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... seraient de la forme $\frac{1}{x-a_1}$, $\frac{1}{x-a_2}$, ..., comme les fractions auxquelles donne naissance la considération de la dérivée logarithmique d'une fonction $\Phi(x)$ holomorphe dans tout le plan, M. Hermite distingue deux circonstances :

1° Il existe un entier positif n tel que la série des quantités

$$\frac{1}{|a_1|^{n+1}} + \frac{1}{|a_2|^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{|a_\nu|^{n+1}} + \cdots \quad (^2)$$

soit convergente.

(¹) Helsingfors, 1881; in-4°, 28 p. Extrait d'une Lettre à M. Mittag-Leffler (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XII).

(²) Le symbole $|a|$ désigne le module de a.

Posant alors

$$P_\nu(x) = \frac{1}{a_\nu} + \frac{x}{a_\nu^2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{a_\nu^n},$$

on a

$$\frac{1}{a_\nu - x} - P_\nu(x) = \frac{x^n}{a_\nu^n(a_\nu - x)},$$

et la série

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{x^n}{a_\nu^n(a_\nu - x)}$$

convergera uniformément et inconditionnellement dans le domaine de tout point autre que les points $a_1, a_2, \ldots$, comme on le voit tout de suite en considérant la série des modules; cette série représente une fonction $F(x)$ qui satisfait manifestement aux conditions de l'énoncé.

2° Mais l'hypothèse d'où a été déduite la construction de la fonction $F(x)$ ne peut pas toujours être réalisée, et l'on est alors amené à retrancher de la fraction $\frac{1}{a_\nu - x}$ un polynôme $P_\nu(x)$ dont le degré ne reste pas fini comme précédemment; posant alors

$$P_\nu(x) = \frac{1}{a_\nu} + \frac{x}{a_\nu^2} + \cdots + \frac{x^{\nu-1}}{a_\nu^\nu},$$

on a

$$\frac{1}{a_\nu - x} - P_\nu(x) = \frac{x^\nu}{a_\nu^\nu(a_\nu - x)},$$

et l'on considère la série

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{x^\nu}{a_\nu^\nu(a_\nu - x)},$$

déjà utilisée par M. Weierstrass et qui converge pour toute valeur de la variable autre que les points $a_1, a_2, \ldots$, ainsi que la série des modules, puisque la racine $\nu^{\text{ième}}$ du module du terme de rang ν a pour limite zéro, lorsqu'on suppose ν infini; elle représente encore une fonction analytique $F(x)$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

Le théorème, ainsi démontré dans le cas de la dérivée logarithmique d'une fonction holomorphe $\Phi(x)$, conduit à la décomposition en facteurs primaires d'une telle fonction : en effet, l'expression

$$F(x)+\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)},$$

n'ayant plus de pôles, est, dans tout le plan, une fonction holomorphe qu'on peut représenter par $G'(x)$, et de la relation

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left[\frac{1}{a_\nu-x}-P_\nu(x)\right]+\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)}=G'(x)$$

on conclut, en posant

$$\mathrm{P}_\nu(x)=\int_0^x P_\nu(x)\,dx,$$

$$\Phi(x)=e^{G(x)}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)e^{\mathrm{P}_\nu(x)}\right].$$

Supposons maintenant que les fonctions rationnelles $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... soient de la forme $\frac{R_1}{x-a_1}$, $\frac{R_2}{x-a_2}$, ..., en sorte qu'on ait affaire à une fonction uniforme à infinis simples.

S'il arrive encore qu'il existe un nombre entier n tel que la série

$$\left|\frac{R_1}{a_1^{n+1}}\right|+\left|\frac{R_2}{a_2^{n+1}}\right|+\dots+\left|\frac{R_\nu}{a_\nu^{n+1}}\right|+\dots$$

soit convergente, on continuera de faire

$$P_\nu(x)=\frac{1}{a_\nu}+\frac{x}{a_\nu^2}+\dots+\frac{x^{n-1}}{a_\nu^n},$$

$$F(x)=\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}R_\nu\left[\frac{1}{a_\nu-x}-P_\nu(x)\right]$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\frac{R_\nu x^n}{a_\nu^n(a_\nu-x)}.$$



La série qui figure dans le second membre, ainsi que les séries des dérivées, convergent uniformément partout ailleurs qu'aux pôles; l'existence de la fonction $F(x)$ et celle de ses dérivées sont ainsi entièrement démontrées.

Il ne reste plus, en supposant toujours que les infinis des diverses fonctions rationnelles sont simples, que le cas où les séries

$$\sum \left| \frac{R_\nu}{a_\nu^{n+1}} \right|$$

sont divergentes pour toute valeur de n. Faisant alors

$$P_\nu(x) = \frac{1}{a_\nu} + \frac{x}{a_\nu^2} + \cdots + \frac{x^{\omega_\nu - 1}}{a_\nu^{\omega_\nu}},$$

il s'agit de déterminer les entiers ω_ν par la condition que la série

$$\sum \frac{R_\nu . x^{\omega_\nu}}{a_\nu^{\omega_\nu}(a_\nu - x)}$$

soit convergente dans tout le plan.

En posant

$$|R_\nu| = |a_\nu|^{\rho_\nu},$$

la série des modules

$$\sum \left| \frac{R_\nu . x^{\omega_\nu}}{a_\nu^{\omega_\nu}(a_\nu - x)} \right|$$

se décompose en deux parties qui répondent, l'une à l'hypothèse $\rho_\nu \leqq 0$, l'autre à l'hypothèse $\rho_\nu > 0$; on rend la première convergente en supposant que les quantités ω_ν satisfassent à la condition

$$\omega_\nu - \rho_\nu \geqq \nu;$$

quant à la seconde, on peut l'écrire

$$\sum \left| \frac{x^{\omega_\nu}}{a_\nu^{\omega_\nu - \rho_\nu}(a_\nu - x)} \right|,$$

et, en posant

$$|a_\nu| = |a_{\nu-1}|^\alpha \quad (\alpha > 1),$$

le terme général devient

$$\frac{|x|^{\omega_\nu}}{|a_{\nu-1}|^{\alpha(\omega_\nu-\rho_\nu)}\,|a_\nu - x|}.$$

Si l'on fait maintenant

$$\alpha(\omega_\nu - \rho_\nu) = \omega_\nu + \varepsilon_\nu,$$

ε_ν étant une quantité positive telle que ω_ν soit un nombre entier non inférieur à ν, on s'assurera sans difficulté que la racine $\nu^{\text{ième}}$ du terme général qui précède a pour limite zéro quand ν augmente indéfiniment.

Enfin, le cas où les fonctions rationnelles $f_\nu(x)$ ont des infinis multiples se déduit du cas où elles n'ont que des infinis simples, cas où la proposition est entièrement démontrée.

II. Dans la seconde partie de sa Lettre, M. Hermite met en pleine lumière une propriété capitale de ces fonctions d'une variable imaginaire z qui tirent leur origine de la considération d'une intégrale définie telle que

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{F(t, z)}{G(t, z)}\, dt,$$

propriété relative aux *lignes de discontinuité* d'une telle fonction.

Supposant d'abord que la variable d'intégration t soit réelle et aille en croissant de t_0 à t_1, et que les fonctions $F(t, z)$, $G(t, z)$ soient holomorphes en t et en z, il est clair qu'une pareille intégrale a une valeur déterminée tant que la valeur de z est telle que l'équation en t

$$G(t, z) = 0$$

n'ait pas de racine réelle comprise entre t_1 et t_2. Si dans cette dernière équation on fait varier t de t_1 à t_2, le point dont l'affixe z est défini par cette équation décrira une ou plusieurs courbes, dont l'ensemble sera le lieu des points du plan pour les-

quels la fonction cesse d'être définie par l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{F(t, z)}{G(t, z)} dt.$$

Or, en excluant les points de ces courbes pour lesquels l'une des quantités

$$P(t, z) = \frac{\partial G}{\partial t}, \quad Q(t, z) = \frac{\partial G}{\partial z}$$

s'annulerait, l'auteur met en évidence ce fait capital, que la différence des valeurs que prend la fonction en deux points infiniment voisins de la courbe de discontinuité, situés de part et d'autre de cette courbe sur la normale en l'un de ses points, est finie, et il calcule la valeur de cette différence.

Soit, en effet, M un point de la courbe pour lequel $t = \theta$, $z = \zeta$; un calcul simple montre d'abord que l'affixe Z d'un point de la normale en ce point peut être mise sous la forme

$$Z = \zeta + i\varepsilon\lambda \frac{P(\theta, \zeta)}{Q(\theta, \zeta)},$$

λ étant une quantité positive, et ε représentant l'unité affectée du même signe (ou d'un signe contraire) que la partie réelle de

$$\frac{P(\theta, \zeta)}{Q(\theta, \zeta)},$$

si l'on veut avoir affaire (ou non) à un point situé sur la partie supérieure de la normale.

N et N' désignant deux points opposés sur cette normale, un calcul facile montre que, en négligeant sous le signe d'intégration des quantités qui n'influent pas sur la valeur limite de la différence

$$\Phi(N') - \Phi(N)$$

des valeurs que prend la fonction aux points N et N', on peut écrire

$$\Phi(N') - \Phi(N) \int_{t_0}^{t_1} \frac{2 i\varepsilon\lambda \, PQ[F(t, \zeta)\, Q(t, \zeta) - G(t, \zeta)\, R(t, \zeta)]}{Q^2 G^2(t, \zeta) + \lambda^2 P^2 Q^2(t, \zeta)} dt.$$

où P et Q ont été mis, pour abréger, à la place de $P(\theta, \zeta)$, $Q(\theta, \zeta)$. Sauf dans le cas, exclu de nos suppositions, où ζ serait un point double, l'équation en t

$$G(t, \zeta) = 0$$

n'a que la racine $t = \theta$ qui soit réelle et comprise entre t_0 et t_1. On voit donc que, si l'on fait tendre λ vers zéro, la partie de l'intégrale qui correspond à des valeurs de t qui ne sont pas voisines de θ a une limite nulle. D'après cela on voit aisément que cette intégrale a la même limite que

$$\frac{2i\varepsilon F(\theta, \zeta)}{P(\theta, \zeta)} \int_{\theta-\mu}^{\theta+\nu} \frac{\lambda\, dt}{(t-\theta)^2 + \lambda^2},$$

où μ et ν sont des quantités positives infiniment petites. Cette limite est donc

$$\frac{2i\pi\varepsilon F(\theta, \zeta)}{P(\theta, \zeta)}.$$

Il n'est pas utile d'insister sur le parti qu'on peut tirer de ce résultat. M. Hermite rapproche la notion si simple et en même temps si essentielle des lignes de discontinuité présentées par la fonction $\Phi(z)$ de la notion de *coupure* introduite par Riemann. Ce nom de *coupure* convient certainement à ces lignes de discontinuité; on peut toutefois remarquer que les *coupures* introduites par M. Hermite sont complètement déterminées et qu'il n'y a rien de pareil pour les coupures de Riemann.

M. Hermite donne ensuite quelques applications de sa formule.

Si, par exemple, $f(t)$ désigne une fonction uniforme, ne contenant pas z et ayant un nombre fini ou infini de pôles, les coupures relatives à la fonction

$$\Phi(z) = \int_{t_0}^{t_1} f(t+z)\, dt$$

seront des segments de droite parallèles à l'axe des abscisses, correspondant à chaque pôle. Pour chacune de ces droites on trouve aisément que la différence $\Phi(N) - \Phi(N')$ est égale au

produit par $-2i\pi$ du résidu relatif au pôle correspondant; ce résultat, immédiat pour les pôles simples, subsiste quel que soit l'ordre de multiplicité.

Si $f(t)$ est une fonction rationnelle dans laquelle le degré du numérateur est inférieur de deux unités au degré du dénominateur, l'intégrale

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+z)\,dt$$

est une constante dans chaque intervalle compris entre deux coupures consécutives; la valeur de cette constante change quand on passe d'un intervalle à l'autre, et les résultats précédents permettent de calculer sans difficulté les valeurs de ces diverses constantes. On peut maintenant construire la fonction $f(t)$ de façon que dans chaque intervalle la constante représentée par la fonction $\Phi(z)$ soit donnée, et l'on déduira de là l'expression d'une fonction représentant dans chaque intervalle telle fonction que l'on voudra, résultat analogue à celui que M. Weierstrass a communiqué à l'Académie des Sciences de Berlin en août 1880.

Des considérations analogues s'appliquent à l'intégrale

$$\Phi(z) = \int_{t_0}^{2\pi+z_0} f(t+z)\,dt,$$

où $f(t)$ est une expression rationnelle en $\sin t$ et $\cos t$, sans partie entière; on est ainsi conduit à la formule donnée par l'auteur dans son *Cours d'Analyse* (p. 328) et d'où résulte immédiatement la décomposition de la fonction $f(t)$ en éléments simples.

De même encore la considération de l'intégrale

$$\Phi(z) = \int_{t_0}^{t_0+2K} f(t+z)\,dt,$$

où $f(t)$ est une fonction uniforme admettant les deux périodes $2K$ et $2iK'$, montre naturellement que dans l'intérieur du parallélogramme des périodes la somme des résidus de cette fonction est nulle, et conduit, par conséquent, à la formule de décom-

position en éléments simples qui joue un rôle si capital dans la théorie des fonctions doublement périodiques.

Ces quelques applications montrent nettement la portée de la proposition fondamentale obtenue par M. Hermite dans le cas simple où il s'est placé. La question qu'il s'est posée en suggère d'autres plus générales, qui ne pouvaient assurément lui échapper : il en signale les plus importantes à la fin de sa Lettre à M. Mittag-Leffler; sans doute elles donneront lieu, dans l'avenir, à des développements d'un singulier intérêt.

J. T.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LUCAS (ÉDOUARD). — RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES. — Paris, Gauthier-Villars, 1882. In-8°.

Le Livre que nous annonçons est le tome premier d'une œuvre que l'auteur, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, a l'intention de publier rapidement. Ce Volume se rapporte spécialement à l'Arithmétique supérieure et à cette branche de la Géométrie qu'on appelle *Géométrie de situation*. A en juger par ce travail, il n'y a pas grand mérite à prédire que l'Ouvrage sera pour notre siècle, avec plus d'originalité, ce que les *Problèmes plaisans et délectables* de Bachet et les *Récréations mathématiques* d'Ozanam ont été pour nos ancêtres : le Livre classique par excellence.

Après une Préface verveuse, que nous recommandons aux lecteurs qui auraient le malheur d'être sceptiques à l'égard des *Récréations mathématiques,* l'auteur consacre une brillante introduction à l'historique de la Géométrie de situation; il en poursuit les traces dans Leibniz, Euler, Vandermonde, etc., et remonte jusqu'aux Indiens pour les carrés magiques. Il signale les applications de la nouvelle Géométrie au tissage; il fait un rapprochement très imprévu entre la méthode de construction d'une espèce de carrés magiques qu'il vient de découvrir : les *carrés diaboliques,* et la manière de construire l'armure des satins réguliers, indiquée par lui en 1867. Enfin, dans le passage suivant, il a le double mérite de montrer le lien des diverses parties de son travail et de donner une lumineuse philosophie de ses jeux : « Les jeux des traversées, des ponts, des labyrinthes ne reposent que sur la théorie des nombres pairs et impairs, c'est-à-dire sur les congruences de module 2; le jeu du solitaire s'appuie sur les congruences des modules 2 et 3; le jeu du taquin sur celles des modules 2, 4, 8; le jeu du baguenaudier sur la numération binaire, ou, en d'autres termes, sur les congruences ayant pour modules toutes les puissances de 2; enfin le problème des reines, les carrés magiques, le tissage, sur les congruences de module quelconque. Ainsi, c'est toujours la

théorie des congruences, mais habillée de vêtements aussi divers et aussi élégants que possible. »

La première récréation, intitulée le Jeu des traversées en bateau, est le développement de ce vieux problème : *Trois maris jaloux se trouvent avec leurs femmes au passage d'une rivière et rencontrent un bateau sans batelier; ce bateau est si petit, qu'il ne peut porter plus de deux personnes à la fois. On demande comment ces six personnes passeront, de telle sorte qu'aucune femme ne demeure en la compagnie d'un ou de deux hommes, si son mari n'est présent.* — Tartaglia ([1]) s'était proposé de résoudre la difficulté pour quatre ménages; mais il s'est trompé : la chose est impossible. Bachet le remarqua. Depuis, M. Labosne a généralisé le problème, mais sa solution laissait à désirer pour l'élégance. M. Lucas donne un premier essai plus simple; puis, dans une Note à la fin du Volume, une autre généralisation, qui est due à M. Delannoy.

La seconde récréation, le Jeu des ponts et des îles, est la traduction d'un Mémoire d'Euler sur le *Problème des ponts de Königsberg;* en voici l'énoncé : *Quelle que soit la forme d'un fleuve, sa distribution en bras, par des îles en nombre quelconque, et quel que soit le nombre de ponts jetés sur le fleuve, trouver si l'on peut franchir celui-ci en passant une fois, et une seule, sur chacun des ponts.* Cela revient, au point de vue géométrique, à ceci : On donne une figure quelconque réunie par des droites et des courbes, quel est le nombre minimum des traits continus, sans arrêt ni répétition, nécessaires à son tracé complet? Cette question, très importante dans la théorie des courbes unicursales, est traitée dans la Note II placée à la fin du Volume.

Le Jeu des labyrinthes, qui fait l'objet de la troisième récréation, est la réalisation du jeu suivant : Choisissez arbitrairement,

---

([1]) Mort en 1557 et non en 1559, comme le dit M. Lucas; c'est à M. le prince Boncompagni qu'on doit cette importante rectification (*Testamento inedito di Nicolo Tartaglia*, dans la collection de Mémoires mathématiques, publiée en souvenir du Père Chelini).

sur une feuille de papier blanc, un nombre quelconque de points; joignez-les deux à deux, et autant de fois que vous voudrez, par un nombre quelconque de lignes, droites ou courbes, de telle sorte qu'aucun point du système ne reste isolé des autres; vous aurez ainsi un réseau géométrique. Recouvrez-le d'une feuille de carton opaque, de manière à ne pas conserver le souvenir du plan du labyrinthe; cette feuille de carton est percée d'un *oculaire,* qui permet seulement d'apercevoir une petite fraction du réseau. Déplacez le carton ou l'*écran,* de telle sorte que l'oculaire se trouve placé sur un carrefour A. Il s'agit de lui faire parcourir deux fois toutes les lignes du réseau, d'une manière continue, et de revenir ensuite au point de départ A. Pour conserver le souvenir du passage de l'oculaire sur chacun des chemins qu'il parcourt, on trace sur chaque ligne suivie un petit trait transversal, à l'entrée et à la sortie des carrefours. Par conséquent, les deux extrémités de chaque chemin devront, après les pérégrinations du voyage, avoir été marquées deux fois, mais non davantage.

Ce problème est évidemment un cas particulier du problème précédent. Lorsque tous les points d'un réseau sont pairs, le réseau peut être décrit d'un seul trait; il en est de même si l'on double un tracé quelconque, puisque les points impairs deviennent pairs. Il y a cependant entre ce problème et le précédent la différence que, dans le cas présent, on peut décrire la figure sans la voir entièrement.

La quatrième récréation est consacrée au PROBLÈME DES HUIT REINES, dans le jeu des échecs. Il s'agit, comme on sait, de disposer sur l'échiquier huit reines, de façon que deux quelconques d'entre elles ne soient jamais situées sur une même ligne parallèle à l'un des bords ou à l'une des diagonales de l'échiquier. Après un historique très curieux de l'exposé de divers procédés, nous arrivons à la véritable méthode, celle de M. Laquière : elle consiste à écrire successivement tous les nombres sur un échiquier, comme dans un système de numération, et à déduire les diverses solutions des premières par la rotation ou le renversement de l'échiquier. Grâce à ce procédé, M. Laquière a pu faire effectuer par un enfant, dans une après-midi, le tableau des 92 solutions sur l'échiquier de 64 cases. Lorsque le nombre des cases devient très grand, le pro-

blème devient impossible. On doit alors se borner aux solutions en quinconces : M. Lucas donne des théorèmes qui permettent de résoudre en ce cas la question.

La cinquième récréation sur le Jeu du solitaire présente, après quelques exercices simples, une remarquable exposition des travaux du Dr Reiss et du capitaine Hermary sur la théorie des impossibilités de ce jeu : cette théorie n'est au fond que celle des résidus d'un système de trois nombres entiers x, y, z suivant le module 3 ; x et y désignant les coordonnées de la case du solitaire, et z le nombre de boules qui se trouvent sur cette case. La récréation se termine par une étude du solitaire de 33 cases, traduite du Dr Reiss, et par des théorèmes de M. Hermary sur les solitaires du $n^{\text{ième}}$ ordre, c'est-à-dire sur les solitaires dans lesquels la règle du coup est de faire franchir à une boule n cases consécutives et d'enlever une boule dans chacune des cases franchies.

La sixième récréation sur la Numération binaire est un élégant exposé des usages et des propriétés de ce système peu étudié : à propos de la théorie des nombres parfaits, l'auteur donne, dans la Note IV placée à la fin du Volume, d'importants renseignements, sur des formules par lesquelles il a pu décomposer un nombre de plus de 200 chiffres en 56 facteurs premiers.

La septième récréation sur le Jeu du baguenaudier offre un intéressant exemple de l'importance des notations en Mathématiques ; il est curieux de voir combien le problème général du baguenaudier est simplifié par l'ingénieuse notation de M. Gros. Tout récemment, M. Badoureau a publié (*Revue scientifique,* 8 octobre 1881) une étude sur les réussites au jeu de cartes. La théorie de l'une d'elles, toujours possible quel que soit le nombre des cartes, revient au fond à celle du baguenaudier.

La huitième récréation clôt dignement cette première série : c'est une étude de près de cinquante pages sur *le Taquin.* On y trouve, non pas seulement la généralisation du taquin bien connu, c'est-à-dire le taquin rectangulaire à dimension quelconque, mais l'auteur étudie un système continu de cases carrées juxta

de telle forme qu'on voudra : c'est le *Taquin continental.* Puis vient le *Taquin complet,* où il s'agit de choisir le cube à enlever de telle sorte que l'on puisse, en suivant la marche ordinaire, arriver à une position finale convenue. La solution de ce problème repose sur la théorie des écarts, de même que la solution des précédents s'appuie sur la théorie des inversions et des permutations.

Chaque récréation est précédée d'un petit historique que relèvent souvent de piquants détails. Le Livre est suivi d'une liste complète de tous les Ouvrages publiés sur la matière : Brochures, Mémoires, Lettres, etc. Enfin le Volume sort, luxueusement imprimé, avec titre en deux couleurs, fleurons, culs-de-lampe, frontispices, etc., des presses de M. Gauthier-Villars ; nous n'en dirons pas davantage. L'auteur, qui s'entend en épigraphes, et l'éditeur semblent avoir pris pour devise certain précepte d'Horace : *Mêler l'utile à l'agréable ;* ils y ont réussi à chaque page.

C. HENRY.

GULDBERG (C.-M.) et MOHN (H.). — ÉTUDE SUR LES MOUVEMENTS DE L'ATMOSPHÈRE, IIe Partie. Programme de l'Université, à Christiania, pour le 2e semestre 1880 (en français), 53 pages.

Les auteurs présentent les équations générales hydrodynamiques en y introduisant la force centrifuge composée produite par la rotation de la Terre et les composantes du frottement. Il est évident que le frottement intérieur a lieu pendant les courants d'air et qu'il a sa valeur maximum à la surface de la Terre. Quant aux courants d'air horizontaux, la vitesse du vent croît avec la hauteur jusqu'à un maximum et en même temps l'angle entre le vent et l'isobare diminue.

Regardons un cyclone, c'est-à-dire un système de vents aux isobares circulaires autour d'un minimum barométrique à la surface de la Terre ; aux couches supérieures il a un maximum barométrique. L'air afflue suivant la surface de la Terre de tous côtés et les courants horizontaux se transforment peu à peu en courants verticaux ascendants. A une certaine hauteur le mouvement vertical se transforme en un mouvement horizontal et l'air sort d'un maximum aux couches supérieures. On n'a pas encore réussi à repré-

senter un tel système par des formules mathématiques; mais, en divisant le système en des parties diverses, on peut établir des équations qui montrent des analogies avec les systèmes de la nature.

S. L.

B. BONCOMPAGNI. — Testamento inedito di Nicolo Tartaglia. — Napoli-Milano-Pisa, Ulrico Hœpli, 1881. In-8° de 50 pages et fac-similé.

Extrait de la collection qu'une société d'éminents géomètres vient de faire paraître en l'honneur de la mémoire du Père D. Chelini; ce travail n'est pas un des moindres joyaux de cette jolie publication. On y trouve, publié pour la première fois en texte imprimé et en fac-simile, le testament de Nicolas Tartaglia, conservé aux archives des notaires de Venise. M. le prince Boncompagni vient de donner là un excellent exemple, qu'il est désirable de voir suivi bien vite et généralisé par les érudits mathématiciens; on sait combien les archives de notaires apportent chaque jour de documents de premier ordre à l'histoire littéraire et à l'histoire de l'art.

L'original de ce testament présente deux feuillets : le premier, au recto et au verso, est occupé par le document même; sur le verso du second feuillet se trouve une note, d'où il résulte que le grand géomètre de Brescia est mort du lundi 13 au mardi 14 décembre 1557. La date de cette mort n'avait jamais été précisée et même avait été inexactement fixée par divers historiens et bibliographes célèbres, Libri, Poggendorff, Hankel, Terquem, etc. C'est donc une acquisition précieuse pour la biographie.

La question d'origine élucidée, le savant éditeur étudie l'authenticité de son document : d'abord il le trouve indiqué dans divers catalogues, puis copié sur un registre spécial avec quelques variantes par le notaire érudit Rocco de Benedetti : il a soin de publier cette copie immédiatement après la reproduction de l'original. Passant ensuite à l'étude du testament, il en rapproche diverses particularités d'emprunts judicieux faits aux œuvres de Tartaglia ou à d'autres sources : il précise le prénom du père de Tartaglia, l'existence d'un frère aîné, d'une sœur cadette, le vrai nom de Tartaglia, qui était Fontana, et qui a été changé par suite

des horribles circonstances que l'on sait, l'habitation du célèbre géomètre lors de la rédaction de l'acte; il identifie deux libraires, cités dans le testament, avec les célèbres éditeurs de Tartaglia : Troiano et Giordano Ziletti; enfin il signale, à la Bibliothèque du Musée Correr de Venise, une pièce qui confirme l'existence du testament et ses principales données.

Ce travail, si remarquablement consciencieux, se termine par une intéressante liste des pièces précieuses exposées dans la vitrine qui renferme le testament de Tartaglia. C. H.

ROHN (K.). — LINEARE UND QUADRATISCHE TRANSFORMATION DER HYPERELLIPTISCHEN FUNCTIONEN $p=2$, SOWIE IHRE BEDEUTUNG FÜR DIE KUMMERSCHE FLÄCHE (¹).

Ce travail a pour but d'approfondir l'étude de la dépendance entre les fonctions hyperelliptiques et la surface de Kummer. L'objet final du Mémoire est spécialement d'élucider les relations mutuelles entre les diverses méthodes au moyen desquelles la surface de Kummer a été rattachée aux fonctions hyperelliptiques. La première méthode est due à Cayley, la seconde à Borchardt; elles se trouvent l'une et l'autre dans le tome 83 du *Journal de Crelle*. Une troisième méthode est développée dans le présent Mémoire. Les trois méthodes ont entre elles une relation très simple, consistant en ce qu'elles résultent toutes d'une transformation quadratique.

Pour atteindre le but que nous nous proposons, il est nécessaire, avant tout, d'étudier la transformation linéaire et quadratique en elle-même, et d'obtenir des formules aussi simples et aussi commodes que possible, qui permettent de bien saisir l'importance des transformations pour les fonctions ϑ. Tel est le contenu de la première Partie.

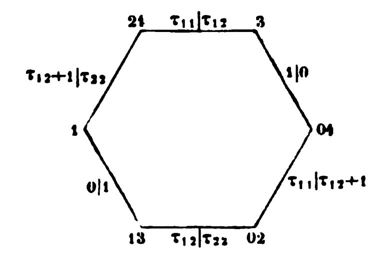
Par une *transformation linéaire*, toute fonction ϑ, abstraction faite peut-être d'une racine huitième de l'unité, se change en une autre fonction ϑ, tandis que les six ϑ impairs s'échangent entre

(¹) *Mathematische Annalen*, t. XV.

eux, ainsi que les dix ϑ pairs. En même temps, les relations qui ont lieu entre les ϑ se changent, dans chaque transformation, en d'autres relations entre les ϑ'. Pour décider maintenant en quelles fonctions ϑ' du système transformé se changent les fonctions ϑ du système donné, il faut établir la correspondance des périodes des deux systèmes.

On voit maintenant immédiatement que toutes les transformations qui diffèrent uniquement par le module de deux périodes entraînent la même correspondance entre les fonctions ϑ et ϑ', et qu'un changement dans les périodes doubles n'a d'influence que sur les coefficients composés avec les racines huitièmes de l'unité.

Tout le système doublement infini des périodes se réduit maintenant, mod. 2 périodes, *à quinze valeurs de périodes, qui*



naturellement peuvent se représenter par les quinze lignes de jonction de six points. Si l'on marque, en effet, six points (par exemple, aux sommets d'un hexagone régulier), et qu'on leur attribue les mêmes indices que ceux des six ϑ impairs : ϑ_{24}, ϑ_{3}, ϑ_{04}, ϑ_{02}, ϑ_{13}, ϑ_{1}, on pourra faire correspondre les quinze lignes de jonction aux quinze périodes de la manière suivante : en augmentant les arguments des ϑ impairs d'une demi-période quelconque, deux de ces fonctions se changeront toujours l'une dans l'autre. Elles sont représentées sur la figure par deux points portant les mêmes indices que ces fonctions; la ligne de jonction de ces deux points représentera dès lors la période *entière* correspondante; ainsi, aux lignes tracées répondent les périodes inscrites. En vertu de cette convention, la somme des valeurs des périodes, pour trois lignes contenant à elles toutes six points, sera $\equiv 0$ (mod. 2 périodes; de même, la somme des périodes d'une figure fermée $\equiv 0$ (mod. 2 pér.); de telle sorte que l'on obtiendra immédiatement,

pour toutes les lignes de jonction, les valeurs des périodes correspondantes.

Dans une transformation linéaire, aux quinze périodes qui sont distinctes suivant mod. 2 périodes doivent correspondre quinze périodes du nouveau système, jouissant de la même propriété, c'est-à-dire que la figure ci-dessus doit être rapportée à une seconde figure, ayant la même signification, par rapport au nouveau système d'intégrales, que la première figure par rapport au premier système d'intégrales. Cette transformation se réalise en faisant correspondre les six points de la nouvelle figure aux six points de l'ancienne figure, dans un ordre de succession tout à fait arbitraire; alors les quinze lignes de jonction de l'une et de l'autre figure se correspondent, et de même les quinze périodes de l'un et l'autre système. Il existe, d'après cela, 720 transformations linéaires, distinctes entre elles suivant mod. 2 périodes.

Pour voir encore comment se transforment les ϑ pairs, il est besoin d'une interprétation géométrique de ces fonctions dans la figure. Cette interprétation est facile à trouver. En effet, les six points peuvent se grouper de dix manières en sommets de deux triangles, et ces triangles ont la propriété que l'on parvient toujours à un ϑ *pair* en ajoutant à l'argument de la fonction ϑ impaire d'un sommet la moitié de la période représentée par le côté opposé, et de plus, tout couple de triangles conduit toujours *à une seule fonction* ϑ *paire,* de sorte que *ces dix paires de triangles représentent précisément les dix* ϑ *pairs.*

En déterminant ainsi comment doivent se correspondre les figures de deux systèmes d'intégrales, on obtient, en même temps, au moyen de cette correspondance, la coordination des périodes et des fonctions ϑ impaires et paires de ces systèmes d'intégrales. On parvient ainsi à des formules de la forme

$$\rho_\beta.\vartheta'_\alpha = \varkappa_\beta.\vartheta_\beta,$$

ϑ'_α étant la fonction qui résulte de ϑ_β par la transformation linéaire, $\varkappa_\beta$ une racine huitième de l'unité, et ρ un facteur de proportionnalité. Pour déterminer, de plus, cette constante $\varkappa_\beta$, on s'appuie sur ce théorème, que, dans une transformation linéaire, les relations entre les ϑ, et spécialement ici les *relations de Göpel,* doivent se changer en d'autres relations de même espèce. Dans le présent

Mémoire, on trouve un Tableau au moyen duquel on peut effectuer aisément le calcul des racines huitièmes de l'unité. On obtient, par exemple, la correspondance suivante :

$$\vartheta'_5,\ \vartheta'_4,\ \vartheta'_{01},\ \vartheta'_{23};\ \vartheta'_{12},\ \vartheta'_{03},\ \vartheta'_{02},\ \vartheta'_{13};\ \vartheta'_{34},\ \vartheta'_3,\ \vartheta'_2,\ \vartheta'_{24};\ \vartheta'_0,\ \vartheta'_{04},\ \vartheta'_1,\ \vartheta'_{14}.$$
$$\vartheta_{14},\ j\vartheta_1,\ \vartheta,\ j\vartheta_{01};\ i\vartheta_2,\ j\vartheta_{12},\ i\vartheta_3,\ j\vartheta_{13};\ \vartheta_5,\ j\vartheta_1,\ \vartheta_{23},\ j\vartheta_4;\ \vartheta_{03},\ ij\vartheta_{24},\ \vartheta_{02},\ ij\vartheta_{34}.$$

D'une telle correspondance on peut encore en déduire 31 autres par l'introduction des racines quatrièmes de l'unité. Ces transformations correspondantes ne diffèrent entre elles que suivant mod. 4 périodes; de chacune des correspondances ainsi obtenues, il en résulte encore quinze autres par des changements de signes; les transformations relatives ne diffèrent plus alors que suivant mod. 8 périodes.

Dans *la transformation quadratique,* on peut se servir, pour établir la correspondance des périodes, d'une figure tout à fait pareille à celle qui a servi dans la transformation linéaire. Marquons encore les six points des indices

$$24,\ 3,\ 04,\ 13,\ 02,\ 1;$$

tirons leurs quinze lignes de jonction, et attribuons à trois de ces lignes, contenant tous les six points, des périodes *entières,* et aux trois autres qui, avec les premières, complètent un hexagone, attribuons des *demi*-périodes. Les autres droites reçoivent alors des périodes telles que la somme des périodes de chaque figure fermée (prises avec les signes convenables) s'annule. Si l'on rapporte une telle figure à une autre dont les côtés, comme dans la transformation linéaire, représentent des périodes *entières,* on obtient la correspondance d'une transformation quadratique. Comme on le voit aisément, on peut, d'après la définition précédente, construire quinze figures différentes; elles correspondent aux quinze classes introduites par Hermite (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. XL); deux transformations de même classe peuvent se déduire l'une de l'autre par une transformation linéaire.

On peut aussi se demander comment les fonctions Θ du système transformé peuvent s'exprimer au moyen des fonctions ϑ du système donné. La réponse à cette question est donnée par le théorème suivant : *Toute transformation quadratique peut s'obtenir*

à l'aide de deux transformations linéaires et d'une transformation quadratique complètement déterminée, qui aux périodes

$$\tau'_{11}/\tau'_{12}, \quad \tau'_{12}/\tau'_{22}, \quad 0/1, \quad 1/0$$

fait correspondre les périodes

$$\tau_{11}/\tau_{12}, \quad \tau_{12}/\tau_{22}, \quad 0/\tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{2}/0.$$

De plus, on n'a besoin que d'établir le système complet de formules pour cette transformation quadratique spéciale pour en déduire, au moyen seulement de deux transformations linéaires, les formules relatives à une transformation quelconque.

Dans chacune des quinze classes de transformations quadratiques il existe un groupe de 24 transformations qui se distinguent particulièrement des autres. Désignons les six périodes qui forment les côtés d'un hexagone pour la figure du système donné, respectivement par

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_6;$$

pour la figure du système transformé, respectivement par

$$p'_1, \quad p'_2, \quad \ldots, \quad p'_6,$$

et rapportons les demi-périodes

$$\frac{p_1}{2}, \quad \frac{p_3}{2}, \quad \frac{p_5}{2}$$

respectivement à

$$p'_2, \quad p'_4, \quad p'_6,$$

et les périodes entières

$$p_2, \quad p_4, \quad p_6$$

respectivement à

$$p'_1, \quad p'_3, \quad p'_5;$$

on obtiendra ainsi une transformation singulière comme celle que nous avons annoncée.

Ces transformations singulières ont cette propriété, que, en les appliquant deux fois consécutivement, elles conduisent à la *bissection* des fonctions ϑ; on trouve dans le Mémoire un système de formules répondant à ce but.

Ici se termine la première Partie de ce travail, et commence la seconde Partie, qui traite de l'emploi de ces transformations dans l'étude de la surface de Kummer. Il existe *trois méthodes* pour relier la surface de Kummer avec les fonctions hyperelliptiques. La Géométrie des lignes nous fournit la *première méthode,* en faisant voir que, à chaque point de la surface de Kummer appartiennent deux paramètres, et qu'il y a toujours trente-deux points correspondants, comme possédant les mêmes paramètres. Si l'on part, en effet, d'un système confocal de complexes

$$\sum_{i=1}^{i=6} \frac{x_i^2}{k_i - \lambda} = 0,$$

toute droite de l'espace appartient à quatre complexes du système, tandis que quatre complexes se coupent suivant trente-deux droites correspondantes. Ces droites sont déterminées par les quatre paramètres des complexes; leurs coordonnées sont

$$\rho x_i^2 = \frac{(k_i - \lambda_1)(k_i - \lambda_2)(k_i - \lambda_3)(k_i - \lambda_4)}{f'(k_i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, 6).$$

Si deux paramètres deviennent égaux entre eux, les droites deviendront des tangentes à la surface de Kummer, laquelle est la surface des singularités du système de complexes confocaux. Si λ_1, λ_2 sont constants, et $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$ variables, on obtiendra trente-deux faisceaux des tangentes; aux points de contact de ces faisceaux (dont les tangentes ont toutes les deux paramètres λ_1, λ_2) on peut associer les paramètres λ_1, λ_2. Pour séparer les trente-deux points λ_1, λ_2, on formera les intégrales

$$\int_\alpha^{\lambda_1^+} dv_1'' + \int_\alpha^{\lambda_2^+} dv_1'' \Big/ \int_\beta^{\lambda_1^+} dv_2'' + \int_\beta^{\lambda_2^+} dv_2'',$$

et

$$\int_\alpha^{\lambda_1^+} dv_1'' + \int_\alpha^{\lambda_2^-} dv_1'' \Big/ \int_\beta^{\lambda_1^+} dv_2'' + \int_\beta^{\lambda_2^-} dv_2'',$$

où, suivant Prym (¹), v_1'' et v_2'' sont les intégrales normales de pre-

(¹) *Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen.*

mière espèce, appartenant à la forme

$$R = \sqrt{(k_1-\lambda)(k_2-\lambda)\ldots(k_6-\lambda)}.$$

Les limites inférieures α, β sont ici choisies de telle sorte que l'on ait

$$\vartheta\left(\int_\alpha^\lambda dv_1 \bigg/ \int_\beta^\lambda dv_2\right) = 0,$$

ainsi que Prym le fait dans le Mémoire cité.

De ces deux intégrales on tire en tout 32 valeurs distinctes suivant le module d'une période entière, et l'on peut se demander comment les valeurs de ces intégrales correspondent individuellement aux 32 points qui leur sont associés. Or les six fonctions ϑ impaires formées au moyen de ces intégrales sont proportionnelles aux quantités $\pm\sqrt{(k_i-\lambda_1)(k_i-\lambda_2)}$. En conséquence, on attribuera comme paramètre à chaque point les deux intégrales pour lesquelles les ϑ impairs entraînent la même combinaison de signes pour les radicaux $\pm\sqrt{(k_i-\lambda_1)(k_i-\lambda_2)}$ que celle qui répond aux coordonnées

$$x_i = \pm\sqrt{(k_i-\lambda_1)(k_i-\lambda_2)}\,\frac{k_i-\lambda}{\sqrt{f'(k_i)}}$$

des tangentes du point.

Cette détermination fait correspondre à chaque point de la surface de Kummer *un et un seul* couple de paramètres. Dans cette représentation des points par des intégrales hyperelliptiques, on obtient des résultats très simples. Les 16 points nodaux ont pour paramètres les 16 couples de périodes entières (mod. 2 périodes, de sorte que 0/0 se présente aussi comme paramètre). Les paramètres des 16 points des coniques dans les 16 plans doubles deviennent

$$2\int_\alpha^\lambda dv''_1 \bigg/ 2\int_\beta^\lambda dv''_2.$$

Pour les courbes tangentes principales singulières, on trouve

$$\int_{x_i}^\lambda dv''_1 \bigg/ \int_{x_i}^\lambda dv''_2,$$

c'est-à-dire que, *pour chacune de ces courbes, s'évanouit une*

fonction $\mathfrak{S}$ impaire, ou ces fonctions, étant égalées à zéro, représentent ces courbes. Les dix fonctions $\mathfrak{S}$ impaires, égalées à zéro, donnent les dix surfaces fondamentales du second degré, c'est-à-dire leurs courbes d'intersection avec la surface de Kummer.

Il est aisé de voir que les coordonnées d'une droite quelconque se représentent sous la forme de produits de deux $\mathfrak{S}$ impairs, dont les arguments sont formés des intégrales du système précédent. On a

$$\rho x_1 = \mathfrak{S}'_{24}(u_1+u_2)\mathfrak{S}'_{24}(u_3+u_4), \quad \rho x_2 = \frac{1}{i}\mathfrak{S}'_3(u_1+u_2)\mathfrak{S}'_3(u_3+u_4),$$

$$\rho x_3 = \mathfrak{S}'_{04}(u_1+u_2)\mathfrak{S}'_{04}(u_3+u_4), \quad \rho x_4 = \frac{1}{i}\mathfrak{S}'_{13}(u_1+u_2)\mathfrak{S}'_{13}(u_3+u_4),$$

$$\rho x_5 = \mathfrak{S}'_{02}(u_1+u_2)\mathfrak{S}'_{02}(u_3+u_4), \quad \rho x_6 = \frac{1}{i}\mathfrak{S}'_1(u_1+u_2)\mathfrak{S}'_1(u_3+u_4),$$

ou l'on pose, pour abréger,

$$u_1 + u_2 \,|\, u'_1 + u'_2 = \int_\alpha^{\lambda_1} du + \int_\alpha^{\lambda_2} du \,\Big|\, \int_\beta^{\lambda_1} du' + \int_\beta^{\lambda_2} du'.$$

Les paramètres des quatre points d'intersection d'une telle droite deviennent

$$u_1+u_2+u_3+u_4, \quad u_1+u_2-u_3-u_4,$$
$$u_1-u_2+u_3+u_4, \quad u_1-u_2-u_3+u_4,$$

ce qu'on peut aisément interpréter relativement aux tangentes, aux doubles tangentes, etc. On arrive ainsi à ce résultat, que *les seize points*

$$u_1+\varepsilon u_2+\varepsilon' u_3+\varepsilon'' u_4+\varepsilon''' u_5+\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon''' u_6$$
$$|\, u'_1+\varepsilon u'_2+\varepsilon'' u'_3+\varepsilon''' u_4+\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon''' u'_5,$$

où $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon''' = \pm 1$ *forment sur la surface donnée une* configuration de Kummer. *Ces seize points sont situés seize fois six à six dans un plan sur une conique; les plans touchent la surface de Kummer donnée, et les coniques passent par les points de contact correspondants.* En général, seize points de cette espèce forment les points nodaux d'une surface de Kummer, tangente à la surface donnée le long d'une courbe du huitième ordre.

Si l'on applique au système d'intégrales ci-dessus une *transformation quadratique,* on parvient à la deuxième méthode de représentation de la surface de Kummer au moyen des fonctions hyperelliptiques d'après Borchardt. Ce passage peut s'effectuer de quinze manières différentes, correspondant aux quinze classes de transformations quadratiques. Il y a toujours ici quatre fonctions singulières, par exemple ϑ'_5, ϑ'_{01}, ϑ'_{34}, ϑ'_2, et l'on obtient ce théorème : *Les quatre fonctions thêta,* $\vartheta'_5, \vartheta'_{01}, \vartheta'_{34}, \vartheta'_2$ *représentent les coordonnées ponctuelles du point correspondant de la surface de Kummer, rapporté à l'un des quinze tétraèdres fondamentaux; la relation de Göpel entre ces* ϑ *est l'équation de la surface.*

Les fonctions $\vartheta'_5, \vartheta'_{01}, \vartheta'_{34}, \vartheta'_2$ égalées à zéro donnent les courbes d'intersection de la surface avec les faces du tétraèdre fondamental; l'annulation de toute autre fonction thêta donne une courbe du quatrième ordre passant par huit points nodaux, le long de laquelle la surface est touchée par une surface du second ordre.

En effectuant de nouveau une *transformation quadratique* sur les fonctions ϑ', on parvient aux nouvelles fonctions ϑ'', que Cayley a rattachées à la surface de Kummer. Les thêta égalés à zéro fournissent ici les seize coniques dans les plans doubles; les seize points nodaux obtiennent par là les demi-périodes pour paramètres.

A ces trois méthodes, pour représenter la surface de Kummer au moyen de fonctions hyperelliptiques, l'auteur rattache la question des courbes le long desquelles la surface est touchée par d'autres surfaces. La surface de Kummer est enveloppée par trente faisceaux de surfaces du second degré; chaque faisceau passe par huit points nodaux. Les courbes de contact sont représentées par des équations de la forme

$$\vartheta_5\vartheta_{01} + \mu\vartheta_2\vartheta_{34} = 0, \quad \ldots.$$

On en déduit aisément l'équation des surfaces enveloppantes. Outre ces surfaces du second degré, il existe encore un nombre sextuplement infini de surfaces de Kummer, tangentes à la surface donnée suivant des courbes du huitième ordre, dont l'équation est une fonction linéaire des six thêta impairs ϑ''_{24}, ϑ''_{01}, ϑ''_{02}, ϑ''_3, ϑ''_{13}, ϑ''_1.

Enfin on trouve ensuite l'équation

$$\sum_{\alpha} \pm \vartheta_\alpha\left(\frac{P}{2}\right)\vartheta_\alpha\left(\frac{P'}{2}\right)\vartheta_\alpha\left(v+\frac{P}{2}\right)\vartheta_\alpha\left(v+\frac{P'}{2}\right)=0,$$

où l'on prend pour valeurs successives de α les indices

24, 3, 04, 13, 02, 1,

les signes des termes étant alternativement positifs et négatifs. De cette équation on peut déduire toutes les relations qui ont lieu entre les carrés de thêta et les produits de thêta, au moyen d'un choix convenable de P et de P'. ROHN.

MÉLANGES.

CATALOGUE DES ÉTOILES CIRCUMPOLAIRES AUSTRALES OBSERVÉES DANS L'ILE DE SUMATRA;

PAR FRÉDÉRIC HOUTMAN,
en l'année 1600.

Traduit du hollandais et publié par M. ARISTIDE MARRE.

INTRODUCTION.

Les astronomes de l'Europe n'ont acquis une connaissance vraiment satisfaisante du ciel austral que par l'Ouvrage de La Caille, intitulé : *Cœlum australe stelliferum, seu observationes ad construendum stellarum australium Catalogum institutæ, in Africa ad Caput Bonæ-Spei.* Cet Ouvrage, qui donne le Catalogue de 1942 étoiles du ciel austral, fut publié à Paris par les soins de Dominique Maraldi, en 1763, un an après la mort de l'auteur (1).

(1) La Caille, né en 1713, mort en 1762, victime de ses excès de travail, fut l'un des plus habiles astronomes qui aient illustré la France; au rapport de Lalande, il fit à lui seul plus d'observations et de calculs que tous les astronomes de son

Cent soixante ans auparavant, en 1603, avaient paru à Augsbourg et à Amsterdam deux Livres dont les destinées furent bien différentes. Le premier de ces Livres, ouvrage de Jean Bayer, ministre de l'Évangile à Augsbourg, était intitulé *Uranometria;* il contient de nombreuses Cartes astronomiques dressées d'après le Catalogue de Ptolémée et les observations récentes des navigateurs portugais, et désigne par des lettres les étoiles des diverses constellations. Il eut un très grand succès (1). Le second de ces Livres, publié à Amsterdam par Frédéric de Houtman, à son retour de Sumatra, passa inaperçu et ne fut guère connu que des seuls Hollandais en Europe. Ce petit Volume, destiné spécialement aux navigateurs et voyageurs dans les Indes orientales, renferme un Recueil de mots et de phrases en malais et en malgache, et à la suite un Catalogue des étoiles australes ; il est devenu extrêmement rare et pour ainsi dire introuvable. Mon illustre ami, M. Yvon Villarceau, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, consulté par moi sur l'utilité qu'il y aurait à remettre en lumière ce Catalogue des étoiles circumpolaires australes, m'écrivit alors le billet suivant :

Mon cher M. Marre,

Les observations astronomiques de Houtman van Gouda, que je ne connais pas, doivent avoir un certain intérêt pour l'Histoire de la science, car

---

temps réunis. La noblesse de son caractère était à la hauteur de sa science. Dominique Maraldi (1709-1788), astronome, membre de l'Académie des Sciences, d'une famille originaire de Nice, était alors chargé des observations météorologiques à l'Observatoire de Paris, il avait été adjoint précédemment à son cousin Cassini de Thury, pour la description trigonométrique des côtes et frontières de France. On sait que le chef illustre de la famille des Cassini avait été appelé en France en 1669 par Colbert, et s'y était fait naturaliser.

(1) Delambre, dans son « Histoire de l'Astronomie moderne », attribue à Jean Bayer le mérite d'avoir été le premier à désigner par des lettres les étoiles des diverses constellations. Or, dès 1540, Alessandro Piccolomini avait publié à Venise un catalogue des étoiles fixes, où chacune d'elles est désignée par une lettre de l'alphabet. Ce catalogue, ordinairement, se trouve joint à la *Sfera del mondo,* imprimée dans la même année, 1540. Mais l'innovation si simple et si utile d'Alessandro Piccolomini ne paraît pas avoir été mise à profit par les astronomes et les navigateurs de cette époque, car Frédéric de Houtman ne s'en servit pas en 1608, et, chose plus étonnante, Hevelius ne l'employa pas en 1687, dans son *Firmament de Sobieski.*

nous n'avons aujourd'hui d'anciennes et bonnes observations du *ciel austral* que celles exécutées 150 ans plus tard par La Caille.

Je suppose que votre auteur donne quelques indications sur les instruments employés. Quant au degré de précision des observations, on en jugerait aisément par la comparaison du Catalogue hollandais avec celui des étoiles de La Caille. Je crois qu'il serait bon de mettre au jour votre trouvaille, au risque de vous exposer à entendre dire que la chose était déjà connue.

Frédéric de Houtman n'a fourni malheureusement aucune indication sur les instruments dont il fit usage; il s'est borné à faire connaître les résultats de ses observations astronomiques. Si la comparaison de ces résultats avec ceux de La Caille amène à découvrir quelques erreurs, on devra se rappeler que le Catalogue de Tycho Brahe, qui ne contient que 137 étoiles de l'hémisphère austral, est loin d'être parfaitement exact, puisque Flamsteed y a signalé des erreurs pouvant s'élever jusqu'à 3′ et même 4′.

On n'oubliera pas non plus qu'Hevelius, en parlant de ses plus illustres devanciers, n'a pas craint d'affirmer qu'il restait après eux beaucoup d'erreurs graves à corriger et beaucoup d'additions à faire. Enfin l'on voudra bien considérer que, dans l'île de Sumatra, Frédéric de Houtman n'eut point à sa disposition d'observatoire bien installé, ni même probablement d'instruments de grande précision. Quelques mots sur l'histoire de l'observateur et celle de son frère prédisposeront, je l'espère, à l'indulgence.

Le deuxième jour d'avril 1595, Cornelis de Houtman, le véritable fondateur du commerce et de la puissance des Néerlandais dans les Indes orientales, partit du Texel pour son premier voyage aux îles de la Sonde. De septembre 1595 à février 1596, il s'arrêta en divers points de la côte de Madagascar, puis arriva à Bantam, dans l'île de Java. Prisonnier du sultan de Bantam pendant les mois de septembre et d'octobre 1596, il fut délivré moyennant rançon et retourna dans sa patrie. Il n'y fit pas un long séjour, car, dès le 15 mars de l'année 1598, il partait de nouveau. Après avoir visité les Comores, les Maldives, la Cochinchine, il mouilla le 21 juin 1599 en rade d'Atchin (1). Dans ce second et dernier voyage, aussi bien que dans le premier, Cornelis de Houtman était ac-

(1) Ou plus exactement *Atchéh*, suivant l'orthographe malaise.

compagné de son frère Frédéric, l'auteur du Catalogue des étoiles circumpolaires australes.

Arrêtés l'un et l'autre par les ordres du sultan qui régnait alors sur le pays d'Atchéh, Padouka Sri Sultan Alâ ed-dyn, ils furent renfermés dans le fort de Pédir, sur la côte nord de Sumatra. Mais ils parvinrent à s'échapper, et, le 31 décembre de l'an 1600, ils trouvaient un refuge à bord du vaisseau commandé par leur compatriote Paul van Caerden, dans la rade même d'Atchéh.

Le 1er janvier 1601, l'audacieux Cornelis Houtman ne craignit pas de se présenter devant le sultan; le lendemain, il était saisi de nouveau et reconduit au fort de Pédir. De là, il fut transféré dans l'intérieur de l'île, et il y mourut, sans qu'on pût jamais connaître ni le lieu précis, ni le genre, ni la date de sa mort.

Frédéric Houtman, qui était arrivé gravement malade en rade d'Atchéh, avait été contraint de rester à bord du vaisseau de Paul van Caerden, et n'avait pu accompagner son frère Cornélis au palais de Padouka Sri Sultan Alâ ed-dyn. C'est à cette circonstance qu'il dut la vie et la liberté. Dès son retour en Hollande, il publia le petit Livre, intéressant pour les orientalistes et les astronomes, dont voici le titre reproduit ci-dessous :

Spraeckende Woord-boeck, Inde Maleysche ende Madagaskarsche Talen met vele Arabische ende Turksche woorden. Inhoudende twaelf tsamensprekinghen inde Maleysche ende drie inde Madagaskarsche Spraken met alderhande woorden ende Namen ghestelt naer ordre van den ABC alles int Nederduytsch verduytst. Noch zijn hier byghevoecht de Declinatien van vele vaste Sterren staende ontrent den Zuyd-Pool : voor desen tijdt niet ghesien. Sonderling nut voor de ghene die de Landen van Oost-Indien besoecken : ende niet min vermakelick voor alle curieuse Lief-hebbers van vreemdicheydt. Alles ghesteldt, gheobserveert, ende beschreven door Frederick de Houtman van Gouda. T'Amstelredam, By Jan Evertsz Cloppenburch Boeckvercooper op't Water in den grooten Bybel. M.VJC. ende JJJ. Met Privelegie van atch Jaren.

C'est-à-dire en français, à la lettre :

Vocabulaire parlant en langues malaise et malgache, avec quantité de mots arabes et turcs : contenant douze dialogues en malais et trois en malgache, avec toute sorte de mots et de noms, rangés par ordre alphabétique; le tout traduit en néerlandais. L'on trouvera encore ci-jointes les déclinaisons de beaucoup d'étoiles fixes qui sont situées aux

environs du pôle sud, et qui jusqu'à présent n'ont point été vues. Très utile pour ceux qui voyagent aux Indes orientales et non moins récréatif pour les amateurs, curieux des choses étranges. Le tout arrangé, observé et écrit par Frédéric de Houtman de Gouda, à Amsterdam, chez Jean Evertsz Cloppenburg, marchand-libraire, sur l'eau, à l'enseigne de la Grande Bible. M.DC.III. Avec privilège pour huit ans.

Au verso du feuillet contenant ce titre, l'éditeur a donné l'extrait du privilège. Vient ensuite une épître dédicatoire de l'auteur à Maurice, prince d'Orange, comte de Nassau, stathouder, capitaine général et amiral, etc., et aux membres du Conseil d'amirauté et de la Compagnie générale de navigation des Indes orientales.

Cette épître dédicatoire se termine par ces lignes, dont nous reproduisons fidèlement le texte :

Ten laetsten hier noch achter byghevoecht, de Declinatie van sommighe vaste Sterren, by my op de eerste voyagie, ontrent den Zuyd-pool gheobserveert : Ende op de tweede, opt Land van Sumatra, met meerdeer neersticheyt verbetert, ende in ghetale vermeerdert, ghelijck de selve (meer als 300) te sien zijn op de Hemelsche Globen, die (naer de Observatien van denwijt-beroemden Ticho Brahe) uytgegeven zijn van Willem Jansen van Alckmaer; woonende tot Amsterdam. Welcke Sterren dienende voor alle zeevarende lieden, die by Zuyden de Lynie Equinoctial haer Navigatie doen : ende tot een Speculatie aller Lief-hebbers der Astronomie oft Matematische const.

Nous les traduisons ainsi :

Et enfin on y trouve encore à la suite la déclinaison de quelques étoiles fixes que, lors de mon premier voyage, j'avais observées dans la région du pôle Sud, et qu'à mon second voyage sur la terre de Sumatra j'ai revues et corrigées avec plus de soin et portées au nombre de plus de 300, ainsi qu'on peut le voir sur le globe céleste, publié par Willem Jansen d'Alkmaar, habitant d'Amsterdam, et dressées suivant les observations du fameux Tycho Brahe. Ces étoiles serviront à tous les gens de mer qui navigueront au sud de la ligne équinoxiale, et seront un objet d'étude et d'observation pour tous les amis de l'Astronomie ou de la Science mathématique.

Frédéric de Houtman a donné dans son Catalogue des étoiles circumpolaires australes la situation de 304 étoiles distribuées dans les 21 constellations dont les noms suivent :

Le Phénix, la Couronne australe, l'Extrémité méridionale du

Nil, le Serpent aquatique, la Dorade, la Colombe avec le rameau d'olivier, le Navire Argo, le Centaure, la Croix, la Mouche, le Poisson volant, le Caméléon, le Loup, le Triangle austral, l'Oiseau de paradis, l'Autel, la Queue du Scorpion, le Paon, l'Indien, le Héron, la Pie indienne ou *Lang*.

CATALOGUE DES ÉTOILES CIRCUMPOLAIRES AUSTRALES.

Cy-après s'ensuivent les étoiles fixes observées par Frédéric de Houtman dans l'île de Sumatra, revues et corrigées à l'aide d'instruments convenables et augmentées en nombre, à l'usage et pour l'utilité de ceux qui font la navigation au sud de la ligne équinoxiale, comme aussi pour l'instruction de tous les amateurs et de ceux qui pourraient en avoir besoin.

Ces étoiles sont rangées d'après leur ascension droite, leur déclinaison et leur ordre de grandeur.

I. — *Le Phénix* (13 étoiles).

	Ascension.	Déclinaison.	Grandeur.
1. L'étoile la plus au nord, dans la flamme	347°20′	40°50′	5°
2. Celle du milieu, dans la flamme	348.35	44.15	5
3. La plus au sud dans la flamme	349.45	42.45	4
4. Une étoile dans l'aile droite du Phénix	357.10	47.45	4
5. Une située dans le cou du Phénix	1. 0	44. 5	2
6. Une autre aussi dans le cou	1.30	45.34	4
7. Une dans le corps	2.40	50.15	4
8. Une dans la poitrine	4.30	47.30	4
9. Une sous la patte droite, dans le bois	7.20	59.30	4
10. Une sous l'aile gauche, dans la flamme	11.20	49.20	3
11. Une sous la patte gauche, dans le bois	13	57. 0	4
12. Une au bout de l'aile gauche	18	44.45	3
13. Une sous la même aile, dans le feu	19.30	51.25	3

II. — *La Couronne australe* (16 étoiles).

	Ascension.	Déclinaison.	Grandeur.
1. L'étoile la plus à l'ouest, dans la Couronne	269°18′	41°45′	4°

	Ascension.	Déclinaison.	Grandeur.
	° ′	° ′	°
2. La deuxième, en suivant dans la Couronne	270	40.15	5
3. La troisième, en suivant dans la Couronne	270.10	39.18	5
4. La quatrième, en suivant dans la Couronne	271.26	43.16	5
5. La cinquième, en suivant dans la Couronne	273.28	44.10	5
6. La sixième, en suivant dans la Couronne......................	275.36	45.20	5
7. La septième, en suivant dans la Couronne	276.30	43.30	6
8. La huitième, en suivant dans la Couronne	277.35	43	5
9. La neuvième, en suivant dans la Couronne	278.40	42. 2	4
10. La dixième, en suivant dans la Couronne	279.45	40.35	4
11. La onzième, en suivant dans la Couronne	280.30	38.50	4
12. La douzième, en suivant dans la Couronne	280	37.30	5
13. La treizième, en suivant dans la Couronne	277.37	37.40	5
14. La quatorzième, en suivant dans la Couronne	274	38.20	5
15. La quinzième, en suivant dans la Couronne	274.25	40	5
16. La dernière, dans la Couronne...	274.50	41	5

III. — *L'Extrémité sud du Nil,* avec corrections et additions (7 étoiles).

	Ascension.	Déclinaison.	Grandeur.
	° ′	° ′	°
1. Acharnar, l'extrémité du Nil.....	20.50	59.20	1
2. La première, en suivant........	25.20	54.30	4
3. La deuxième, en suivant........	31.25	53.45	4
4. La troisième, en suivant........	33.50	49.30	4
5. La quatrième, en suivant........	35.40	44.24	4
6. La cinquième, en suivant	37.24	41.28	4
7. La sixième, en suivant, dans le Nil.	41.20	41.50	3

IV. — *Le Serpent aquatique* (16 étoiles).

	Ascension.	Déclinaison.	Grandeur.
	° ′	° ′	g
1. La tête du serpent aquatique....	26	63.30	2
2. Une, dans le cou...............	38.23	65. 0	5
3. La seconde, en suivant.........	41.38	68.25	5
4. La troisième, en suivant........	39.50	69.18	5
5. La quatrième, en suivant.......	34.45	70	5
6. La cinquième, en suivant, se trouve au-dessus du petit nuage......	16.50	71.45	5
7. La sixième, en suivant..........	10.27	72.15	5
8. La septième, en suivant	4.30	75.10	5
9. Une au-dessus de la précédente..	356.42	74. 6	5
10. Le petit nuage.................	14.25	75	
11. La neuvième, en suivant........	4.30	80.12	4
12. La dixième, en suivant	359	79.30	6
13. La onzième, dans la queue......	332.45	83.40	4
14. Le bout de la queue	312.34	78.46	4
15. Une devant la poitrine du Serpent aquatique...................	56	65.45	4
16. Encore une au-dessous de cette dernière	62.30	74	4

V. — *La Dorade* (4 étoiles).

	Ascension.	Déclinaison.	Grandeur.
	° ′	° ′	g
1. L'étoile, à l'extrémité de la queue.	62	53.20	3
2. Une sous la nageoire, près de la queue	67.50	56.26	3
3. Une au-dessus du corps	85.20	61.54	3
4. Une au-dessous, près de la bouche	87.33	65.12	3

VI. — *La Colombe avec le Rameau d'olivier* (11 étoiles).

	Ascension.	Déclinaison.	Grandeur.
	° ′	° ′	g
1. L'aile gauche	79.40	36.18	5
2. L'étoile la plus brillante, dans le corps......................	82. 0	34.25	2
3. Une sous l'aile gauche..........	82.40	31.54	5
4. L'épaule droite................	84. 0	36.10	2
5. L'aile droite...................	84.45	34.15	5

	Ascension.	Déclinaison.	Grandeur.
	° ′	° ′	°
6. Une dans le cou................	86.15	36. 0	5
7. Une dans le bec...............	90.40	37.50	5
8. L'extrémité sud du Rameau d'olivier........................	86. 5	42.30	5
9. Une au-dessus de la tête, dans le Rameau d'olivier.............	91.40	35. 0	5
10. La seconde au-dessus..........	92.50	33.20	5
11. La plus au nord, dans le Rameau d'olivier....................	93.42	32.15	5

VII. — *Le Navire Argo, le Vaisseau* (56 étoiles).

	Ascension.	Déclinaison.	Grandeur.
	° ′	° ′	°
1. La sonde......................	84.32	51.42	5
2. Une dans l'eau, à l'arrière du gouvernail......................	87.20	56.10	3
3. Une au-dessous du gouvernail...	91.10	54.12	4
4. Canopus, la plus brillante, dans le gouvernail..................	93.40	52.15	1
5. Une dans la main du pilote......	95.45	42.14	4
6. Une à l'arrière, sous la galerie...	99.25	49.55	4
7. Une dans l'arcasse du navire....	99.30	52.35	3
8. Une à l'arrière, sous le navire...	100.15	61	4
9. Une dans le mât d'artimon......	110.12	42.20	5
10. Une au-dessus de celle-ci, dans les haubans d'artimon.........	111.40	37. 0	6
11. Une dans le porte-haubans d'artimon......................	113.45	34.30	4
12. Une au-dessus de la hune du mât d'artimon..................	115.30	30.25	5
13. Une à la *fortuning*, dans les grands haubans....................	115.40	52.20	3
14. Une au bout de la grande vergue.	116.30	32. 0	3
15. Une à la ralingue de la grande voile......................	117.10	38.15	5
16. Une autre près de celle-ci.......	117.20	39.40	5
17. Une dans les grands haubans....	119.30	46.25	3
18. Une sur le devant des haubans...	124.50	51.40	4
19. Une dans le grand mât.........	125.40	42.12	5
20. Une petite au-dessous de celle-ci.	125.45	47. 0	6
21. Encore une petite à côté de celle-ci.	126.35	45.30	5
22. Une dans la grande voile.......	129. 0	45. 0	5
23. Encore une au-dessus de celle-ci..	129.30	41.26	5

	Ascension.	Déclinaison.	Grandeur.
	° ′	° ′	°
24. Encore une en avant de celle-ci..	132.12	45	4
25. Une au-dessus, dans la voile	135.18	42. 2	3
26. Une à la grande hune...........	128.20	34. 5	5
27. Une à la flèche du grand mât....	129.15	31.34	5
28. Une au grand mât de hune......	131. 0	26	5
29. Une sur le navire, en avant du grand mât..................	123.10	58.20	3
30. Une au-dessous de la grande voile, en avant du mât.............	127	53.45	3
31. Une dans les lisses, au-dessous de la grande voile..............	136.20	57.30	3
32. Encore une près de la précédente.	134.36	57.28	4
33. Une à la ralingue de la voile	137	53.45	3
34. Une sous le ventre de la voile...	139.25	55.31	5
35. Une au-dessous de celle-ci, au gaillard d'avant..............	139.50	57.46	5
36. Encore une au-dessous de celle-ci, près des haubans	140.30	59.10	5
37. Encore une sous les haubans.....	142	60.35	5
38. Une au-dessous du navire.......	138	67.30	3
39. Une sur la préceinte, au-dessous de l'ancre..................	143.45	63	3
40. Une en avant, sous la quille du navire.....................	150.46	68. 2	3
41. Une au-dessous de celle-ci	153.30	71.50	4
42. Une dans l'étrave du navire.....	155.40	62.20	3
43. Une dans l'ancre..............	149.30	59.30	5
44. Une au-dessus, dans le jas d'ancre.	151.53	56.50	4
45. Encore une dans le jas d'ancre...	152.54	59.46	4
46. Une au-dessus, dans la misaine..	151	41.23	6
47. Une en haut, dans le mât de misaine......................	149.50	41.26	4
48. Une au-dessous de celle-ci, dans les haubans	148.35	42.34	5
49. Encore une au-dessous de celle-ci........................	149	44	6
50. Une au milieu de la misaine.....	153.10	45.20	5
51. Une autre près de celle-ci	152.12	45.36	6
52. Encore une près de celle-ci	155.36	45.50	5
53. Une au bras de misaine	157.30	46.16	4
54. Une au-dessous de celle-ci......	158.40	48	4
55. Une au-dessous, dans la misaine.	155.46	52.30	5
56. Une sous le beaupré	159.30	56.50	5

VIII. — *Le Centaure* (48 étoiles).

	Ascension. (° ′)	Déclinaison. (° ′)	Grandeur. (e)
1. Une en bas, dans la queue du Centaure	163.15	57.10	5
2. La plus brillante, dans la queue	166.55	52.26	4
3. Encore une tout à côté de celle-ci.	170. 0	52.15	5
4. Une près du pied de derrière du Centaure	170.25	61	4
5. Une au-dessous, près du pied	172.30	64	4
6. Encore une près de celle-ci	173. 0	64.30	6
7. Encore une en suivant	172.35	61.45	5
8. Encore une en suivant	174	63	5
9. Encore une dans le pied de derrière	176.40	61	5
10. Une sous celle-ci	177.35	62	5
11. Une au pied du Centaure	179.34	61.35	5
12. Une au-dessus, dans la jambe du Centaure	178.15	48.18	3
13. Une au-dessous de celle-ci	179	50	5
14. Une dans le ventre du Centaure	182.24	47.36	5
15. Une petite à côté de celle-ci	182	48.30	6
16. Une dans le corps du Centaure	186.12	46.48	3
17. Une au-dessus de celle-ci, dans le corps	185	46.25	5
18. Encore une dans le corps	188.50	46.15	5
19. Encore une au-dessous, dans le corps	190	49.10	5
20. Une au-dessus de la précédente	190.30	48	5
21. Encore une au-dessus	190.45	46.12	5
22. La plus haute dans le corps	191.10	45	5
23. Une au-dessous de celle-ci dans le corps	192.43	46.20	5
24. L'épaule gauche	194.40	34. 0	3
25. Une sous celle-ci	196.55	37.20	4
26. Une dans la tête du Centaure	200.30	30.40	5
27. La plus au Nord, dans la tête	202	29.35	5
28. Une autre sous celle-ci	201.28	30.32	5
29. Encore une autre au-dessous de celle-ci	201.20	32.10	5
30. Une dans le haut de la jambe droite	199.50	51.15	3
31. Une sur le dos du Centaure	200.20	41. 8	4
32. Une au-dessus de celle-ci, sur le dos	200.35	39.58	4

	Ascension.	Déclinaison.	Grandeur.
	° '	° '	e
33. Encore une à côté de celle-ci....	203. 8	40.30	4
34. Encore une, en suivant.........	205.16	39.40	4
35. Une dans le ventre.............	202.18	45.20	3
36. Une dans le haut du flanc droit..	203.15	43	4
37. Encore une près de celle-ci......	204.10	44	5
38. Une dans la jambe gauche du Centaure.......................	204.20	58. 8	2
39. Une dans le pied droit du Centaure...	213.48	58.48	1
40. Une au-dessous de celle-ci, à côté du pied.....	210.50	62.30	3
41. L'épaule droite................	206.15	35	3
42. Une dans la banderole de la lance.	208.40	36. 0	4
43. Une au-dessous de celle-ci, dans la lance.......................	209.10	37.35	4
44. Une au-dessus, dans la banderole.	214.30	33.20	4
45. Encore une sous celle-ci...	215.35	35.30	4
46. Une dans le bras droit..........	213.50	41.20	4
47. Une en avant dans le même bras.	217.40	41.18	4
48. Une au-dessous de celle-ci dans le bras........................	217.45	40.38	4

IX. — *La Croix* (5 étoiles).

	Ascension.	Déclinaison.	Grandeur.
	° '	° '	e
1. Le bras occidental de la Croix..	179.35	56.26	3
2. Une sous celle-ci..............	180.20	58.25	5
3. Le bas ou le pied de la Croix....	182.25	60.40	2
4. Le sommet de la Croix.........	183	54.48	3
5. Le bras oriental de la Croix.....	186	57. 8	3

X. — *La Mouche* (4 étoiles).

	Ascension.	Déclinaison.	Grandeur.
	° '	° '	e
1. Une en bas, dans le corps.......	182.55	69.50	4
2. Une en haut, dans l'aile gauche..	184.10	66.30	4
3. La tête......................	186. 8	65.20	4
4. L'aile droite..................	189.25	69.10	4

XI. — *Le Poisson volant* (5 étoiles).

	Ascension.	Déclinaison.	Grandeur.
	° '	° '	e
1. Une dans la queue du Poisson volant.......................	111.16	67.30	4

	Ascension.	Déclinaison.	Grandeur.
	° ′	° ′	e
2. Encore une au-dessous de celle-ci.	111.18	68.32	4
3. L'aile droite	119	71.15	4
4. L'aile gauche	122.46	67.33	4
5. Une dans le cou	127.10	70	4

XII. — *Le Caméléon* (9 étoiles).

	Ascension.	Déclinaison.	Grandeur.
	° ′	° ′	e
1. Le bout de la queue	130.30	74.30	5
2. Une au-dessus de celle-ci, la seconde dans la queue	128.26	73.40	5
3. La troisième dans la queue	140	76.20	5
4. La quatrième dans la queue	148	77	5
5. La cinquième dans la queue	150.34	77.15	5
6. La plus au nord dans le dos	158	75.30	5
7. Une au-dessous de celle-ci, dans le corps	161.30	77.25	5
8. Le devant de l'épaule	176	74.50	5
9. Une au-dessous de celle-ci, en avant dans le corps	179.40	76.20	5

XIII. — *Le Loup* (29 étoiles).

	Ascension.	Déclinaison.	Grandeur.
	° ′	° ′	e
1. Une dans la queue	208.30	44.25	5
2. Une autre au-dessus de celle-ci	208.35	43.26	5
3. Encore une à côté de celle-ci	209.40	44.10	5
4. Une dans le bout de la queue	210.34	43	6
5. Encore une près de celle-ci	211	43.15	6
6. Une dans la patte droite	213.35	46	4
7. Une autre sous celle-ci	212.45	47.30	5
8. Encore une sous la précédente	211.11	48.32	5
9. Une dans la fesse gauche	215.30	50.52	5
10. Une autre à côté de celle-ci	218.33	50.45	5
11. Une en haut de la cuisse gauche	221.45	50.12	4
12. Une par derrière, sur la hanche	221.42	56.45	5
13. Encore une à côté de celle-ci	223.32	57.15	5
14. Une sous celle-ci	221.28	59.10	5
15. Encore une petite à côté de celle-ci	222	58.30	6
16. Une dans le ventre	219.25	45	4
17. Une sous celle-ci dans le ventre	221	46.50	4

	Ascension.	Déclinaison.	Grandeur.
	° ′	° ′	e
18. Une au-dessus de celle-ci, dans le ventre	221.30	44	4
19. Encore une dans le ventre	222.55	46.30	4
20. Encore une à côté de celle-ci	223. 5	47	6
21. Une par devant, sur la hanche gauche	223.30	39.55	4
22. Le cœur du Loup	224.20	43.40	4
23. Encore une dans le corps	227	43.45	5
24. Une dans le devant de l'épaule	227.30	40.16	4
25. Une sous celle-ci	227.56	41.25	5
26. Encore une sous celle-ci	228.15	43.30	5
27. Encore une près de celle-ci	227.25	43.25	5
28. Une dans le cou	233.12	37.20	4
29. Encore une près de celle-ci	235	35.30	6

XIV. — *Le Triangle austral* (4 étoiles).

	Ascension.	Déclinaison.	Grandeur.
	° ′	° ′	e
1. L'angle méridional	219.20	66.48	3
2. Une au-dessus de celle-ci	222.50	64.32	5
3. L'angle septentrional	226.18	62.10	3
4. La pointe du Triangle	238.45	68	2

XV. — *L'Oiseau de Paradis* (9 étoiles).

	Ascension.	Déclinaison.	Grandeur.
	° ′	° ′	e
1. Une dans la patte, près de la queue	206.50	80.35	4
2. Une dans la queue	207.10	77.40	4
3. Encore une près de celle-ci	209. 8	76.45	6
4. Encore une au-dessus de celle-ci	212.45	76.26	4
5. Une à l'extrémité du corps	228.40	76.10	5
6. Une sous celle-ci	229.30	77	5
7. Encore une près de celle-ci	234	76.20	5
8. Une dans le cou	261.30	75.25	5
9. Une dans le bec	271	72.12	5

XVI. — *L'Autel* (12 étoiles).

	Ascension.	Déclinaison.	Grandeur.
	° ′	° ′	e
1. Le pied occidental de l'Autel	241.10	57.30	4
2. Le point le plus à l'ouest du bord supérieur	244	54.40	4

	Ascension.	Déclinaison.	Grandeur
	° ′	° ′	e
3. La plus occidentale dans la flamme.	245.46	52	4
4. La plus orientale en bas, dans l'Autel	248.32	60.30	4
5. La plus orientale en haut, dans l'Autel	249.42	56.32	4
6. La plus orientale en bas, dans la flamme	250	55	4
7. Une là, en suivant, dans la flamme.	255	49.38	4
8. La quatrième dans la flamme....	262.30	49.35	4
9. La cinquième dans la flamme....	265. 8	46.10	4
10. La sixième dans la flamme......	269.20	49	4
11. La septième dans cette flamme...	269.25	46.20	4
12. La dernière dans cette même flamme	270.15	46.30	6

XVII. — *La Queue du Scorpion* (8 étoiles).

	Ascension.	Déclinaison.	Grandeur
	° ′	° ′	e
1. La première dans la queue......	246.30	37.10	3
2. La deuxième »	247	41	3
3. La troisième »	247.10	41.36	3
4. La quatrième »	252.18	42.32	3
5. La cinquième »	257.30	42.38	3
6. La sixième »	260	39.50	3
7. La septième »	258.35	38.45	3
8. La huitième »	256.34	37	3

La dernière de la queue du Scorpion.

XVIII. — *Le Paon* (19 étoiles).

	Ascension.	Déclinaison.	Grandeur
	° ′	° ′	e
1. Une étoile à l'extrémité de la queue	252.50	64.40	4
2. Une, en suivant, dans la queue..	259.48	64.10	5
3. La plus haute, dans la queue....	265. 5	62.30	5
4. Une sous celle-ci..............	266.20	63.50	6
5. Une sous celle-ci..............	267.22	65	5
6. Encore une dans cette queue....	271.45	63.28	5
7. Une sous celle-ci..............	270.30	66. 5	5
8. Encore une au-dessous de la précédente	270.32	67	6
9. Une à l'extrémité du corps......	274.30	69	5
10. Une dans la patte droite du Paon.	280.50	73.45	4

	Ascension.	Déclinaison	Grandeur.
	° ′	° ′	°
11. Une dans le haut du corps	290.30	67.30	3
12. Une au-dessous de celle-ci	289.20	68.15	5
13. La tête	297.15	58.14	2
14. Une dans le cou	299.30	62.30	5
15. Une au-dessous de celle-ci	300.40	64	5
16. Encore une dans le cou	301.50	62.33	5
17. Le cœur	330.36	68	3
18. Une sous celle-ci	209.45	68.40	5
19. La poitrine du Paon	311.52	68.30	3

XIX. — *L'Indien* (11 étoiles).

	Ascension.	Déclinaison.	Grandeur.
	° ′	° ′	°
1. Le bout antérieur de sa pique...	291.15	55.16	5
2. Une dans l'épaule droite........	304.20	54.20	5
3. Une près de celle-ci, dans l'épaule.	305.30	54.16	5
4. Encore une près de celle-ci.....	306.28	54.15	5
5. Une sous le ventre.............	305.30	60.20	4
6. Une dans la poitrine............	306.40	56.45	5
7. Une dans la tête...............	310.28	52.35	4
8. L'épaule gauche	313.40	54.26	4
9. Une dans le haut de la pique....	319.45	55.22	4
10. Une dans le milieu	323.30	56.12	4
11. Une dans le bas de la pique	323.37	57.25	4

XX. — *Le Héron* (12 étoiles).

	Ascension.	Déclinaison.	Grandeur.
	° ′	° ′	°
1. La tête du Héron..............	322.44	39	2
2. Une dans le cou...............	325	41. 5	4
3. L'aile gauche..................	326.25	49	2
4. La deuxième dans le cou........	327	43.25	4
5. La troisième dans le cou........	329.45	45.40	4
6. Une près de celle-ci............	329.15	45.35	5
7. Le cœur......................	335.12	49	2
8. Une dans la patte gauche	335.40	55.45	4
9. Une au-dessus de celle-ci, dans la patte	336.30	53	4
10. Une dans la queue	340.40	54.10	4
11. Une dans l'aile droite...........	341.20	46.12	4
12. Encore une, sous celle-ci, dans l'aile........................	341.50	48	4

XXI. — *La Pie indienne nommée* Lang (1) *aux Indes* (6 étoiles).

	Ascension.	Déclinaison.	Grandeur.
	° ′	° ′	°
1. Une au-dessus du bec..........	344	60.15	4
2. Une dans le corps..............	351.20	65.30	5
3. Encore une dans le corps.......	353.10	66.36	5
4. Une par derrière, à la patte gauche.	355.35	68	5
5. Une à l'extrémité du corps......	0	67.24	5
6. Une dans la queue.....	2.50	64.34	5

(1) En malais le mot *Lang* est le nom d'une espèce de faucon (*Falco pondicerianus*).

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

JACOBI (C.-G.-J.). — GESAMMELTE WERKE. Erster Band, herausgegeben von C.-W. BORCHARDT. — 1 vol. in-4°. Berlin, 1881.

STEINER (JACOB). — GESAMMELTE WERKE. Erster Band, herausgegeben von K. WEIERSTRASS. — 1 vol. in-4°. Berlin, 1881.

L'Académie des Sciences de Berlin a confié aux Membres de la Section de Mathématiques le soin de diriger l'édition des Œuvres complètes de Jacobi, de Steiner et de Lejeune-Dirichlet.

M. Borchardt s'était chargé de l'édition de Jacobi ; M. Weierstrass continue l'œuvre interrompue par la mort de M. Borchardt ; c'est lui aussi qui dirige l'édition des Œuvres de Steiner.

Le premier volume des Œuvres de Jacobi et le premier volume des Œuvres de Steiner ont paru il y a quelques mois. Ces éditions sont fort belles et paraissent avoir été faites avec un soin extrême ; les fautes d'impression des éditions précédentes et les *erreurs* ont été corrigées et signalées. Un portrait orne chaque volume.

Les Œuvres de Jacobi comprendront huit volumes. Les matériaux ont été groupés, puis, dans chaque groupe, classés d'après l'ordre chronologique ; ainsi les deux premiers volumes contiendront tout ce qui concerne les transcendantes elliptiques et abéliennes.

MM. Mertens, Netto, Schwarz, Schering, Roethig, Lampe, Wangerin, Hermite ont collaboré à l'édition du premier volume, en tête duquel on trouvera la célèbre Notice que Lejeune-Dirichlet a consacrée à la mémoire de Jacobi.

Les Œuvres de Steiner comprendront deux volumes ; les matières y sont rangées par ordre chronologique. Au premier volume ont collaboré MM. Schröter et Kiepert.

LAISANT. — INTRODUCTION A LA MÉTHODE DES QUATERNIONS. — 1 vol. in-8°, 242 pages. Paris, 1881.

Le livre de M. Laisant est un livre d'enseignement : il a les qualités qu'on voudrait toujours rencontrer dans les ouvrages de cette sorte ; il est clair, écrit avec simplicité et élégance. L'auteur souhaite vivement que la méthode des quaternions, qu'il cultive volontiers, soit plus connue qu'elle ne l'est en France, et que les géomètres de notre pays lui accordent au moins le degré de faveur qu'elle mérite sans doute. On est en droit de compter que son livre atteindra le but qu'il a poursuivi, et l'on doit reconnaître qu'il n'a rien négligé pour cela, que la lecture du texte est facile et que les nombreux exercices traités ou indiqués au lecteur permettent à ce dernier de se rendre familières les notations et la méthode.

Les notations employées sont les notations systématiques introduites par M. Hoüel ; leur adoption n'est pas seulement un hommage rendu à l'auteur de la *Théorie des quantités complexes,* dont les précieux conseils ne pouvaient, en cette occasion, manquer à M. Laisant : il n'est que juste de reconnaître que l'emploi de ces notations facilite singulièrement la lecture des calculs, dont elles permettent de retrouver à chaque instant la signification géométrique.

La marche suivie dans l'exposition de la méthode est inductive et nettement géométrique ; le lecteur n'est pas jeté de suite dans la profondeur du sujet ; il y descend entouré d'images familières et ne dépouille que peu à peu les habitudes qu'il lui faudra perdre ; les idées nouvelles s'acquièrent sans difficulté, et d'ailleurs leur introduction est justifiée de suite par des applications nombreuses, où l'esprit se reposerait au besoin. Ainsi, avant d'arriver à la notion de *quaternion,* M. Laisant a exposé avec soin les opérations relatives aux vecteurs et aux biradiales ; le quaternion est introduit comme *l'expression analytique d'une biradiale.* Pour établir la propriété *associative* de la multiplication des quaternions, l'auteur montre que la multiplication des biradiales est distributive par rapport à l'addition, tant en ce qui concerne le multiplicateur qu'en ce qui concerne le multiplicande ; la propriété associative

établie pour les quantités réelles et pour les unités symboliques en résulte immédiatement dans toute sa généralité. Ces principes fondamentaux une fois posés, l'auteur les applique de suite à la géométrie de la ligne droite, du plan, du cercle et de la sphère; s'il interrompt un instant les applications pour traiter de la différentiation des quaternions, il y revient pour s'occuper, pendant trois chapitres, des courbes du second degré. Deux chapitres théoriques sont ensuite consacrés, l'un aux formules relatives à la multiplication de trois, quatre, etc., vecteurs; l'autre à la résolution de l'équation générale du premier degré, où figure un quaternion inconnu, et l'auteur termine par des applications aux surfaces du second degré.

On voit avec quel soin M. Laisant s'est efforcé de rassurer son lecteur et de ne pas le laisser trop longtemps dans le domaine de l'abstraction.

Un livre analogue : *Introduction to Quaternions,* avait été publié à Londres, en 1873, par MM. Kelland et Tait; il était tout naturel d'en profiter. M. Laisant déclare y avoir puisé la plupart des *exercices* qu'il a développés ou simplement indiqués.

GOURSAT. — Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique. — Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris, 142 pages in-4°. Paris, 1881.

La première partie de la Thèse de M. Goursat est consacrée à l'intégration de l'équation célèbre

$$x(x-1)y'' - [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' + \alpha\beta y = 0.$$

On sait, depuis Kummer, qu'il existe, en général, outre la série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, vingt-trois séries qui vérifient cette équation ; chacune d'elles s'obtient en multipliant par une expression de la forme $x^p(1-x)^q$ une série hypergéométrique dont les trois premiers éléments sont liés simplement à α, β, γ, et dont le quatrième élément est x, $\frac{1}{x}$, $1-x$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{x}{x-1}$

ou $\frac{x-1}{x}$. Dans la région commune aux domaines de convergence de trois de ces vingt-quatre séries, une certaine relation linéaire, dont les coefficients ne dépendent que de α, β, γ, existe évidemment entre les trois séries considérées. La connaissance complète des relations de cette nature permet de résoudre entièrement le problème de l'intégration, posé sous cette forme : étant donné un chemin continu qui part d'un point A du plan des x et qui aboutit à un point B ; étant donnée, en outre, une solution de l'équation hypergéométrique qui convienne à la région où se trouve le point A, et supposant que la variable x suive le chemin donné, déterminer la solution à laquelle on parvient au point B.

C'est par l'étude des intégrales définies de la forme

$$\int_g^h V\,du,$$

où

$$V = u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}$$

et où g, h admettent les systèmes de valeurs $0, 1$; $0, -\infty$; $1, +\infty$; $0, \frac{1}{x}$; $1, \frac{1}{x}$; $\frac{1}{x}, +\infty$, que M. Goursat arrive à déterminer toutes ces relations ; ces intégrales définies vérifient, comme on sait, l'équation hypergéométrique, en supposant, bien entendu, qu'elles aient un sens.

L'intégrale

$$\int_0^1 V\,du,$$

par exemple, en supposant positives les parties réelles de β et de $\gamma-\beta$; en prenant pour chemin d'intégration la portion convenable de l'axe des x réels ; en choisissant zéro pour argument de u et de $1-u$, et en prenant pour argument de $1-xu$ celui qui est nul pour $x=0$ définit, comme on le voit aisément, une fonction de x qui est uniforme dans tout le plan, à condition que le chemin suivi par la variable ne coupe pas la droite $1 \ldots +\infty$. Dans l'intérieur du cercle de rayon 1, et dont le centre est le point zéro, on obtient immédiatement, par le développement de l'inté-

grale en série,

$$\int_0^1 V\,du = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)} F'(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

Maintenant, les changements de variables suivants, indiqués par Jacobi,

$$u = 1 - v,$$

$$u = \frac{v}{1 - x + vx},$$

$$u = \frac{1 - v}{1 - vx}$$

conduisent à trois autres des intégrales indiquées par M. Kummer. En résumé, la considération de cette intégrale définie conduit à la notion de l'intégrale φ_1 de l'équation hypergéométrique, uniforme dans tout le plan, sous la restriction précédemment imposée, et susceptible d'être représentée par quatre séries, convergentes dans diverses régions du plan.

L'étude des cinq autres intégrales conduit à la notion d'intégrales φ_2, φ_3, φ_4, φ_5, φ_6, uniformes dans tout le plan, sauf certaines restrictions imposées au chemin décrit par la variable, et susceptibles, chacune, d'être représentée par quatre séries.

Il reste à établir les formules de passage relatives à trois quelconques; ces formules sont au nombre de deux fois vingt : les vingt premières courant dans des portions du plan situées au-dessus de l'axe des x réels; les vingt autres dans des portions situées au-dessous. Pour parvenir à ces formules, M. Goursat applique le théorème de Cauchy à l'intégrale $\int V\,du$, prise le long d'un contour simple, à l'intérieur duquel la fonction V est holomorphe, et qui est constitué par les lignes suivantes : 1° un demi-cercle de rayon R, situé au-dessus des x réels et ayant pour centre le point zéro; 2° deux demi-cercles de rayons très petits, situés au-dessus de la même droite, et dont les centres sont les points zéro et 1; 3° les portions de l'axe des x réels qui, avec les lignes précédentes, complètent un contour fermé; si l'on fait tendre vers zéro les rayons des petits demi-cercles et augmenter indéfiniment

le rayon R, on parvient à l'égalité

$$\int_{-\infty}^{0} V\,du + \int_{0}^{1} V\,du + \int_{1}^{-\infty} V\,du = 0,$$

où il est bien aisé de spécifier les valeurs qu'il convient de prendre pour les arguments de u et de $1 - u$.

Si maintenant on se reporte aux expressions, sous forme d'intégrales définies, des fonctions φ, on aperçoit que la relation précédente conduit immédiatement aux formules de passage cherchées.

Tout ce qui précède suppose que des nombres γ, $\gamma - \alpha - \beta$, $\alpha - \beta$ aucun n'est entier. Si l'un d'eux est entier, on n'a plus qu'une intégrale dans l'un des groupes ; on en trouve alors une autre par un procédé bien connu, qui consiste à chercher la limite pour $r = r_1$ d'une expression de la forme

$$\frac{F(x,r) - F_1(x,r)}{r - r_1},$$

où $F(x,r)$, $F_1(x,r)$ désignent deux intégrales de l'équation, qui viennent se confondre pour $r = r_1$.

M. Goursat traite divers exemples particuliers qui mettent bien en évidence le parti qu'on peut tirer de ses formules.

Une application bien digne d'être signalée est celle qu'il fait de la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale générale de l'équation hypergéométrique soit admise ; on sait que cette question se trouve résolue dans un beau Mémoire de M. Schwarz (*Journal de Borchardt*, t. 73, p. 292). C'est par une voie tout élémentaire que M. Goursat retrouve les résultats obtenus par M. Schwarz.

Le problème résolu par M. Goursat dans la seconde partie de son travail ne présente pas moins d'intérêt.

Les Mémoires de Gauss et de Kummer sur la série hypergéométrique contiennent un grand nombre de formules qui supposent certaines relations entre les trois premiers, et dont le type général est le suivant :

$$x^{-p}(1 - x)^{-q}\,F(\alpha, \beta, \gamma, x) = t^{p'}(1 - t)^{q'}\,F(\alpha', \beta', \gamma', t),$$

t étant une fonction algébrique de x ; la fonction

$$x^p(1-x)^q t^{p'}(1-t)^{q'} F(\alpha', \beta', \gamma', t)$$

est alors une intégrale de l'équation

$$x(x-1)y'' - [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' + \alpha\beta y = 0.$$

M. Goursat se propose de rechercher *tous* les cas où il existe de pareilles intégrales.

Se plaçant, pour cela, au point de vue de Riemann, dans un Mémoire bien connu, il considère une fonction $P(x)$ n'admettant, dans toute l'étendue du plan, que trois points critiques 0, 1, ∞ ; holomorphe dans toute région du plan, à contour simple ne renfermant aucun de ces points, telle que, entre trois branches quelconques de la fonction, il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants, telle enfin que chaque branche reste finie pour $x=0$, $x=1$, $x=\infty$, quand on la multiplie par une puissance convenable de x ou de $1-x$; une telle fonction vérifie toujours une équation de la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &x^2(x-1)^2\frac{d^2P}{dx^2} + [l-(l+m)x]x(1-x)\frac{dP}{dx} \\ &\qquad\qquad + (Ax^2+Bx+C)P = 0; \end{aligned}\right.$$

or on passe aisément d'une telle équation à l'équation hypergéométrique. Le problème se trouve ainsi ramené au suivant :

Reconnaître pour quelles valeurs des constantes A, B, C, l, m *il existe des changements de variables* $x=\varphi(t)$ *par lesquels l'équation* (1) *ne change pas de forme,* A, B, C, l, m *étant seulement remplacés par des constantes nouvelles* A', B', C', l', m'.

Un calcul facile montre que ce problème se ramène lui-même au suivant :

Déterminer dans quels cas les équations

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}{x(1-x)}\,dx = \frac{\sqrt{A't^2+B't+C'}}{t(1-t)}\,dt, \\ &\frac{dx}{x^l(1-x)^m} = \frac{K\,dt}{t^{l'}(1-t)^{m'}} \end{aligned}\right.$$

admettent une solution commune, les constantes A', B', C', l', m', K *étant arbitraires.*

De ces deux équations, on peut tirer une combinaison algébrique en x, t, savoir :

$$\frac{\{(2Ax+B)x(x-1)+2(Ax^2+Bx+C)[(l-1)(x-1)+(m-1)x]\}^2}{(Ax^2+Bx+C)^3}$$
$$=\frac{\{(2A't+B')t(t-1)+2(A't^2+B't+C')[(l'-1)(t-1)+(m'-1)t]\}^2}{A't^2+B't+C')^3}.$$

Si cette relation n'est pas une identité, on voit qu'il existe entre x et t une relation qui sera au plus du sixième degré, par rapport à chacune des variables. L'auteur montre que, dans le cas où cette équation est identique, il existe une infinité de substitutions qui n'altèrent pas la forme de l'équation (1), mais que cette équation (ou l'équation hypergéométrique correspondante), s'intégrant alors par les fonctions élémentaires, exponentielles, circulaires ou logarithmiques, c'est à des relations entre des fonctions de cette nature que l'on est conduit.

Écartant ce cas particulier, M. Goursat cherche les transformations rationnelles

$$x=\frac{R}{S}$$

qui peuvent exister, R et S étant deux polynômes en t d'un degré au plus égal au sixième ; une discussion approfondie des différents cas qui peuvent se présenter montre qu'on peut se borner à considérer les quatre formes suivantes :

$$x=R^n t^r(1-t)^s,$$
$$x=R^n t^r,$$
$$x=R^n,$$
$$x=\frac{R^n}{t^r(1-t)^s}.$$

M. Goursat calcule ensuite les divers coefficients inconnus qui entrent dans ces transformations. La distinction des classes de transformation est liée à la distinction des cas où, pour $x=1$, aucune valeur de t n'est différente de 0, 1, ∞ de ceux où il en est autrement. Le premier cas fournit toutes les transformations signalées par M. Kummer, lorsque deux des trois éléments

α, β, γ sont arbitraires ; les autres cas conduisent à des transformations qui supposent deux relations entre ces trois éléments.

Toutes ces transformations rationnelles étant obtenues, l'œuvre de M. Goursat se trouve complétée par la démonstration du théorème suivant :

En combinant entre elles les transformations rationnelles que l'on peut effectuer pour les mêmes valeurs de A, B, C, l, m, on obtient de nouvelles transformations algébriques, mais non rationnelles ; on les obtient toutes de cette manière.

Il ne peut être question de reproduire ici le tableau des nombreuses transformations, des différents degrés possibles, trouvées par M. Goursat ; nous transcrirons au hasard une de ses formules, afin de faire saisir le genre d'intérêt qui s'attache aux résultats qu'il a obtenus, résultats qui complètent d'une façon si heureuse les belles découvertes de M. Kummer sur ce sujet difficile :

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{F}\left(3\alpha,\ 3\alpha+\frac{1}{2},\ 4\alpha+\frac{2}{3},\ x\right)\\
&=(1-x)^{\frac{1}{6}-2\alpha}\,\mathrm{F}\left(\alpha+\frac{1}{6},\ \alpha+\frac{2}{3},\ 4\alpha+\frac{2}{3},\ x\right)\\
&=\left(1-\frac{9x}{8}\right)^{=2\alpha}\mathrm{F}\left[\alpha,\ \alpha+\frac{1}{2},\ 2\alpha+\frac{5}{6},\ \frac{-27x^2(1-x)}{(9x-8)^2}\right]\\
&=\left(1-\frac{3x}{4}\right)^{-3\alpha}\mathrm{F}\left[\alpha,\ \alpha+\frac{1}{3},\ 2\alpha+\frac{5}{6},\ \frac{-27x^2(1-x)}{(3x-4)^3}\right].
\end{aligned}
$$

ROHN (K.). — DIE VERSCHIEDENEN GESTALTEN DER KUMMERSCHEN FLÄCHE [1].

Ce travail a pour objet l'étude *des rapports de réalité de la surface générale de Kummer*, et, comme appendice, *des formes des surfaces réglées du quatrième ordre à deux droites doubles*, en laissant de côté tous les autres cas spéciaux que présente la surface générale de Kummer. Pour atteindre le but proposé, nous avons développé dans ce travail trois méthodes différentes, que nous allons successivement expliquer avec quelque détail.

---

[1] *Mathematische Annalen*, Bd. XVIII.

I. — *Méthode de la Géométrie de la ligne.*

L'équation d'un complexe du second degré peut se ramener à la forme

$$\frac{z_1^2}{k_1-\lambda}-\frac{z_2^2}{k_2-\lambda}+\frac{z_3^2}{k_3-\lambda}-\frac{z_4^2}{k_4-\lambda}+\frac{z_5^2}{k_5-\lambda}-\frac{z_6^2}{k_6-\lambda}=0,$$

tandis qu'en même temps la relation entre les coordonnées de lignes prend la forme

$$z_1^2-z_2^2+z_3^2-z_4^2+z_5^2-z_6^2=0.$$

Ce résultat peut toujours s'obtenir par une transformation linéaire *réelle*. Pour ramener maintenant l'identité entre les coordonnées de lignes à une somme de carrés positifs, il faut employer des transformations *imaginaires*, lesquelles fournissent les quatre *types* suivants des systèmes de coordonnées de lignes :

1. Les coordonnées 1, 3, 5 sont réelles; 2, 4, 6 sont imaginaires;

2. Les coordonnées 1, 3 sont réelles, et 2, 4 imaginaires pures, tandis que 5, 6 sont des imaginaires conjuguées;

3. La coordonnée 1 est réelle et 2 est imaginaire; au contraire, 3, 4, ainsi que 5, 6, sont imaginaires conjuguées;

4. Les coordonnées sont deux à deux imaginaires conjuguées.

Si l'on donne à trente-deux droites quelconques, dont les coordonnées diffèrent par les signes, le nom de *conjointes* (*zusammengehörig*), alors, dans le premier cas, les 32 droites seront réelles; dans le second cas, 16 seront réelles; dans le troisième et le quatrième, il n'y en aura que 8 de réelles.

Par l'étude de chacun des divers types, on parvient au résultat suivant :

La surface de Kummer ou surface des singularités du système de complexes CONFOCAL

$$\sum_1^6 \frac{x_i^2}{k_i-\lambda}=0, \quad \sum_1^6 x_i^2=0$$

est réelle (c'est-à-dire possède une équation à coefficients réels) *dans les cas suivants, et dans ces cas seulement : lorsque tous les k sont réels, dans le type* I ; *lorsque k_5 et k_6 sont des imaginaires conjuguées, tous les autres k étant réels, dans le type* II; *lorsque k_5 et k_6, ainsi que k_3 et k_4 sont des imaginaires conjuguées, et k_1 et k_2 réels, dans le type* III ; *lorsque les k sont deux à deux des imaginaires conjuguées ou des imaginaires diamétrales* (¹), *dans le type* IV.

Après avoir reconnu ce théorème, on passe à l'étude des formes de la surface de Kummer pour chacun des types en particulier. Ces formes dépendent encore uniquement des valeurs des constantes $k_1, k_2, \ldots, k_6$.

Dans le type I, où tous les k sont réels, *on trouve encore trois surfaces différentes.* En effet, si l'on fait abstraction de la condition que les indices des k soient égaux à ceux des x correspondants, de sorte que l'équation du système de complexes confocaux se change en celle-ci :

$$\sum \frac{x_i^2}{k_\alpha - \lambda} = 0,$$

où les indices α et i parcourent, indépendamment l'un de l'autre, les valeurs $1, 2, \ldots, 6$, on pourra choisir les indices des k de telle manière que l'on ait

$$k_1 > k_2 > k_3 > k_4 > k_5 > k_6.$$

On obtient alors trois surfaces différentes, correspondantes aux trois systèmes de complexes suivantes :

$$\text{I}_a \quad \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{x_2^2}{k_2-\lambda} + \frac{x_3^2}{k_3-\lambda} + \frac{x_4^2}{k_4-\lambda} + \frac{x_5^2}{k_5-\lambda} + \frac{x_6^3}{k_6-\lambda} = 0,$$

$$\text{I}_b \quad \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{x_2^2}{k_2-\lambda} + \frac{x_3^2}{k_3-\lambda} + \frac{x_4^2}{k_4-\lambda} + \frac{x_5^2}{k_6-\lambda} + \frac{x_6^2}{k_5-\lambda} = 0,$$

$$\text{I}_c \quad \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{x_2^2}{k_2-\lambda} + \frac{x_3^2}{k_6-\lambda} + \frac{x_4^2}{k_4-\lambda} + \frac{x_5^2}{k_5-\lambda} + \frac{x_6^2}{k_3-\lambda} = 0.$$

(¹) Nous entendons par *diamétralement imaginaires* celles qui, représentées sur la sphère complexe, donnent des points diamétraux, et par suite qui sont de la forme $\rho e^{i\varphi}$ et $-\frac{1}{\rho}e^{i\varphi}$.

Toutes les autres équations que l'on peut déduire de

$$\sum \frac{x_i^2}{k_i - \lambda} = 0,$$

par l'échange des k, peuvent se ramener à l'une des trois équations I_a, I_b, I_c.

Nous allons maintenant examiner à part chacun de ces trois cas.

Dans le cas I_a, les coordonnées d'une droite dans l'espace sont déterminées par les équations

$$\rho x_\alpha^2 = \frac{(k_\alpha - \lambda_1)(k_\alpha - \lambda_2)(k_\alpha - \lambda_3)(k_\alpha - \lambda_4)}{f'(k_\alpha)}, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, 6).$$

Si, des quatre paramètres λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, deux deviennent égaux entre eux, la droite correspondante deviendra une tangente à la surface de Kummer. Si trois paramètres deviennent égaux entre eux, la droite deviendra une tangente principale. Si quatre paramètres sont égaux deux à deux, la droite correspondante passera par un point nodal ou dans un plan double. Or, dans le type I_a, une droite n'étant réelle que si ses coordonnées x_1, x_3, x_5 sont réelles et x_2, x_4, x_6 imaginaires pures, on pourra tirer par ce moyen des conclusions sur la réalité d'une droite de paramètres λ_1, λ_2, λ_3, λ_4. On trouve que *la droite est réelle lorsque ses paramètres sont deux à deux des imaginaires conjuguées, ou deux à deux compris dans le même intervalle* (¹) *des k*. A l'aide de ce théorème, on peut décider de la réalité des points de la surface de Kummer, de ses tangentes principales, ainsi que de ses points nodaux et de ses plans doubles, et en même temps de la forme générale de la surface. En poursuivant ces études, on obtient le résultat suivant :

Les six complexes 1, 2, 3, 4, 5, 6 déterminent neuf couples réels de directrices, qui peuvent être comprises dans trois tétraèdres, savoir :

12, 34, 56; 23, 45, 61; 14, 25, 36.

(¹) Nous entendons par un tel intervalle celui qui est compris entre deux k consécutifs.

La surface de Kummer I_a possède 16 *points nodaux réels et* 16 *plans doubles; elle se compose de huit nappes séparées. Chaque sommet du tétraèdre* 12, 34, 56 *est intérieur à une nappe de cette surface, chaque nappe étant limitée par quatre points nodaux. Il en est de même pour le tétraèdre* 23, 45, 61; *aux points nodaux, les quatre premières nappes nommées plus haut se rencontrent avec les quatre dernières. Chacune des huit nappes, dont est composée la surface de Kummer tout entière, est de la forme d'un tétraèdre dont les faces seraient remplacées par des segments elliptiques et les arêtes par des segments hyperboliques.*

Les segments elliptiques (au nombre de 32) sont limités chacun par trois arcs de courbes, qui se rencontrent en trois points nodaux; les segments hyperboliques (au nombre de 48) sont limités chacun par deux arcs de courbes et deux points nodaux. Sur chacun des segments hyperboliques est situé un point d'inflexion double, lequel est coupé par la directrice correspondante.

Les lignes de courbure se composent de 8 branches, situées sur 8 segments hyperboliques. Les 6 lignes de courbure singulières qui appartiennent au système des lignes de courbure, en comptant chacune pour une ligne double, sont toutes les 6 réelles.

En chaque point de la surface il y a 6 *tangentes doubles réelles.*

Dans le cas I_b, les coordonnées d'une droite de l'espace deviennent

$$\rho x_i^2 = \frac{(k_\alpha - \lambda_1)(k_\alpha - \lambda_2)(k_\alpha - \lambda_3)(k_\alpha - \lambda_4)}{f'(k_\alpha)}, \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \\ \alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \end{cases}$$

en faisant correspondre à chaque indice i l'indice α du tableau qui se trouve au-dessous. On conclut de là qu'*une droite est réelle si un de ses paramètres est compris entre k_4 et k_5, et si les deux autres paramètres sont compris dans le même intervalle des k, ou s'ils sont deux imaginaires conjuguées.*

En appliquant cette remarque aux tangentes quelconques, aux tangentes principales, aux tangentes doubles, etc., on obtient l'image suivante de la surface :

La surface de Kummer I_b ne possède ni points doubles réels ni tangentes doubles réelles. Elle se compose de deux nappes,

qui ont partout une courbure hyperbolique, et qui peuvent se contenir l'une l'autre, ou être extérieures l'une à l'autre.

Les nappes sont recouvertes par deux systèmes de lignes de courbure; à chaque système appartiennent deux lignes de courbures singulières. Une telle courbe se compose de quatre branches impaires; sur chaque nappe sont situées deux de ces courbes, dont chacune se compose de huit branches impaires, savoir de quatre branches sur chaque nappe.

En chaque point il existe six tangentes doubles réelles.

Dans le cas I_c, une droite dans l'espace a pour coordonnées

$$\rho x_i^2 = \frac{(k_\alpha-\lambda_1)(k_\alpha-\lambda_2)(k_\alpha-\lambda_3)(k_\alpha-\lambda_4)}{f'(k_\alpha)}, \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \\ \alpha = 1, 2, 6, 4, 5, 3. \end{cases}$$

En conséquence, *une telle droite ne peut être réelle que si ses quatre paramètres sont situés entre k_1 et k_2, entre k_3 et k_4 entre k_5* et *k_6 et entre k_6* et *k_1*. Il résulte de là immédiatement que *la surface I_c est entièrement imaginaire; mais elle possède encore des tangentes doubles réelles.*

Si l'on passe au type II, où k_5 et k_6 sont des imaginaires conjuguées, et si l'on range les indices des autres k de manière à satisfaire aux inégalités $k_1 > k_2 > k_3 > k_4$, on trouve que tous les cas possibles peuvent se réduire aux deux suivants :

$$\text{II}_a \quad \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{x_2^2}{k_2-\lambda} + \frac{x_3^2}{k_3-\lambda} + \frac{x_4^2}{k_4-\lambda} + \frac{x_5^2}{k_5-\lambda} + \frac{x_6^2}{k_6-\lambda} = 0,$$

$$\text{II}_b \quad \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{x_2^2}{k_2-\lambda} + \frac{x_3^2}{k_4-\lambda} + \frac{x_4^2}{k_3-\lambda} + \frac{x_5^2}{k_5-\lambda} + \frac{x_6^2}{k_6-\lambda} = 0.$$

L'étude de ces deux cas se fait de la même manière que celle de I_a et I_b; il faut seulement avoir toujours égard à ce que, sur 32 éléments correspondants entre eux (droites, tangentes ou points de la surface), il n'y en a que les $\frac{7}{16}$ qui soient réels.

Par l'examen du cas II_a, on voit qu'*une droite ne peut être réelle que si ses paramètres sont des imaginaires conjuguées deux à deux, ou si ils sont compris deux à deux dans le même intervalle entre les k* (ces intervalles étant ici limités seulement par les quatre k réels).

Le développement ultérieur de cette remarque, joint au théorème

que, de 32 éléments correspondants entre eux, la moitié seulement sont toujours réels, conduit à la forme suivante :

La surface II_a *possède huit points nodaux réels et huit plans doubles; elle se compose de quatre nappes, qui se décomposent en deux groupes. Les nappes de l'un des groupes confinent dans les points nodaux à celles de l'autre groupe; les premières sont coupées par les directrices* 12 *et* 34, *les secondes par les directrices* 23 *et* 14, *tandis que le couple de directrices* 56 *coupe toutes les quatre nappes. Chacune des nappes a la forme d'un tétraèdre, dont deux paires d'arêtes opposées sont remplacées par des segments hyperboliques, tandis que chaque ensemble de deux faces, avec l'arête qui les sépare, est remplacé par un segment elliptique.*

Les segments elliptiques, au nombre de 8, sont limités par 4 arcs de courbe et 4 points nodaux; les segments hyperboliques, au nombre de 16, sont limités par deux points nodaux et deux arcs de courbe, et présentent chacun un point d'inflexion double. Les lignes de courbure ne sont plus formées que de quatre branches; à ces courbes n'appartiennent plus que quatre courbes singulières réelles. En chaque point de la surface, il existe encore quatre tangentes doubles réelles.

Le cas II_b se traite absolument comme le cas I_b. *Une surface* II_b, *qui ne possède aucun point nodal réel et aucun point double, se compose d'une nappe unique, présentant partout une courbure hyperbolique.*

La disposition des lignes de courbure sur cette surface est exactement la même que pour une nappe de la surface I_b. Ici encore il n'y a en chaque point que quatre tangentes doubles réelles.

Le type III est caractérisé par des valeurs imaginaires conjuguées de k_3, k_4 et de k_5, k_6. A ce type appartient une seule surface. La forme de cette surface se conclut, d'une part, de ce que sur 32 éléments correspondants, 8 sont encore réels; d'autre part, de ce qu'*une tangente ne peut être réelle que si ses deux paramètres simples sont des imaginaires conjuguées, ou s'ils sont réels, mais que* k_1 et k_2 *ne soient pas séparés*. On parvient au résultat suivant :

Il existe trois couples de directrices réelles, 12, 34, 56, *qui*

forment les arêtes d'un tétraèdre. La surface III *se compose maintenant de deux nappes, dont chacune renferme un sommet du tétraèdre, et les sommets renfermés sont situés sur une seule et même arête* 12. *Les deux nappes se rencontrent aux quatre points nodaux, et présentent deux segments hyperboliques et un segment elliptique.* Les segments hyperboliques ont la même forme que dans I_a et II_a ; les segments elliptiques sont limités par deux contours, dont chacun se compose de deux arcs de courbe et de deux points nodaux. En un point de la surface, il n'y a plus que deux tangentes réelles.

Le type IV présente encore deux cas possibles pour les k, et par suite encore deux surfaces différentes.

Si les six k sont deux à deux des imaginaires conjuguées, on obtient alors *la surface* IV_a, *dont la forme est représentée par la surface des ondes de Fresnel. Elle se compose de deux nappes elliptiques renfermées l'une dans l'autre, qui se traversent aux quatre points nodaux réels. De là résultent, sur la nappe extérieure, quatre segments hyperboliques, qui sont chacun limités par une conique et un point nodal.*

Si les six k sont deux à deux des imaginaires diamétrales, alors *on obtient la surface* IV_b, *qui n'offre que quatre points nodaux réels et quatre plans doubles réels, et qui d'ailleurs est imaginaire.*

Dans tous les cas énumérés ici, l'auteur a aussi étudié en détail les six systèmes de tangentes doubles de la surface, et chaque fois il a indiqué si un tel système renferme des tangentes doubles à points de contact réels, s'il renferme des tangentes doubles réelles à points de contact imaginaires (isolé), et s'il renferme des tangentes doubles entièrement imaginaires.

II. — *Méthode topologique.*

Soient donnés six complexes linéaires en involution, et par suite aussi leurs congruences, leurs surfaces réglées et leurs directrices ; si l'on choisit un point arbitraire, il existera toujours une surface de Kummer ayant ce point pour point nodal, et pour laquelle ces six complexes sont les complexes fondamentaux. Car si l'on cherche tous les plans et tous les points qui correspondent à ce point en

vertu des six complexes, des quinze congruences et des dix surfaces réglées, ces plans et ces points forment les 16 points nodaux et les 16 plans doubles d'une surface de Kummer, laquelle est ainsi déterminée.

Si l'on conserve maintenant les mêmes six complexes, et qu'on fasse mouvoir d'une manière continue dans l'espace un point nodal (et avec lui tous les autres), la surface de Kummer variera également d'une manière continue.

Il se produit de cette manière un nombre triplement infini de surfaces de Kummer, auxquelles appartiennent aussi, en les comptant double, les dix surfaces réglées. Ces surfaces réglées se présentent ainsi comme *cas limites* des surfaces de Kummer, et l'on peut, par un mouvement continu des points nodaux, transformer la seconde dans la première, en même temps que la forme de la surface parvient, d'une manière continue, à la forme d'une double surface réglée. La double surface réglée est composée évidemment de deux espèces de régions : d'abord de régions qui résultent d'une concentration du déplacement d'ensemble de points *réels,* et ensuite de régions résultant d'une concentration d'un déplacement d'ensemble de points imaginaires. Si l'on veut, réciproquement, passer de la surface réglée à la surface générale de Kummer, il faut partager la région de première espèce en deux feuilles *réelles* et négliger (considérer comme imaginaire) la région de seconde espèce. Les régions de l'une des espèces sont séparées par des courbes des régions de l'autre espèce, et les deux feuilles qui résultent d'une des régions doivent se rattacher entre elles le long de cette délimitation.

Ainsi tout revient à trouver cette délimitation. Le cas limite de la surface réglée se présente lorsqu'on fait mouvoir un point nodal, et par suite aussi tous les autres sur une des dix surfaces réglées. Les seize points nodaux se présentent ici comme points d'intersection de quatre génératrices d'une série de la surface réglée avec quatre génératrices de l'autre série, tandis que les seize plans doubles contiennent chacun une génératrice de chaque série. Comme maintenant la surface de Kummer ne peut en aucun point être située des deux côtés par rapport à un plan double, on voit que *ces huit génératrices elles-mêmes séparent les régions des génératrices d'une espèce de celles des génératrices de l'autre espèce.*

Nous obtiendrons maintenant toutes les formes de la surface en examinant tous les cas possibles qui peuvent se présenter ici. On ne peut, en effet, oublier aucune forme, puisqu'il y a toujours des surfaces limites *réelles,* et que la surface générale peut toujours être amenée *d'une manière continue* à la position limite.

Dans le type I nous distinguerons trois cas. La surface limite est ici un hyperboloïde, et il peut se faire ou que les huit génératrices (qui séparent les régions d'espèce différente) soient toutes réelles, ou que les quatre génératrices d'une série soient réelles et celles de l'autre série imaginaires, ou enfin que les huit génératrices soient toutes imaginaires.

Dans le premier cas, l'hyperboloïde est partagé en seize régions quadrangulaires; dans le second cas, en quatre bandes infinies; dans le troisième cas, il reste intact. Dans le premier cas, on a à recouvrir huit régions de l'hyperboloïde à deux nappes, non adjacentes les unes aux autres, et l'on obtient ainsi le cas limite de la surface I_a, et en même temps une bonne image de la surface générale. Dans le second cas, il faut recouvrir doublement deux bandes non contiguës, et l'on obtient la surface I_b à deux nappes extérieures l'une à l'autre. Dans le troisième cas, où l'hyperboloïde entier se compose d'une seule région, on devra recouvrir doublement l'hyperboloïde, ou ne pas le recouvrir du tout, selon qu'on le considérera comme une région de l'une ou de l'autre espèce. Ainsi l'on obtiendra la surface I_b, composée de deux nappes l'une à l'intérieur de l'autre, ou la surface imaginaire I_c.

Le type II, où les surfaces limites sont encore des hyperboloïdes, admet encore deux cas. Parmi les génératrices de l'une des séries, deux doivent toujours être réelles et deux imaginaires, tandis que les génératrices de l'autre série doivent être ou toutes réelles ou toutes imaginaires. Dans le premier cas, où il faut recouvrir doublement quatre régions non contiguës, apparaît la surface II_a; dans le second cas, où il faut recouvrir une bande infinie, on obtient la surface II_b.

Dans le type III aussi les surfaces-limites sont des hyperboloïdes, et ici, sur quatre génératrices de chaque série, il y en a nécessairement deux réelles et deux imaginaires. On trouve de cette manière, sur l'hyperboloïde, quatre régions dont deux doivent être doublement recouvertes, et donnent naissance à la surface III.

Le type IV, enfin, a pour surfaces-limites des ellipsoïdes et des hyperboloïdes à deux nappes. Par conséquent les quatre génératrices de l'une des séries devront être les imaginaires conjuguées de celles de l'autre série, ce qui détermine sur la surface-limite quatre points réels. Maintenant, suivant que l'ellipsoïde (ou l'hyperboloïde à deux nappes) sera doublement recouvert ou ne le sera pas du tout, on obtiendra la surface IV_a ou les surfaces IV_b. La première se compose de deux ellipsoïdes renfermés l'un dans l'autre, et qui se touchent aux quatre points en question ; la seconde a ces quatre points comme points nodaux, et elle est, d'ailleurs, entièrement imaginaire.

III. — *Représentation analytique en coordonnées de points.*

Notre point de départ sera ici la surface à 16 points nodaux réels, de l'équation de laquelle on peut déduire les équations de toutes les autres *par des transformations réelles ou imaginaires.*

Les coordonnées de lignes, dans le type I, sont de la forme

$$\begin{aligned}
x_1 &= (p_{12}+p_{34}) = (w_1x_2 - x_1w_2 + y_1z_2 - z_1y_2),\\
x_2 &= \frac{1}{i}(p_{12}-p_{34}) = \frac{1}{i}(w_1x_2 - x_1w_2 - y_1z_2 + z_1y_2),\\
x_3 &= (p_{13}+p_{42}) = (w_1y_2 - y_1w_2 + z_1x_2 - x_1z_2),\\
x_4 &= \frac{1}{i}(p_{13}-p_{42}) = \frac{1}{i}(w_1y_2 - y_1w_2 - z_1x_2 + x_1z_2),\\
x_5 &= (p_{14}+p_{23}) = (w_1z_2 - z_1w_2 + x_1y_2 - y_1x_2),\\
x_6 &= \frac{1}{i}(p_{14}-p_{23}) = \frac{1}{i}(w_1z_2 - z_1w_2 - x_1y_2 + y_1x_2).
\end{aligned}$$

De là résultent, pour les surfaces réglées du second degré, les équations

123, 456	$2(wy - xz) = 0$,
124, 356	$2(wy + xz) = 0$,
126, 345	$2(wz - xy) = 0$,
125, 346	$2(wz + xy) = 0$,
156, 234	$2(wx - yz) = 0$,
134, 256	$2(wx + yz) = 0$,

135, 246 ...... $(w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0,$

136, 245 ...... $(w^2 - x^2 - y^2 + z^2 = 0,$

145, 236 ...... $(w^2 - x^2 + y^2 - z^2 = 0,$

146, 235 ...... $(w^2 + x^2 - y^2 - z^2 = 0.$

L'équation de la surface à seize points nodaux réels est, comme on sait,

$$\left.\begin{array}{l} w^4 + x^4 + y^4 + z^4 \\ \quad + 2\,\dfrac{w_0 x_0 y_0 z_0 \Pi_{\varepsilon,\varepsilon'}(w_0^2 + \varepsilon x_0^2 + \varepsilon' y_0^2 + \varepsilon\varepsilon' z_0^2)\, wxyz}{(w_0^2 x_0^2 - y_0^2 z_0^2)(w_0^2 y_0^2 - x_0^2 z_0^2)(w_0^2 z_0^2 - x_0^2 y_0^2)} \\ \quad - \dfrac{w_0^4 + x_0^4 - y_0^4 - z_0^4}{w_0^2 x_0^2 - y_0^2 z_0^2}(w^2 x^2 + y^2 z^2) \\ \quad - \dfrac{w_0^4 + y_0^4 - x_0^4 - z_0^4}{w_0^2 y_0^2 - x_0^2 z_0^2}(w^2 y^2 + x^2 z^2) \\ \quad - \dfrac{w_0^4 + z_0^4 - x_0^4 - y_0^4}{w_0^2 z_0^2 - x_0^2 y_0^2}(w^2 z^2 - x^2 y^2), \end{array}\right\} = 0,$$

en supposant $\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$.

Si l'on fait maintenant la substitution $w' = w$, $x' = ix$, $y' = iy$, $z' = z$, alors les six complexes linéaires $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_6 = 0$ resteront sans altération dans leur ensemble, à l'échange près entre $x_5 = 0$ et $x_6 = 0$. De même, les dix surfaces du second degré n'éprouvent aucun changement. *La surface de Kummer* I_a *doit donc, dans la substitution en question, se changer en une autre surface du type* I. On voit maintenant, de plus, que les points nodaux de la nouvelle surface sont imaginaires, que cette substitution transforme la surface I_a dans la surface I_b ou I_c, et l'on obtient ainsi l'une ou l'autre de ces dernières, suivant que l'on a

$$w_0^4 + z_0^4 - x_0^4 - y_0^4 > 2 w_0 z_0^2 - x_0^2 y_0^2,$$

ou non, comme les recherches de l'auteur le font voir.

Pour transformer les six complexes linéaires du type I dans ceux du type II, on peut se servir de la transformation

$$w = jw', \quad x = x', \quad y = y', \quad z = jz',$$

où $j = \sqrt{i}$, parce que les complexes $x_5 = 0$ et $x_6 = 0$ se changent alors en des complexes imaginaires conjugués, tandis que les autres complexes restent réels. La même transformation change

naturellement aussi les dix surfaces du second degré du type I dans les surfaces correspondantes du type II, et la surface de Kummer I_a en une surface du type II. Cette surface, il est vrai, est encore entièrement imaginaire, puisque son équation acquiert des coefficients imaginaires. Mais si l'on pose, en même temps que les équations

$$w = jw', \quad x = x_1, \quad y = y', \quad z = jz',$$

celles-ci :

$$w_0 = jw'_0, \quad x_0 = x'_0, \quad y_0 = y'_0, \quad z_0 = jz'_0,$$

la surface transformée deviendra réelle. Cette surface, possédant huit points nodaux réels, est par suite identique avec II_a. Par la nouvelle substitution $w = w'$, $x = ix'$, $y = y'$, $z = iz'$, II_a se change en II_b.

Les six complexes linéaires du type III se déduisent des complexes correspondants du type I par la substitution

$$w = iw', \quad x = x', \quad y = jy', \quad z = jz'.$$

En posant, de plus,

$$w_0 = iw'_0, \quad x_0 = x'_0, \quad y_0 = jy'_0, \quad z_0 = jz'_0,$$

l'équation de la surface I_a se change dans l'équation de la surface III.

En appliquant la substitution

$$w = iw', \quad x = x', \quad y = y', \quad z = z',$$

les complexes du type I se changent dans les complexes conjugués deux à deux du type IV. Par la même substitution, la surface I_a se change en une surface du type IV, dont l'équation contient encore des coefficients imaginaires, Mais si, dans l'équation de la surface I_a, on substitue iw et iw_0 à la place de w et de w_0, l'équation deviendra réelle et représentera ou la surface IV_a ou la surface IV_b suivant que le produit

$$\begin{gathered}(-w_0^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)(w_0^2 - x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) \\ \times (w_0^2 + x_0^2 - y_0^2 + z_0^2)(w_0^2 + x_0^2 + y_0^2 - z_0^2)\end{gathered}$$

sera négatif ou positif, comme on le voit en développant les calculs.

SURFACES RÉGLÉES.

Dans le deuxième et le troisième paragraphe de ce travail, l'auteur traite encore en peu de mots les surfaces réglées du quatrième ordre à deux droites doubles, comme cas particuliers de la surface de Kummer. Ces surfaces s'obtiennent en faisant coïncider les points nodaux de la surface de Kummer deux à deux sur les directrices. On fait voir qu'*il existe encore un nombre simplement infini de surfaces réglées ayant les mêmes huit points cuspidaux; que d'ailleurs les points cuspidaux ne sont pas entièrement arbitraires, mais que leur rapport anharmonique doit être toujours le même sur les deux droites doubles.*

Quant à la forme de ces surfaces développables, on distinguera les cas suivants :

1. La surface réglée à droite double réelle et à huit points cuspidaux réels. Son équation est

$$(w^2y^2 + x^2z^2)(c^2y_0^2 - z_0^2) \\ + (w^2z^2 + x^2y^2)(y_0^2 - c^2z_0^2) + 2wxyz\,\frac{c(y_0^4 - z_0^4)}{y_0 z_0} = 0.$$

La surface se compose de deux nappes, qui se traversent elles-mêmes suivant la droite double.

2. Les deux surfaces réglées à droite double réelle et à points cuspidaux imaginaires. Leur équation se tire de la précédente par la substitution

$$w' = w, \quad x' = ix, \quad y' = iy, \quad z' = z.$$

L'une de ces deux surfaces se compose de deux nappes, qui se traversent mutuellement suivant la droite double; l'autre, en dehors de la droite double, ne possède aucun point réel. Suivant que $c^2(y_0^4 + z_0^4)$ est ou non plus grand que $(c^4 + 1)y_0^2z_0^2$, on se trouve dans le premier cas ou dans le second.

3. La surface réglée à deux droites doubles, ayant seulement quatre points cuspidaux réels (situés deux à deux sur chaque

droite). Son équation se déduit de la précédente par les substitutions

$$w = w', \quad x = jx', \quad y = jy', \quad z = z', \quad \text{et} \quad y_0 = jy'_0, \quad c = jc'.$$

Elle se compose d'une seule nappe qui se traverse elle-même suivant la droite double.

4. Les deux surfaces réglées à droites doubles conjuguées imaginaires. Leur équation est

$$\begin{aligned} 0 = (w^2 + x^2)^2 + (y^2 + z^2)^2 \\ + 2(wy - xz)^2 \frac{cx_0^3 - y_0^3}{x_0 y_0 (cy_0 - x_0)} - 2(wz + xy)^3 \frac{cx_0^3 + y_0^3}{x_0 y_0 (cy_0 + x_0)}. \end{aligned}$$

Si l'on a

$$2x_0 y_0 (cy_0 + x_0) > (x_0^2 - y_0^2)(cx_0 - y_0),$$

la surface aura deux nappes réelles, qui peuvent être intérieures ou extérieures l'une à l'autre; mais, si cette inégalité n'a pas lieu, la surface sera imaginaire.

5. La surface réglée à droite double imaginaire conjuguée, et à *une seule* nappe réelle. Son équation se déduit de la précédente par la substitution

$$w = jw', \quad x = jx', \quad \text{et} \quad c = jc', \quad x_0 = jx_0.$$

6. La surface réglée à deux droites doubles réelles, ayant quatre points cuspidaux réels sur l'une de ces droites, et quatre autres imaginaires sur l'autre droite. Son équation se déduit de celle de la surface réglée à huit points cuspidaux réels, au moyen des substitutions $z = iz'$ et $z_0 = iz'_0$. Cette surface réglée se compose de deux nappes, dont chacune se traverse elle-même le long de l'une des droites doubles, tandis que les deux nappes se traversent mutuellement suivant l'autre droite double. Nous l'avons passée inaperçue dans notre Mémoire des *Mathem. Annalen*.

Il existe donc en totalité huit surfaces réglées différentes.

Rohn.

MÉLANGES.

SUR LES DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES;

PAR M. G. DARBOUX.

I.

Dans son *Cours d'Analyse*, p. 64, M. Hermite a remarqué que, si l'on développe le radical

$$\sqrt{1 + 2\alpha x + 2\alpha' y + \beta x^2 + \beta' xy + \beta'' y^2}$$

suivant les puissances de x et de y, le groupe homogène des termes du second degré dans le développement de ce radical entre comme facteur dans le groupe homogène des termes du troisième degré et des degrés plus élevés. Ce résultat si curieux peut encore être formulé de la manière suivante : Si l'on considère la fonction

$$f(x, y) = \sqrt{\varphi(x, y)},$$

où $\varphi(x, y)$ est un polynôme du second degré, et que l'on développe $f(x + dx, y + dy)$ suivant les puissances de dx, dy par la formule

$$f(x + dx, y + dy) = f(x, y) + df + \frac{1}{2} d^2 f + \ldots$$

$d^3 f$, $d^4 f$,... sont divisibles exactement par $d^2 f$, quelles que soient les différentielles dx, dy. Cette proportion est remarquable parce qu'elle s'applique à la suite indéfinie des différentielles à partir de la troisième; et elle paraît au premier abord extrêmement limitative.

Mais il est aisé de prouver que, si la différentielle troisième d'une fonction est exactement divisible par la différentielle seconde, il en sera de même de toutes les différentielles d'ordre supérieur à trois. Plus généralement, si la différentielle $n + 1^{\text{ième}}$ d'une fonction est divisible par la différentielle $n^{\text{ième}}$, il en sera de même de toutes les différentielles d'ordre supérieur à $n + 1$.

Considérons en effet une fonction f de μ variables $x_1, \ldots, x_\mu$ et supposons que l'on ait

$$d^{n+1}f = (A_1 dx_1 + \ldots + A_\mu dx_\mu) d^n f;$$

on déduira de là par la différentiation

$$d^{n+2}f = (dA_1 dx_1 + \ldots + dA_\mu dx_\mu) d^n f + (A_1 dx_1 + \ldots + A_\mu dx_\mu) d^{n+1} f,$$

et par conséquent

$$d^{n+2}f = [dA_1 dx_1 + \ldots + dA_\mu dx_\mu + (A_1 dx_1 + \ldots + A_\mu dx_\mu)^2] d^n f.$$

En différentiant de nouveau, on démontrera de même que $d^{n+3}f$ et les différentielles suivantes sont toutes divisibles par $d^n f$.

Je me suis proposé de résoudre d'une manière générale la question suivante :

Trouver toutes les fonctions de μ variables $x_1, \ldots, x_\mu$ pour lesquelles la différentielle $(n+1)^{ième}$ est exactement divisible par la différentielle $n^{ième}$, c'est-à-dire toutes celles pour lesquelles on a

$$(1) \qquad d^{n+1}f = (A_1 dx_1 + \ldots + A_\mu dx_\mu) d^n f,$$

quelles que soient les différentielles $dx_1, \ldots, dx_\mu$. Je vais indiquer ici la marche que j'ai suivie et les résultats que j'ai obtenus.

Les deux membres de l'équation (1) sont des polynômes homogènes d'ordre $n+1$ par rapport aux différentielles $dx_1, \ldots, dx_\mu$. En écrivant que ces polynômes sont égaux terme à terme, on aura une suite d'équations qui feront connaître toutes les dérivées d'ordre $n+1$ de la fonction f, exprimées en fonction des dérivées d'ordre n et des quantités inconnues, $A_1, \ldots, A_\mu$. On pourrait éliminer ces quantités inconnues et l'on serait conduit à un certain nombre d'équations aux dérivées partielles d'ordre $n+1$ auxquelles devrait satisfaire la fonction f, et qu'il s'agirait d'intégrer. J'ai suivi une marche différente dans laquelle on conserve les quantités A_i.

Désignons, pour abréger, par $f^{n+1}_{\alpha_1 \ldots \alpha_\mu}$ la dérivée

$$\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_\mu^{\alpha_\mu}},$$

dont nous avons une expression en fonction des quantités A_i et des dérivées d'ordre n de f. Si l'on substitue les expressions de ces dérivées dans les conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f^{n+1}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_i-1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_\mu}) = \frac{\partial}{\partial x_k}(f^{n+1}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_k-1,\ldots,\alpha_\mu}),$$

on sera conduit à des relations contenant les fonctions A_i et leurs dérivées premières, ainsi que les dérivées d'ordre n et $n+1$ de la fonction f. On pourra évidemment éliminer les dérivées d'ordre $n+1$ de f, en les remplaçant par leurs expressions connues, et il restera des relations entre les dérivées d'ordre n de f, les fonctions A_i et leurs dérivées premières. Ce sont ces relations qui serviront de point de départ à notre recherche, et nous allons d'abord les établir.

Il serait beaucoup trop long de les considérer isolément. Mais on peut les obtenir d'une manière rapide et les écrire sous une forme condensée assez élégante en opérant de la manière suivante. Nous désignerons, pour abréger, par $d^p\delta^{n-p}f$ la différentielle $n^{\text{ième}}$ dont l'expression symbolique est

$$d^p\delta^{n-p}f = \left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+dx_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)^p\left(\delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+\delta x_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)^{n-p}f.$$

C'est la différentielle $n^{\text{ième}}$ que l'on obtiendrait si l'on différentiait p fois la fonction f en employant le système des différentielles

$$dx_1, \ldots, dx_\mu$$

pour les variables indépendantes, et $n-p$ fois en employant le système

$$\delta x_1, \ldots, \delta x_\mu,$$

toutes ces différentielles étant d'ailleurs traitées comme des constantes dans les différentiations successives.

Posons, pour abréger,

$$u_d = A_1 dx_1 + \ldots + A_\mu dx_\mu;$$

l'équation (1) pourra s'écrire

$$d^{n+1}f = u_d d^n f.$$

Si nous remplaçons partout la caractéristique d par

$$\lambda d + \delta,$$

c'est-à-dire

$$dx_i \quad \text{par} \quad \lambda dx_i + \delta x_i,$$

et que nous égalions les coefficients de λ^p, λ^{p+1} dans les deux membres, nous aurons les deux équations

$$(2) \quad \left\{\begin{aligned} &(n+1)d^p\delta^{n+1-p}f \\ &\quad = (n+1-p)u_\delta d^p\delta^{n-p}f + pu_d d^{p-1}\delta^{n-p+1}f, \\ &(n+1)d^{p+1}\delta^{n-p}f \\ &\quad = (n-p)u_\delta d^{p+1}\delta^{n-p-1}f + (p+1)u_d d^p\delta^{n-p}f. \end{aligned}\right.$$

Prenons la différentielle d de la première équation, et la différentielle δ de la seconde nous obtiendrons deux expressions de

$$d^{p+1}\delta^{n+1-p}f,$$

que nous pourrons égaler, ce qui nous conduit à la relation

$$\begin{aligned} &(n+1-p)du_\delta d^p\delta^{n-p}f + pdu_d\delta^{n-p+1}d^{p-1}f \\ &\quad - (n-p)\delta u_\delta d^{p+1}\delta^{n-p-1}f - (p+1)\delta u_d\delta^{n-p}d^pf \\ &\quad + u_\delta d^{p+1}\delta^{n-p}f - u_d d^p\delta^{n+1-p}f = 0. \end{aligned}$$

Si, dans cette équation, nous remplaçons les différentielles

$$d^{p+1}\delta^{n-p}f, \quad d^p\delta^{n+1-p}f$$

par leurs expressionstirées des formules (2), nous serons conduits à la formule

$$(3) \quad \left\{\begin{aligned} &(n-p)\delta^{n-p-1}d^{p+1}f\left(\frac{u_\delta^2}{n+1} - \delta u_\delta\right) \\ &\quad + (p+1)\delta^{n-p}d^pf\left(-\delta u_d + \frac{u_d u_\delta}{n+1}\right) \\ &\quad + (n+1-p)d^p\delta^{n-p}f\left(du_\delta - \frac{u_d u_\delta}{n+1}\right) \\ &\quad + p\delta^{n-p+1}d^{p-1}f\left(du_d - \frac{u_d^2}{n+1}\right) = 0, \end{aligned}\right.$$

qui devra être vérifiée, quelles que soient les différentielles d, δ,

pour toutes les valeurs du nombre entier, p de o à n inclusivement.

Je commencerai par examiner le cas où l'expression

$$\frac{u_\delta^2}{n+1} - \delta u_\delta = \frac{(\mathrm{A}_1 \delta x_1 + \ldots + \mathrm{A}_\mu \delta x_\mu)^2}{n+1} - (\delta \mathrm{A}_1 \delta x_1 + \ldots + \delta \mathrm{A}_\mu \delta x_\mu)^2,$$

sera nulle, quelles que soient les différentielles δx_i ; alors on aura de même

$$(4) \qquad \frac{u_d^2}{n+1} = du_d,$$

et l'équation (3) se réduira à la suivante :

$$(p+1)\left(\delta u_d - \frac{u_d u_\delta}{n+1}\right) = (n+1-p)\left(du_\delta - \frac{u_d u_\delta}{n+1}\right),$$

qui, devant être vérifiée, quel que soit le nombre entier p, nous donne

$$\delta u_d = \delta u_\delta = \frac{u_d u_\delta}{n+1}.$$

L'équation

$$\delta u_d = d.u_\delta$$

entraîne les relations suivantes :

$$\frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial x_i},$$

qui montrent que u_d est la différentielle d'une fonction. Nous pourrons donc poser

$$u_d = -\frac{(n+1)dv}{v},$$

ce qui donnera

$$du_d = \frac{-(n+1)d^2 v}{v} + \frac{(n+1)dv^2}{v^2}.$$

Portant cette valeur dans l'équation (4), nous aurons

$$d^2 v = 0,$$

et, par conséquent,

$$v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_\mu x_\mu + \alpha.$$

On ne peut supposer que toutes les quantités α_i soient nulles,

car alors $d^{n+1}f$ serait nulle, et la fonction f serait un polynôme entier de degré n. Par suite, on pourra toujours, par une substitution linéaire à coefficients constants, ramener v à la forme

$$v = x_1,$$

et l'équation (1) deviendra

$$d^{n+1}f = -\frac{(n+1)dx_1}{x_1}d^n f. \tag{5}$$

Posons

$$d^n f = \frac{1}{x_1^{n+1}}\mathrm{F}(x_1, \ldots, x_\mu, dx_1, \ldots, dx_\mu), \tag{6}$$

F désignant une fonction homogène d'ordre n de $dx_1, \ldots, dx_\mu$, qui reste à déterminer, et désignons, pour la commodité des notations, dx_μ par p_μ. On aura

$$d^{n+1}f = -\frac{n+1}{x_1^{n+2}}dx_1\mathrm{F} + \frac{1}{x_1^{n+1}}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1}p_1 + \ldots + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_\mu}p_\mu\right),$$

et, si nous portons ces expressions des différentielles $n^{\text{ième}}$ et $(n+1)^{\text{ième}}$ dans l'équation (5), il restera

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1}p_1 + \ldots + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_\mu}p_\mu = 0; \tag{7}$$

mais cette dernière équation n'est pas suffisante. Il nous reste à écrire les conditions qui expriment que le second membre de l'équation (6) est la différentielle $n^{\text{ième}}$ d'une fonction. Ici encore, pour éviter des calculs compliqués, nous ferons usage d'une proposition générale.

Considérons une fonction φ qui soit entière, homogène et d'ordre n par rapport aux quantités $p_i = dx_i$, les coefficients de ce polynôme étant d'ailleurs des fonctions quelconques des variables x_i, et cherchons les conditions qui sont nécessaires pour qu'il existe une fonction f satisfaisant à l'équation

$$d^n f = \varphi.$$

Si, dans les deux membres de cette équation, on remplace d par $d + \lambda\delta$, et que l'on égale les coefficients de λ dans les deux membres, on aura

$$nd^{n-1}\delta f = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\delta x_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_\mu}\delta x_\mu.$$

Le second membre devra donc être la différentielle δ de $nd^{n-1}f$.

Réciproquement, toutes les fois que l'expression

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\delta x_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial p_\mu}\delta x_\mu,$$

où les quantités $p_1, \ldots, p_\mu$ sont regardées comme des constantes, sera une différentielle exacte pour toutes les valeurs possibles de ces constantes, il sera possible de trouver une fonction dont φ sera la différentielle $n^{\text{ième}}$. Ainsi les conditions pour que la fonction φ soit une différentielle $n^{\text{ième}}$ exacte sont les suivantes :

$$(8) \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial p_i \partial x_k} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial p_k \partial x_i},$$

qui doivent être vérifiées, quelles que soient les quantités p_i.

Appliquons cette proposition générale, dont la démonstration est facile, au problème particulier que nous avons à traiter. Ici, nous prenons pour φ l'expression

$$\varphi = \frac{F(x_1, \ldots, x_\mu, p_1, \ldots, p_\mu)}{x_1^{n+1}},$$

F satisfaisant déjà à l'équation (7). Les équations (8) prennent la forme suivante :

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial p_k \partial x_i},$$

dans le cas où les deux indices i et k sont supposés différents de l'unité. Si l'un d'eux est égal à 1, on a

$$(10) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial p_1 \partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial x_i} - \frac{n+1}{x_1}\frac{\partial F}{\partial p_i}.$$

Il faut donc déterminer la fonction F qui satisfait en même temps aux équations (7), (9), (10).

Différentions l'équation (7) par rapport à p_1, et tenons compte des équations (10). Le résultat de cette différentiation prendra la forme

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + \sum_i p_i \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial x_1} - \frac{n+1}{x_1}\sum p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0.$$

En vertu du théorème des fonctions homogènes, on a

$$\sum_i p_i \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial x_1} = n \frac{\partial F}{\partial x_1},$$
$$\sum_i p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} = nF.$$

L'équation précédente peut donc aussi être écrite sous la forme

(11) $$x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} = nF.$$

Différentions maintenant l'équation (7) par rapport à p_i, i étant différent de 1 ; on trouvera, en suivant la même marche et tenant compte des formules (9) et (10),

(12) $$x_1 \frac{\partial F}{\partial x_i} + p_1 \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0.$$

Il est maintenant facile de déterminer la fonction F satisfaisant aux équations (7), (11), (12).

Posons, en effet,

$$p_{1k} = p_1 x_k - p_k x_1.$$

Nous pourrons exprimer $p_2 \ldots p_\mu$ en fonction de $p_1, p_{12}, p_{13}, \ldots, p_{1\mu}$ et des quantités x_i, et par conséquent donner à F la forme d'un polynôme homogène par rapport à $p_1, p_{12}, \ldots, p_{1\mu}$, les coefficients de ce polynôme pouvant être des fonctions des variables x_i. Mais alors les équations (12) nous donnent

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad i > 1,$$

et l'équation (7),

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0;$$

F sera donc une fonction homogène entière *à coefficients constants* des quantités

$$dx_1, \; x_k dx_1 - x_1 dx_k,$$

et il est aisé de voir que toutes les conditions (9), (10) seront vérifiées quel que soit ce polynôme.

Il nous reste à trouver la fonction f satisfaisant à l'équation

$$d^n f = \frac{1}{x_1^{n+1}} F(dx_1, x_2 dx_1 - x_1 dx_2, \ldots, x_\mu dx_1 - x_1 dx_\mu),$$

où F est ce polynôme à coefficients constants que nous venons de définir. On trouve sans difficulté, par la considération du coefficient de dx_1^n,

$$f = \frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots n x_1} F(1, x_2, x_3, \ldots, x_\mu),$$

en négligeant un polynôme entier d'ordre $n-1$, dont la différentielle $n^{\text{ième}}$ est évidemment nulle. Le numérateur de l'expression de f est le polynôme entier le plus général d'ordre n en $x_2, \ldots, x_\mu$. On peut lui ajouter évidemment des termes contenant x_1 en facteur, d'ordre égal ou inférieur à n, puisque ces termes, divisés par x_1, donneront un quotient entier qui disparaîtra dans la différentielle $n^{\text{ième}}$. Si l'on se rappelle enfin que nous avons fait une substitution linéaire, on voit que notre première solution nous conduit à la fonction f, dont l'expression est

$$f = \frac{F(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)}{P}, \tag{13}$$

où F est le polynôme le plus général d'ordre n, et P une fonction linéaire quelconque.

(*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HOLST (ELLING). — OM PONCELETS BETYDNING FOR GEOMETRIEN (¹).

Ce travail remarquable, résultat des études faites par l'auteur sur les sources mêmes, a pour objet l'appréciation du rôle des découvertes de Poncelet, qui ont marqué une époque en Géométrie. Pour cela, l'auteur considère, dans le Chapitre Iᵉʳ, la Géométrie des Anciens; dans le Chapitre II, la Géométrie après la Renaissance; dans le Chapitre III, l'école géométrique de Monge, en signalant en même temps les traces d'un grand nombre d'idées que Poncelet a le premier mises au jour, et qui se rencontrent déjà en germe chez ses prédécesseurs. Ensuite les Chapitres IV-IX traitent des théories géométriques les plus importantes qui sont dues à Poncelet. Enfin le Chapitre X est consacré aux successeurs de Poncelet, en particulier à Möbius, Chasles, Steiner, Plücker et Bobillier. S. L.

KERVILER (RENÉ). — CLAUDE-GASPARD BACHET, SEIGNEUR DE MÉZIRIAC, L'UN DES QUARANTE FONDATEURS DE L'ACADÉMIE FRANÇAISE. ÉTUDE SUR SA VIE ET SUR SES ÉCRITS. — Paris, S.-B. Dumoulin, 1880.

Cette Notice, extraite de la *Revue historique, nobiliaire et biographique*, est un fragment de l'ouvrage si consciencieux que M. René Kerviler consacre à l'histoire de l'Académie française et dont il a publié déjà tant de chapitres remarqués. Après quelques renseignements sur la famille de Bachet, l'auteur étudie successivement le poète, le mathématicien, l'érudit et l'académicien.

Bachet naquit à Bourg, en Bresse, le 9 octobre 1581, à 2 heures de l'après-midi : c'est ce qu'établit un acte de naissance publié d'après les archives de Bourg. Sa famille était-elle noble? M. René Kerviler considère, à juste titre, comme suspectes les armes sui-

(¹) E. HOLST, *Sur l'importance des travaux de Poncelet en Géométrie*. Programme universitaire pour l'année 1878; 166 pages in-8°.

vantes, indiquées par S. Guichenon : *De sable, à un triangle d'or, au chef cousu d'azur chargé de trois étoiles d'or*. Ce triangle est vraiment inquiétant. Ayant achevé ses études, Bachet se fit jésuite ; mais sa mauvaise santé le força bientôt à rentrer dans le monde. Il fit quelques voyages à Rome et à Paris, et, comme le remarque M. Kerviler, c'est probablement en 1611 qu'il fut sur le point d'être nommé précepteur de Louis XIII. Après cette aventure, il se retira à Bourg, en Bresse, s'y maria et se consacra tout entier à la littérature et à la science.

Il fut toujours médiocre poète français : le poète italien et le poète latin valaient mieux. Les seuls ouvrages qui le recommandent à la fois à la postérité et aux lecteurs de ce recueil sont les *Problèmes plaisants et délectables* et le *Commentaire sur Diophante*. La bibliographie de ces deux ouvrages est exactement retracée par M. Kerviler : on désirerait seulement trouver dans son étude une critique plus creusée. Il y a bien des observations mathématiques à faire sur les *Problèmes plaisants et délectables* (1), et le travail préparatoire de l'édition de *Diophante* a suscité plus d'une critique (2). Le géomètre bressois a laissé aussi des *Éléments d'Arithmétique* que M. Kerviler mentionne, auxquels l'auteur attachait une grande importance et qui n'ont été signalés que dans ces derniers temps à la Bibliothèque de l'Institut (3).

C'est probablement le *Commentaire sur Diophante* qui mit Bachet en goût de l'érudition pure ; il publie en 1626 une traduction des *Épîtres* d'Ovide en mauvais vers français, mais accompagnée de commentaires curieux ; en 1632, un excellent morceau sur la vie d'Ésope, etc. ; enfin il prépare une traduction, aujourd'hui perdue, de Plutarque, dans laquelle il corrigeait des milliers de fautes échappées à Amyot.

Dans le chapitre consacré à Bachet, membre de l'Académie, M. Kerviler reproduit une partie de la curieuse harangue que Méziriac fit lire à l'Académie par Vaugelas, le 10 décembre 1635 ;

---

(1) Édouard Lucas, *Récréations mathématiques*, 1re récréation.

(2) Léon Rodet, *Sur les notations numériques et algébriques antérieurement au XVIe siècle*, p. 45. Paris, Leroux, 1881.

(3) Ch. Henry, *Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat*, p. 95 et suiv.

il cherche à doser le vrai et le faux dans la Notice consacrée par Pellisson à l'académicien ; enfin il reproduit une épitaphe sur parchemin, conservée autrefois à la cathédrale de Bourg, et public une seconde fois le testament vraiment sympathique de ce savant universel.
C. H.

MÉLANGES.

SUR L'INTÉGRALE $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos x)^{a+b}\cos(a-b)x\,dx$;

PAR M. LIPSCHITZ.

Soit, pour un moment, en désignant par a et b deux quantités négatives, dont la somme, prise absolument, ne surpasse pas la valeur de l'unité,

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos x)^{a+b}\cos(a-b)x.dx,$$

ou plutôt

$$2J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (2\cos x)^{a+b}\cos(a-b)x.dx;$$

j'introduirai, au lieu des fonctions trigonométriques, les exponentielles imaginaires, et je ferai $a = -g$, $b = -h$, ce qui donnera l'expression suivante :

$$2J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^{2ix}+1)^{-g-h}\,\frac{e^{2ix(g-1)}+e^{2ix(h-1)}}{4i}\,d(e^{2ix}).$$

Mais le premier terme est donné par l'intégrale

$$\frac{1}{4i}\int (z+1)^{-g-h} z^{g-1}\,dz,$$

en posant $z = e^{2ix}$, selon le principe de l'intégration complexe; on aura le même résultat si l'on intègre de $z = -1$ à $z = 0$ en faisant

$z = \xi e^{-i\pi}$, ou si l'on intègre de $z = 0$ à $z = -1$ en faisant $z = \xi e^{i\pi}$. On en conclut cette valeur

$$\frac{1}{2}\sin g\pi \int_0^1 (1-\xi)^{-g-h}\xi^{g-1}d\xi = \frac{1}{2}\sin g\pi\,\frac{\Gamma(1-g-h)\Gamma(g)}{\Gamma(1-h)}.$$

De la même manière, on obtient, pour le second terme de l'intégrale proposée,

$$\frac{1}{2}\sin h\pi\,\frac{\Gamma(1-g-h)\Gamma(h)}{\Gamma(1-g)}.$$

Mais ces deux valeurs coïncident en vertu des formules

$$\frac{\pi}{\sin g\pi} = \Gamma(g)\Gamma(1-g), \quad \frac{\pi}{\sin h\pi} = \Gamma(h)\Gamma(1-h),$$

et l'on parvient ainsi à l'expression, donnée pour la première fois par Cauchy,

$$J = \frac{\pi}{2}\,\frac{\Gamma(1-g-h)}{\Gamma(1-g)\Gamma(1-h)} = \frac{\pi}{2}\,\frac{\Gamma(1+a+b)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+b)}.$$

RECHERCHES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS;

PAR M. G. MITTAG-LEFFLER (¹).

Il y a, comme on sait, deux formes, essentiellement différentes, au moyen desquelles on peut exprimer une fonction algébrique rationnelle d'une variable indépendante. L'une de ces formes est un quotient de deux produits qui n'ont entre eux aucun zéro commun, et dont chaque facteur présente un seul zéro. L'autre est la somme d'un certain nombre de fonctions rationnelles dont chacune a un seul infini.

M. Weierstrass a fait voir (²) comment la première de ces deux

---

(¹) *Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societätens Förhandlingar*, t. XXIII. Traduit du suédois.

(²) K. WEIERSTRASS, *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen* (*Abhandlungen der Königl. Akad. der Wissenschaften zu Berlin*, 1876).

formes subsiste, même pour des fonctions de caractère rationnel, c'est-à-dire pour des fonctions qui ne se distinguent des fonctions rationnelles qu'en ce qu'une telle fonction, lorsque la variable indépendante devient infinie, ne se comporte plus comme pour une valeur régulière ou sans singularité essentielle, mais se comporte, au contraire, comme pour une valeur véritablement et essentiellement singulière. Mais l'autre forme fondamentale des fonctions algébriques rationnelles, qui, en réalité, est la plus générale, s'applique aussi elle-même aux fonctions de caractère rationnel. C'est ce que j'ai démontré dans plusieurs Mémoires publiés dans les *Comptes rendus* de l'Académie de Stockholm ([1]).

M. Weierstrass a publié depuis ([2]) une nouvelle démonstration du théorème qui a servi de base à mes recherches, et qui diffère essentiellement de celui que j'avais moi-même primitivement trouvé. Cette démonstration, toutefois, avait été établie par moi, sans que j'aie connu la démonstration de M. Weierstrass, plus d'un an auparavant, vers la fin du printemps de l'année 1879, dans mes leçons publiques à l'Université de Helsingfors. D'autres démonstrations de mes théorèmes ont été données depuis par MM. Dini ([3]), Hermite ([4]), Schering ([5]). Je reviendrai une autre fois sur l'examen de ces diverses démonstrations, sur les différences qu'elles présentent entre elles et sur ce qu'il peut y avoir de véritablement nouveau dans chacune.

Ici, je remarquerai seulement que M. Weierstrass, dans un Mé-

---

([1]) *En metod att analytiskt framställa en funktion af rationel karakter, hvilken blir oändlig altid och endast uti vissa oändighetspunkter, hvilkas konstanter äro på förhand angifna.* (7 juin 1876).

Ytterligare om den analytiska framställningen af funktioner af rationel karakter. Ire Partie, janvier 1877.

Voir, à ce sujet, *Extrait d'une Lettre à M. Hermite*, par M. Mittag-Leffler (*Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, III_1, p. 269; 1879).

([2]) *Ueber einen functionentheoretischen Satz des Herrn G. Mittag-Leffler* (*Monatsb. d. k. Akad. d. Wiss. zu Berlin*, août 1880).

([3]) *Alcuni teoremi sulle funzioni di una variabile complessa*. Milano, 1880.

([4]) *Sur quelques points de la théorie des fonctions. Extrait d'une Lettre de M. Hermite à M. Mittag-Leffler* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XII. — *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. XCI).

([5]) *Das Anschliessen einer Function an algebraische Functionen in unendlich vielen Stellen* (*Abhandl. d. Königl. Akad. der Wiss. zu Göttingen*, t. XXVII; 1880).

moire extrêmement remarquable [1], publié depuis, renverse la question primitive, qui était d'exprimer une fonction de caractère rationnel au moyen d'une série de fonctions algébriques rationnelles, et, au lieu de cela, se propose le problème inverse, d'étudier une série donnée quelconque de cette espèce. Il parvient ainsi à ce résultat inattendu, qu'il existe des séries telles que, leurs termes étant des fonctions algébriques rationnelles, ces séries représentent dans les différentes parties du plan des fonctions analytiques différentes. Ainsi la série

$$\frac{1}{2}(x - x^{-1}) + \frac{1}{2}\sum_{\nu}\left[\frac{1}{(1 - 2^{\nu} - 2^{\nu} x i)(2^{\nu} - 2^{\nu'} x i)^2} - \frac{1}{(1 - 2^{\nu} - 2^{\nu} x^{-1} i)(2^{\nu} + 2^{\nu'} x^{-1} i)^2}\right],$$

pour citer un des exemples les plus simples, représente la fonction analytique -1, dès que la partie réelle de x est positive, et la fonction analytique -1, dès que la partie réelle de x est négative. M. Weierstrass a joint à cela un autre résultat, qu'il avait déjà communiqué à l'Académie de Berlin. La série de puissances

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b^{\nu} x^{a^{\nu}},$$

dans laquelle a est un nombre entier impair et positif, b une quantité positive, moindre que l'unité, avec la condition

$$ab > 1 + \tfrac{3}{2}\pi,$$

série dont ainsi les divers termes sont encore des fonctions algébriques rationnelles, définit une fonction qui n'existe pas en dehors de la région de convergence de la série, et qui, par suite, existe seulement pour les valeurs de x dont le module ne surpasse pas l'unité.

Dans le Mémoire que M. Hermite a récemment publié dans les

---

(1) *Zur Functionenlehre.* (*Monatsb. der Königl. Akad. d. Wiss. zu Berlin*, août 1880).

Actes de la Société [1], le grand géomètre français a éclairé d'un point de vue tout nouveau les deux découvertes de M. Weierstrass que nous venons de citer. Il a, en effet, montré, d'une part, comment il existe une expression intégrale qui, dans les différentes parties du plan, représente des fonctions différentes, et, d'autre part, il indique aussi comment il est vraisemblablement possible de former d'autres expressions intégrales, définissant des fonctions qui n'existent que dans une certaine région du plan, et pour lesquelles les autres régions, comme cela a lieu pour la série de puissances de Weierstrass, forment un *espace lacunaire*. Dans une Note du même Mémoire, il communique encore une formule remarquable, due à M. Poincaré, professeur à la Faculté des Sciences de Caen, connu aussi par d'autres recherches, récemment publiées, sur la théorie des fonctions, d'un caractère profond et original. Cette formule est de la forme suivante :

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_p} \frac{u_1^{m_1} u_2^{m_2} \ldots u_p^{m_p}}{x - \dfrac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots + m_p a_p}{m_1 + m_2 + \ldots + m_p}},$$

$u_1, u_2, \ldots, u_p$ étant des quantités données, dont la valeur absolue est moindre que l'unité, et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ étant des constantes arbitraires. Si l'on désigne maintenant par P un polygone convexe, dont les sommets sont des points faisant partie du système α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, et tels que les points restants soient situés à l'intérieur du polygone ou sur ses côtés, alors l'expression de M. Poincaré représente, en tout point extérieur au polygone, une certaine fonction analytique uniforme. A l'intérieur du polygone ou sur son contour, au contraire, il ne se trouve aucun point tel que, dans une région aussi petite que l'on voudra, cette expression puisse être égalée à une série convergente de puissances. On ne peut pas toutefois conclure de là, sans plus ample démonstration, qu'il soit impossible que la fonction analytique, représentée à l'extérieur du polygone P par la formule de Poincaré, existe aussi à l'intérieur de ce polygone. La formule de Weierstrass, que j'ai citée tout à l'heure, représente bien, dans une moitié du plan, la fonction ana-

---

[1] *Sur quelques points de la théorie des fonctions. Extrait d'une Lettre de M. Ch. Hermite à M. Mittag-Leffler.* (*Acta*, t. XII).

lytique — ε, et cette fonction existe aussi dans l'autre moitié du plan, bien que la formule cesse de la donner et fournisse en son lieu une autre fonction analytique.

Dans un Mémoire que m'a envoyé M. Poincaré, et dont j'ai aujourd'hui l'honneur de proposer l'insertion dans les *Actes* de la Société, cette question trouve une explication aussi complète qu'ingénieuse. M. Poincaré montre comment la formule dont il s'agit est, en réalité, une expression d'une seule fonction analytique, pour laquelle le polygone P est un véritable « espace lacunaire », et, par cette remarque, il est le premier qui, après Weierstrass, ait donné un exemple concret de l'existence de fonctions de cette nature. M. Poincaré étudie également, en partant de la conception de la théorie des fonctions, propre à M. Weierstrass, certaines autres fonctions de même nature, ayant des « espaces lacunaires ».

Je me permets aussi de demander en même temps l'insertion dans les *Actes* d'un Mémoire de l'un de mes élèves actuels, M. Th. Homén, dans lequel, sur mon invitation, l'auteur, suivant les traces de MM. Weierstrass et Poincaré, s'est posé le problème de chercher, d'une part, à former de nouvelles séries de fonctions algébriques rationnelles qui, dans les différentes parties du plan, représentent des fonctions analytiques différentes, et, d'autre part, à établir d'autres séries de cette nature qui soient réellement des fonctions à *espace lacunaire*.

Je demande également pour ma part qu'il me soit réservé dans les *Actes* une place pour un Mémoire assez étendu, où seront publiées les recherches auxquelles je me suis livré depuis plusieurs années, et qui se rapportent aux différentes singularités qui peuvent se rencontrer dans les fonctions analytiques uniformes, ainsi qu'à la construction de formules générales, au moyen desquelles on peut représenter généralement les diverses classes des fonctions de cette espèce qui sont possibles.

SUR UN MODE DE SÉPARATION DES RACINES DES ÉQUATIONS ET LA FORMULE DE LAGRANGE;

PAR M. A.-E. PELLET.

Désignons par $F(x)$ la série $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$, et, α_i représentant le module de a_i, supposons que l'équation

$$o = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1} - \alpha_n x^n + \alpha_{n+1} x^{n+1} + \ldots$$

admette deux racines positives r_1 et $r_2 > r_1$; l'équation $F(x) = o$ a n racines de modules inférieurs à r_1, et les autres ont des modules supérieurs à r_2. En effet, x ayant un module compris entre r_1 et r_2, le terme $a_n x^n$ de $F(x)$ a un module supérieur à la somme des modules de tous les autres termes. Posons

$$F(x) = a_n x^n + f(x) = a_n x^n \left[1 + \frac{f(x)}{a_n x^n}\right];$$

assignons au module de x une valeur comprise entre r_1 et r_2, et faisons varier son argument de o à 2π. Le module de $a_n x^n$ augmente de $2n\pi$; quant à celui de $\left[1 + \frac{f(x)}{a_n x^n}\right]$, il reprend sa valeur primitive; $F(x) = o$ a donc n racines de modules inférieurs à n (BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 31). D'ailleurs, cette proposition résultera de l'analyse qui va suivre.

Nous supposons que le module de x est compris entre r_1 et r_2. On a

$$lF(x) = la_n + n.lx + l\left[1 + \frac{f(x)}{a_n x^n}\right]$$
$$= la_n + n.lx + \frac{f(x)}{a_n x^n} - \frac{1}{2}\frac{f(x)^2}{a_n^2 x^{2n}} + \ldots + (-1)^{i-1}\frac{f(x)^i}{i a_n^i x^{ni}} + \ldots.$$

La série des modules des termes de la série à double entrée qui figure dans la formule précédente est convergente; on peut donc ordonner cette série suivant les puissances positives et négatives de x. En prenant les dérivées des deux membres, il vient

$$(1)\quad \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{n}{x} + \frac{d\frac{f(x)}{a_n x^n}}{dx} - \frac{1}{2}\frac{d\frac{f(x)^2}{a_n^2 x^{2n}}}{dx} + \ldots + \frac{(-1)^i}{i}\frac{d\left[\frac{f(x)}{a_n x^n}\right]^i}{dx} + \ldots.$$

Dans la formule précédente, les fonctions qui suivent $\frac{n}{x}$ ne contiennent pas de terme en $\frac{1}{x}$. Ainsi $\frac{F'(x)}{F(x)}$ est développable pour les valeurs de x considérées suivant les puissances positives et négatives de x; le coefficient de $\frac{1}{x}$ étant n dans ce développement, l'équation $F(x) = 0$ a n racines de modules inférieurs à r_1; la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ de ces n racines est égale au coefficient de $\frac{1}{x^{m-1}}$ dans le second membre de la formule (1).

Si l'on prend

$$f(x) = p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n \quad \text{et} \quad F(x) = x^n + f(x),$$

on est conduit à la formule de Waring pour exprimer la somme des puissances semblables des racines d'une équation algébrique. J'ai déjà donné cette démonstration dans les *Nouvelles Annales* (année 1875).

Faisons $F(x) = x - t f(x)$, $f(x)$ étant une fonction holomorphe pour $x = 0$. Désignons par $\mathfrak{f}(x)$ ce que devient $f(x)$ lorsqu'on y remplace les divers coefficients de x par leur module, et par τ la plus grande valeur réelle de t pour laquelle l'équation $x - t\,\mathfrak{f}(x) = 0$ admet deux racines positives; pour $t = \tau$, la racine positive de l'équation $x - \tau\,\mathfrak{f}(x) = 0$ est double; nous la désignerons par ξ. t ayant un module inférieur à τ, l'équation $F(x) = 0$ a une seule racine (x_1) de module inférieur à ξ. Cette racine est égale au coefficient de $\frac{1}{x^2}$ dans la fonction

$$\frac{1}{x} - t\,\frac{d\,\frac{f(x)}{x}}{dx} - \frac{t^2}{2}\,\frac{d\left[\frac{f(x)}{x}\right]^2}{dx} - \ldots - \frac{t^i}{i}\,\frac{d\left[\frac{f(x)}{x}\right]^i}{dx} - \ldots$$

Plus généralement, $\varphi(x)$ étant une fonction holomorphe pour $x = 0$, $\varphi(x_1)$ est égale au coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de $\varphi(x)\,\frac{f'(x)}{f(x)}$, c'est-à-dire dans

$$\frac{\varphi(x)}{x} - t\,\varphi(x)\,\frac{d\,\frac{f(x)}{x}}{dx} - \ldots - \frac{t^i}{i}\,\varphi(x)\,\frac{d\left[\frac{f(x)}{x}\right]^i}{dx} - \ldots.$$

Or

$$\varphi(x)\frac{d\left[\frac{f(x)}{x}\right]^i}{dx}+\left[\frac{f(x)}{x}\right]^i\varphi'(x)=\frac{d\,\varphi(x)\left[\frac{f(x)}{x}\right]^i}{dx};$$

lans le second membre de cette formule, il n'y a pas de terme en $\frac{1}{x}$; donc

$$\text{coeff. de } \frac{1}{x} \text{ dans } \varphi(x)\frac{d\left[\frac{f(x)}{x}\right]^i}{dx}$$

$$= \text{coeff. de } \frac{1}{x} \text{ dans } -\varphi'(x)\left[\frac{f(x)}{x}\right]^i$$

$$= -\frac{1}{1.2.3\ldots(i-1)}\left[\frac{d^{i-1}\,\varphi'(x)\,f(x)^i}{dx^{i-1}}\right]_{x=0}.$$

Remplaçant x par $a+x$, on voit que la fonction holomorphe $\varphi(x_1)$, x_1 satisfaisant à l'équation $x-a-t\,f(x)=0$ et se réduisant à a pour $t=0$, est égale à

$$\varphi(a)+t\,\varphi'(a)f(a)+\ldots+\frac{t^n}{1.2\ldots n}\frac{d^{n-1}\,\varphi'(a)\,f(a)^n}{da^{n-1}}+\ldots;$$

e qui est la formule de Lagrange.

La démonstration précédente est au fond la même que celle onnée par Cauchy dans ses *Nouveaux Exercices*. Les développements que j'y ajoute me paraissent donner aux considérations de Cauchy plus de portée et de rigueur. La démonstration de Cauchy déjà inspiré celle de M. Rouché (XXXIX[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*).

SUR LES DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES;

PAR M. G. DARBOUX.

(SUITE.)

III.

Nous avons maintenant à considérer le cas où l'expression

$$A=\frac{u_3^2}{n+1}-\delta u_4$$

n'est pas nulle pour toutes les valeurs possibles des différentielles δx_i. Je vais démontrer que cette expression, qui n'est pas identiquement nulle, le devient cependant dès que les différentielles δx_i ont été choisies de telle manière que l'on ait

$$\delta^n f = 0.$$

En effet, dans l'équation (3), donnons à p la valeur 0, et prenons pour les δx_i un système de valeurs satisfaisant à la relation précédente. Cette équation deviendra

$$n A \delta^{n-1} d f = 0;$$

si A n'est pas nul, il faudra que l'on ait

$$\delta^{n-1} d f = 0;$$

alors, dans la même équation (3), donnons à p la valeur 1; elle deviendra

$$(n-1) A \delta^{n-2} d^2 f = 0,$$

et l'on aura par conséquent

$$\delta^{n-2} d^2 f = 0.$$

En continuant de la même manière, on verra que, si A n'est pas nul, l'équation

$$\delta^n f = 0$$

entraîne les suivantes :

$$\delta^{n-1} d f = 0, \quad \delta^{n-2} d^2 f = 0, \quad d^n f = 0.$$

Mais la dernière de ces équations, ne contenant plus les δ, devra être identiquement vérifiée, et par conséquent la fonction f, ayant sa différentielle $n^{\text{ième}}$ identiquement nulle, ne peut être qu'un polynôme d'ordre $n-1$.

Écartons ce cas tout à fait exceptionnel; nous voyons que *toutes les fois que les différentielles δx_i annuleront $\delta^n f$, elles annuleront aussi l'expression*

$$A = \frac{u_\delta^2}{n+1} - u_\delta.$$

Cette proposition va nous permettre de résoudre la question proposée.

A est un polynôme homogène du second degré par rapport aux quantités δx_i. Supposons d'abord que ce polynôme soit indécomposable en un produit de facteurs du premier degré. Toutes les fois que la différentielle $\delta^n f$ sera nulle, il en sera de même de A. Il faudra donc que $\delta^n f$ soit égale à une puissance parfaite de A, multipliée par une fonction des variables $x_1, \ldots, x_\mu$. Le nombre n devra être pair et nous aurons

$$(14)\qquad d^n f = \mathrm{K}\left(\frac{u_d^2}{n+1} - du_d\right)^{\frac{n}{2}},$$

K étant une certaine fonction des variables.

On déduit de cette équation, en remplaçant partout d par $d + \lambda\delta$ et prenant le coefficient de λ dans les deux membres,

$$d^{n-1}\delta f = \mathrm{K}\left(\frac{u_d^2}{n+1} - du_d\right)^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{u_d u_\delta}{n+1} - \frac{du_\delta + \delta u_d}{2}\right).$$

Si l'on porte les valeurs de $d^n f$, $d^{n-1}\delta f$ ainsi obtenues dans l'équation (3), où l'on aura fait $p = n$, il vient, en réduisant,

$$du_\delta = \delta u_d,$$

et cette équation exprime, nous l'avons déjà vu, que u_d est la différentielle exacte d'une fonction. Nous pouvons donc poser

$$u_d = -\frac{n+1}{v} dv,$$

ce qui donne

$$\frac{u_d^2}{n+1} - du_d = \frac{(n+1)d^2 v}{v},$$

$$(15)\qquad d^{n+1} f = -\frac{n+1}{v} dv d^n f.$$

L'expression de $d^n f$ prendra maintenant la forme

$$(16)\qquad d^n f = \mathrm{H}(d^2 v)^{\frac{n}{2}}.$$

Si nous différentions, nous obtiendrons l'expression de $d^{n+1} f$,

$$d^{n+1} f = d\mathrm{H}(d^2 v)^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2}\mathrm{H}(d^2 v)^{\frac{n}{2}-1} d^3 v.$$

Portons les expressions de $d^n f$, $d^{n+1} f$ dans l'équation (15); il viendra

$$(17) \qquad \frac{n}{2} d^3 v = d^2 v \left[-\frac{(n+1)dv}{v} - \frac{dH}{H} \right],$$

équation que l'on peut encore écrire sous la forme

$$(18) \qquad d^3 v = -\frac{3dw}{w} d^2 v,$$

en posant, pour abréger,

$$\frac{3dw}{w} = \frac{2(n+1)}{n} \frac{dv}{v} + \frac{2}{n} \frac{dH}{H}.$$

Ainsi la différentielle troisième de v est divisible par la différentielle seconde, et cela de telle manière que le quotient soit une différentielle exacte. On peut donc appliquer à cette fonction v la formule (3) dans laquelle on fera $n = 3$, et l'on remplacera u_d par $\frac{-3dw}{w}$.

En donnant à p successivement les valeurs 0, 1, 2, on obtient ainsi les trois relations

$$\begin{aligned} d\delta v\, \delta^2 w - \delta^2 v\, d\delta w &= 0, \\ d^2 v\, \delta^2 w - d^2 w\, \delta^2 v &= 0, \\ d^2 v\, d\delta w - d\delta v\, d^2 w &= 0, \end{aligned}$$

qui ne peuvent évidemment être satisfaites, quelles que soient les différentielles dx_i, δx_i, que si les dérivées secondes de w sont proportionnelles à celles de v. On aura donc

$$(19) \qquad d^2 v = h\, d^2 w,$$

h étant une constante ou une fonction des variables indépendantes.

Si h est une constante, on aura évidemment

$$v = hw,$$

en négligeant des termes du premier degré qui n'ont aucune importance, puisque la différentielle $d^2 v$ entre seule dans l'expres-

sion (16) de $d^n f$. L'équation (17) deviendra

$$d^3 v = -\frac{3\, dv\, d^2 v}{v}$$

ou

$$d^3(v^2) = 0.$$

Par conséquent, v^2 sera un polynôme quelconque du second degré par rapport aux variables indépendantes.

Cherchons maintenant si, dans l'équation (19), h peut être une fonction des variables indépendantes. Considérons deux dérivées de v, w par rapport à la même variable

$$p_\alpha = \frac{\partial v}{\partial x_\alpha}, \quad q_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}.$$

L'équation (19) nous apprend que toutes les dérivées de p_α sont proportionnelles aux dérivées correspondantes de q_α. On a donc

$$q_\alpha = \varphi_\alpha(p_\alpha)$$

et

$$\frac{1}{h} = \varphi'_\alpha(p_\alpha).$$

Ainsi, entre les dérivées $p_1, p_2, \ldots, p_\mu, q_1, \ldots, q_\mu$ de v et de w, on aurait toutes les relations

$$\begin{gathered} q_1 = \varphi_1(p_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ q_\mu = \varphi_\mu(p_\mu), \\ \frac{1}{h} = \varphi'_1(p_1) = \ldots = \varphi'_\mu(p_\mu). \end{gathered}$$

Or h, par hypothèse, n'est pas une constante, et, par conséquent, les fonctions φ'_i dépendent effectivement des variables qu'elles contiennent. On voit donc que toutes les dérivées de v seraient fonctions de l'une d'elles. Dans ce cas, on le reconnaîtra aisément, $d^2 v$ serait un carré parfait, et, par conséquent, $d^n f$ serait une puissance parfaite d'une expression de la forme

$$P_1\, dx_1 + \ldots + P_\mu\, dx_\mu.$$

Or nous aurons, dans l'article suivant, à considérer cette hypo-

thèse. Il est donc inutile de poursuivre, et nous pouvons nous borner ici au cas où h est constante et où v est la racine carrée d'un polynôme du second degré.

On a alors, nous l'avons vu,

$$d^3 v = -\frac{3\,dv}{v}\,d^2 v,$$

et, si l'on porte cette expression de $d^3 v$ dans l'équation (17), on en déduit

$$2\frac{dH}{H} = \frac{n-2}{v}\,dv$$

et, par conséquent,

$$H = C v^{\frac{n}{2}-1},$$

C désignant une constante, ce qui donne, pour $d^n f$, l'expression

$$d^n f = C v^{\frac{n}{2}-1}(d^2 v)^{\frac{n}{2}}.$$

Il n'y a pas de condition nouvelle à écrire, et l'on trouve, pour l'expression de la fonction f, en négligeant un polynôme du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré,

$$(20) \qquad f = \frac{C}{(1.3.5\ldots n-1)^2}\,v^{n-1}.$$

Pour $n = 2$, on retrouve la propriété signalée par M. Hermite.

IV.

Après avoir supposé que le polynôme

$$\frac{u_\delta^2}{n+1} - \delta u_\delta$$

est indécomposable, il nous reste à examiner le cas où il serait le produit de deux facteurs du premier degré

$$(P_1\,\delta x_1 + \ldots + P_\mu\,\delta x_\mu), \quad (Q_1\,\delta x_1 + \ldots + Q_\mu\,\delta x_\mu).$$

Dans ce cas, pour que ce produit s'annule en même temps que $\delta^n f$, il ne sera plus nécessaire que $\delta^n f$ soit une puissance exacte du produit. Il suffira que $\delta^n f$ soit de la forme

$$\delta^n f = k(P_1\,\delta x_1 + \ldots + P_\mu\,\delta x_\mu)^h (Q_1\,\delta x_1 + \ldots + Q_\mu\,\delta x_\mu)^{n-h},$$

où h sera un nombre entier positif, inférieur ou égal à n. J'examinerai d'abord l'hypothèse où l'on a

$$d^n f = \mathrm{H}(\mathrm{P}_1\, dx_1 + \ldots + \mathrm{P}_\mu\, dx_\mu)^n.$$

Pour que le second membre soit une différentielle $n^{\text{ième}}$ exacte, il faudra que, en posant

$$\varphi = \mathrm{H}(\mathrm{P}_1 p_1 + \ldots + \mathrm{P}_\mu p_\mu)^n,$$

les conditions d'intégrabilité (8) soient vérifiées, quelles que soient les constantes p_i. On trouve ainsi les équations

$$(21)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathrm{P}_k}{\partial x_i} + \frac{\mathrm{P}_i}{\mathrm{H}}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_k} - \frac{\mathrm{P}_k}{\mathrm{H}}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i} \\ &\quad + \frac{\sum_\alpha p_\alpha \left(\mathrm{P}_i \frac{\partial \mathrm{P}_\alpha}{\partial x_k} - \mathrm{P}_k \frac{\partial \mathrm{P}_\alpha}{\partial x_i}\right)}{\sum_\alpha p_\alpha \mathrm{P}_\alpha} = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour que cette égalité puisse avoir lieu, quelles que soient les quantités p_α, il faut que l'on ait

$$(22)\quad \frac{\mathrm{P}_i \frac{\partial \mathrm{P}_\alpha}{\partial x_k} - \mathrm{P}_k \frac{\partial \mathrm{P}_\alpha}{\partial x_i}}{\mathrm{P}_\alpha} = \frac{\mathrm{P}_i \frac{\partial \mathrm{P}_\beta}{\partial x_k} - \mathrm{P}_k \frac{\partial \mathrm{P}_\beta}{\partial x_i}}{\mathrm{P}_\beta},$$

quels que soient les nombres α, β, i, k. L'égalité précédente peut encore s'écrire

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\mathrm{P}_\alpha}{\mathrm{P}_\beta}\right)}{\mathrm{P}_i} = \frac{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\mathrm{P}_\alpha}{\mathrm{P}_\beta}\right)}{\mathrm{P}_k}.$$

On voit que les dérivées des deux quotients, tels que $\frac{\mathrm{P}_\alpha}{\mathrm{P}_\beta}$, $\frac{\mathrm{P}_{\alpha'}}{\mathrm{P}_{\beta'}}$, seront proportionnelles, ce qui exige que l'on ait

$$\frac{\mathrm{P}_{\alpha'}}{\mathrm{P}_{\beta'}} = \varphi\left(\frac{\mathrm{P}_\alpha}{\mathrm{P}_\beta}\right),$$

quels que soient α', β', α, β. On pourra donc poser

$$\mathrm{P}_1\, dx_1 + \ldots + \mathrm{P}_\mu\, dx_\mu = k[\varphi_1(u)\, dx_1 + \ldots + \varphi_\mu(u)\, dx_\mu],$$

u étant une fonction à déterminer. Quant à k, on peut le réunir

à H, ce qui revient à le remplacer par l'unité. Alors on a

$$P_i = \varphi_i(u),$$

et les équations (22) nous donnent

$$\varphi_i(u)\frac{\partial u}{\partial x_k} - \varphi_k(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

L'intégration de toutes les équations qu'on obtient, en donnant à i et à k des valeurs différentes, nous montre que u sera déterminé en fonction des variables par l'équation

$$(23)\qquad x_1\varphi_1(u) + \ldots + x_\mu\varphi_\mu(u) + \varphi(u) = 0,$$

où $\varphi(u)$ est une fonction arbitraire.

Alors les équations (21) prennent la forme

$$\frac{\partial(HP_i)}{\partial x_k} = \frac{\partial(HP_k)}{\partial x_i},$$

et elles expriment que

$$H[\varphi_1(u)\,dx_1 + \ldots + \varphi_\mu(u)\,dx_\mu]$$

est une différentielle exacte. Or, en vertu de l'équation (23), on a

$$\varphi_1(u)\,dx_1 + \ldots + \varphi_\mu(u)\,dx_\mu = -(x_1\varphi'_1 + x_2\varphi'_2 + \ldots + x_\mu\varphi'_\mu + \varphi')du.$$

Donc l'expression

$$-H(x_1\varphi'_1 + \ldots + x_\mu\varphi'_\mu + \varphi')\,du$$

devra être une différentielle exacte, ce qui exige que l'on ait

$$H = -\frac{\psi(u)}{x_1\varphi'_1 + \ldots + x_\mu\varphi'_\mu + \varphi'}.$$

L'expression correspondante de $d^n f$ sera

$$d^n f = -\frac{\psi(u)(\varphi_1\,dx_1 + \varphi_2\,dx_2 + \ldots + \varphi_\mu\,dx_\mu)^n}{\varphi' + \varphi'_1 x_1 + \varphi'_2 x_2 + \ldots + \varphi'_\mu x_\mu},$$

et il nous reste à obtenir l'expression de f. Cette expression s'offre à nous sous une forme élégante, et elle est donnée par l'intégrale définie

$$(24)\qquad f = \int_0^u \frac{\psi(u)(x_1\varphi_1 + \ldots + x_\mu\varphi_\mu + \varphi)^{n-1}\,du}{1.2.3\ldots(n-1)}.$$

Dans cette intégration, x_1, ..., x_μ sont traitées comme des constantes. Nous négligeons toujours un polynôme arbitraire d'ordre $n-1$, et, après l'intégration, nous devrons remplacer u par sa valeur, tirée de l'équation (23).

V.

Nous n'avons plus qu'à examiner le cas où $d^n f$ serait le produit de deux facteurs élevés à des puissances quelconques

$$d^n f = \mathrm{K}(\mathrm{P}_1 dx_1 + \ldots + \mathrm{P}_\mu dx_\mu)^h (\mathrm{Q}_1 dx_1 + \ldots + \mathrm{Q}_\mu dx_\mu)^{n-h}.$$

Il est important de remarquer que nous pouvons supposer h différent de $n-h$; car, dans le cas où l'on a $h = n - h$, $d^n f$ est une puissance parfaite de l'expression que nous avons appelée A, et ce cas a été complètement traité à l'article III.

On démontrera, comme dans l'article précédent, que les deux facteurs de $d^n f$ sont de la forme suivante.

Posons

$$a = \varphi(u), \quad a_i = \varphi_i(u),$$

et déterminons la fonction u par l'équation

$$(25) \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_\mu x_\mu + a = 0.$$

Posons de même

$$b = \psi(v), \quad b_i = \psi_i(v),$$

et déterminons v par l'équation

$$(26) \qquad b_1 x_1 + \ldots + b_\mu x_\mu + b = 0.$$

En posant

$$h' = n - h$$

on aura

$$d^n f = \mathrm{K}(a_1 dx_1 + \ldots + a_\mu dx_\mu)^h (b_1 dx_1 + \ldots + b_\mu dx_\mu)^{h'}.$$

Il nous reste à exprimer que le second membre de cette équation est une différentielle $n^{\text{ième}}$ exacte. Or nous avons vu que, si l'on désigne ce second membre par φ et si l'on y remplace dx_i par p_i,

tout se réduit à exprimer que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\delta x_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial p_\mu}\delta x_\mu$$

est une différentielle exacte. Posons, pour abréger,

$$P = a_1 p_1 + \ldots + a_\mu p_\mu,$$
$$Q = b_1 p_1 + \ldots + b_\mu p_\mu.$$

Il y aura ici à exprimer que

$$(27)\quad \begin{cases} KP^{h-1}Q^{h'-1}[hQ(a_1\delta x_1 + \ldots + a_\mu \delta x_\mu) \\ \qquad\qquad + h'P(b_1\delta x_1 + \ldots + b_\mu \delta x_\mu)] \end{cases}$$

est une différentielle exacte.

Or des équations (25), (26) on déduit

$$a_1\delta x_1 + a_2\delta x_2 + \ldots + a_\mu \delta x_\mu = -M\delta u,$$
$$b_1\delta x_1 + b_2\delta x_2 + \ldots + b_\mu \delta x_\mu = -N\delta v,$$

en posant, pour abréger,

$$(28)\quad \begin{cases} M = a'_1 x_1 + \ldots + a'_\mu x_\mu + a', \\ N = b'_1 x_1 + \ldots + b'_\mu x_\mu + b', \end{cases}$$

et, par conséquent, l'expression (27) pourra s'écrire

$$KP^{h-1}Q^{h'-1}(-hQM\delta u - h'PN\delta v).$$

Définissons deux quantités nouvelles ρ, σ par les équations

$$(29)\qquad -hKM = \sigma, \quad -h'KN = \rho.$$

Il faudra que

$$P^{h-1}Q^{h'-1}(Q\sigma\delta u + P\rho\delta v)$$

soit une différentielle exacte. Comme dans cette expression ne figurent que les différentielles δu, δv, il est indispensable que les coefficients de δu, δv dépendent exclusivement de u et v. Cette condition étant vérifiée pour les fonctions P, Q, il faudra qu'elle le soit pour ρ et σ.

La condition d'intégrabilité pour la différentielle précédente est

$$h'\sigma\frac{\partial Q}{\partial v} + Q\frac{\partial\sigma}{\partial v} = h\rho\frac{\partial P}{\partial u} + P\frac{\partial\rho}{\partial u}.$$

Égalons les coefficients des quantités p_i dans les deux membres; nous aurons les équations

$$(30) \qquad h'\sigma b'_i + b_i \frac{\partial \sigma}{\partial v} = h\rho a'_i + a_i \frac{\partial \rho}{\partial u}.$$

Si nous remarquons que l'on déduit des équations (29) la suivante :

$$h'\mathrm{N}\sigma = h\mathrm{M}\rho,$$

nous reconnaîtrons facilement que cette nouvelle équation sera vérifiée si l'on ajoute aux équations (30) la suivante :

$$(31) \qquad h'\sigma b' + b \frac{\partial \sigma}{\partial v} = h\rho a' + a \frac{\partial \rho}{\partial u};$$

en sorte que tout se réduit à satisfaire à la fois aux équations (30), (31), en prenant pour ρ, σ des fonctions convenables de u, v; pour les a, a_i des fonctions de u, et pour les b, b_i des fonctions de v. Quant à K, il sera donné par l'une quelconque des équations (29).

Or on peut toujours, sans diminuer la généralité, supposer que l'une des fonctions a, a_i est égale à 1 et une autre égale à u; et de même, que l'une des fonctions b, b_i est égale à 1, et l'autre égale à v. Alors deux des équations (30), (31) prennent la forme

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = \frac{\partial \rho}{\partial u},$$

$$(32) \qquad h'\sigma + v \frac{\partial \sigma}{\partial v} = h\rho + u \frac{\partial \rho}{\partial u},$$

et l'une quelconque des autres peut être écrite

$$(33) \qquad h'\sigma\beta' + \beta \frac{\partial \sigma}{\partial v} = h\rho . \alpha' + \alpha . \frac{\partial \rho}{\partial u}.$$

Nous allons considérer le système des équations (32), (33).

On en déduit, par l'élimination de σ, $\frac{\partial \sigma}{\partial v}$,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial u} = \frac{-h(\beta' - \alpha')}{\beta - \alpha + \beta'(u - v)}.$$

On peut intégrer cette équation, et l'on a

$$\rho = \mathrm{V}[\beta + \alpha + \beta'(u - v)]^{-h},$$

V étant une fonction qui dépend exclusivement de v. On obtiendrait de même

$$\sigma = U[\beta - \alpha + \alpha'(u - v)]^{-h'},$$

V étant fonction de u seulement.

Substituons ces valeurs de ρ et de σ dans l'une quelconque des équations (32); nous serons conduits à la relation

$$(34) \quad h'U[\beta - \alpha + \alpha'(u - v)]^{-h'-1} = hV[\beta - \alpha + \beta'(u - v)]^{-h-1},$$

qui devra être satisfaite identiquement.

Prenons les logarithmes des deux membres, et différentions successivement par rapport à u et v, ce qui permettra d'éliminer U et V. Nous aurons

$$(35) \quad \begin{cases} (h' + 1)\alpha''[\beta - \alpha + \alpha'(u - v)]^{-3} \\ \quad + (h + 1)\beta''[\beta - \alpha + \beta'(u - v)]^{-3} = 0. \end{cases}$$

Cette équation est absolument de la même forme que l'équation (34). Si α'' et β'' ne sont pas nuls, on peut la mettre sous la forme

$$U_1[\beta - \alpha + \alpha'(u - v)]^{-3} = V_1[\beta - \alpha + \beta'(u - v)]^{-3}.$$

En opérant sur cette équation comme nous l'avons fait sur la précédente, nous obtiendrons la relation

$$\alpha''[\beta - \alpha + \alpha'(u - v)]^{-3} + \beta''[\beta - \alpha + \beta'(u - v)]^{-3} = 0,$$

et la comparaison avec l'équation (35) nous donnerait

$$h = h'.$$

Or nous avons formellement exclu cette hypothèse, qui a déjà été considérée à l'article III. Il faut donc que α'', β'' soient nuls, et par suite α, β seront des fonctions linéaires

$$\alpha = mu + n,$$
$$\beta = m'v + n'.$$

On aura alors

$$\beta - \alpha + \alpha'(u - v) = (m' - m)v + n' - n,$$
$$\beta - \alpha + \beta'(u - v) = (m' - m)u + n' - n.$$

L'équation (34) donnera

$$\frac{h'U}{[(m'-m)u+n'-n]^{h+1}}=\frac{hV}{[(m'-m)v+n'-n]^{h'+1}}=C,$$

et les valeurs de ρ et de σ seront

$$\rho = Ch'[(m'-m)u+n'-n]^{-h}\ [(m'-m)v+n'-n]^{-h'-1},$$
$$\sigma = Ch\ [(m'-m)u+n'-n]^{-h-1}[(m'-m)v+n'-n]^{-h'}.$$

Pour que les valeurs de ρ, σ demeurent les mêmes lorsqu'on adjoint aux deux équations (32) une quelconque des équations (30) (31), il faudra prendre pour a, b, a_i, b_i des expressions de la forme

$$a_i = m_i u + n_i,\quad a = mu + n,$$
$$b_i = m'_i v + n'_i,\quad b = m'v + n',$$

avec la condition

$$\frac{m'_i - m_i}{n'_i - n_i} = k,\quad \frac{m'-m}{n'-n} = k,$$

ce qui permet de prendre

$$m'_i = m_i + kr_i,\quad m' = m + kr,$$
$$n'_i = n_i + r_i,\quad n' = n + r.$$

Alors les équations (25), (26) prennent les formes

$$B + uA = 0,$$
$$B + vA + (kv+1)C = 0,$$

où A, B, C sont des fonctions linéaires des variables. Si k est différent de zéro, on peut effectuer la substitution

$$ku + 1 = \frac{1}{u'},$$

$$kv + 1 = \frac{1}{v'},$$

qui ramène les équations précédentes à la forme

$$(36)\qquad \begin{cases} B + uA = 0, \\ C + vA = 0. \end{cases}$$

Si $k = 0$, il n'y a pas de substitution à faire pour obtenir la forme précédente.

Si nous adoptons pour déterminer u, v le système (36), le équations (32), (33) nous donnent

$$\rho = \gamma h',$$
$$\sigma = \gamma h,$$

γ étant une constante, et nous trouvons

$$K = \frac{-\gamma}{A}.$$

L'expression de $d^n f$ prend la forme

$$d^n f = -\frac{\gamma}{A^{n+1}}(A dB - B dA)^k (A dC - C dA)^{n-k},$$

et l'on reconnaît sans difficulté que l'on a

$$d^{n+1} f = -\frac{(n+1) dA}{A} d^n f.$$

Ce cas rentre dans celui que nous avons examiné à l'article I Il ne donne donc rien de nouveau.

VI.

En résumé, si nous cherchons les fonctions dont la différentie $(n+1)^{\text{ième}}$ est divisible par la différentielle $n^{\text{ième}}$, nous trouvons trois solutions suivantes,

(I) $$f = \frac{F(x_1, \ldots, x_\mu)}{P},$$

où F désigne un polynôme d'ordre n et P une fonction linéai est aisé de confirmer et d'expliquer ce premier résultat.

En effet, supposons que nous remplacions

$$x_i \quad \text{par} \quad x_i + h dx_i,$$

et que nous développions f suivant les puissances de h par mule de Taylor, appliquée aux fonctions de plusieurs varia valeur de f sera une fonction rationnelle en h,

(37) $$\frac{F(x_1 + h dx_1, \ldots, x_\mu + h dx_\mu)}{P + h dP},$$

et le développement ne se terminera pas, tant que la valeur de h

$$h = -\frac{P}{dP},$$

qui annule le dénominateur, n'annulera pas aussi le numérateur. Mais si l'on a

$$F\left(x_1 - \frac{P dx_1}{dP}, \ldots, x_\mu - \frac{P dx_\mu}{dP}\right) = 0,$$

l'expression (37) deviendra un polynôme d'ordre $n-1$ en h, et toutes les différentielles seront nulles à partir de $d^n f$. L'équation précédente, multipliée par dP^n, étant du degré n par rapport à $dx_1, \ldots, dx_\mu$, son premier membre ne pourra différer de $d^n f$ que par un facteur fonction des variables x_i. Nous voyons donc que, lorsque $d^n f$ s'annulera, il en sera de même des différentielles suivantes, et, comme $d^n f$ est en général indécomposable, ces différentielles seront toutes divisibles par $d^n f$. C'est tout ce qu'il y a à remarquer sur le premier cas.

Le second cas est celui où, n étant nécessairement pair, on a

$$\text{(II)} \qquad f = \omega^{\frac{n-1}{2}},$$

ω désignant un polynôme quelconque du second degré.

Pour expliquer ce résultat, nous remarquerons que, si l'on remplace x_i par $x_i + h dx_i$, ω prend la forme

$$\omega = A + 2Bh + Ch^2,$$

et l'on a

$$(37) \qquad (A + 2Bh + Ch^2)^{\frac{n-1}{2}} = f + h df + \frac{h^2}{2} d^2 f + \ldots.$$

Le premier membre ne devient une fonction entière que si l'on a

$$B^2 - AC = 0,$$

et alors cette fonction entière est du degré $n-1$. Donc, lorsque l'équation précédente est vérifiée, toutes les différentielles de f sont nulles à partir de la $n^{\text{ième}}$. Mais ce résultat est incomplet, et il prouve seulement que $d^n f$ contient $B^2 - AC$ en facteur. Il faut prouver que $d^n f$ est une puissance exacte de $B^2 - AC$, et que les différentielles suivantes sont divisibles par $d^n f$.

Pour cela, posons

$$B = -x\sqrt{AC}, \quad h\sqrt{C} = u\sqrt{A}.$$

Le développement (37) prendra la forme

$$(1 - 2ux + u^2)^{\frac{n-1}{2}} = fA^{\frac{1-n}{2}} + \ldots + \frac{u^p}{1.2\ldots p} \frac{A^{\frac{p+1-n}{2}}}{C^{\frac{p}{2}}} d^p f.$$

Si donc on pose

$$d^p f = 1.2.3\ldots p.C^{\frac{p}{2}} A^{\frac{n-p-1}{2}} X_p,$$

on aura

$$(1 - 2ux + u^2)^{\frac{n-1}{2}} = X_0 + X_1 u + \ldots + X_p u^p + \ldots,$$

et l'on sait que X_p sera un polynôme dépendant de x et satisfaisant à l'équation différentielle

$$(38) \quad (x^2 - 1)\frac{d^2 X_p}{dx^2} + (2 - n)x\frac{dX_p}{dx} + p(n - p - 1)X_p = 0.$$

On sait aussi que trois polynômes consécutifs sont reliés par l'équation

$$(39) \quad (p+1)X_{p+1} - x(2p + 1 - n)X_p + (p - n)X_{p-1} = 0.$$

Cela posé, pour $p = n$, le polynôme satisfaisant à l'équation (38) est une puissance parfaite

$$C(x^2 - 1)^{\frac{n}{2}},$$

et de plus l'équation (39) nous montre que X_{n+1} sera divisible par X_n, et par conséquent aussi X_{n+2} et tous les polynômes suivants. Nous avons donc la vérification complète du résultat obtenu.

Il nous reste à examiner la troisième solution. La fonction u étant définie par l'équation

$$x_1\varphi_1(u) + \ldots + x_\mu\varphi_\mu(u) + \varphi(u) = 0,$$

on a

$$(\text{III}) \qquad f = \int_0^u \psi(u)(x_1\varphi_1 + \ldots + x_\mu\varphi_\mu + \varphi)^{n-1} du.$$

On déduit de là facilement

$$\frac{d^p f}{(n-1)\ldots(n-p)}$$
$$= \int_0^u \psi(u)(x_1\varphi_1 + \ldots + x_\mu\varphi_\mu + \varphi)^{n-p-1}(\varphi_1 dx_1 + \ldots + \varphi_\mu dx_\mu)^p du.$$

pour p inférieur à n. Pour $p = n$ on a

$$d^n f = -\frac{\Gamma(n+1)(\varphi_1 dx_1 + \ldots + \varphi_\mu dx_\mu)^n \psi(u)}{x_1\varphi'_1 + \ldots + x_\mu\varphi_\mu + \varphi'},$$

et l'on vérifiera aisément que $d^{n+1}f$ est divisible par $d^n f$. Je donnerai quelques exemples relatifs à ce cas, en me bornant au cas de deux variables indépendantes.

On a alors

$$xf(u) + y\varphi(u) + \psi(u) = 0.$$

Supposons d'abord $n = 1$, et désignons par z la fonction cherchée; nous aurons

$$z = \int_0^u \psi(u)\,du;$$

donc u sera une fonction de z, et x, y, z seront reliés par une équation de la forme

$$x\mathrm{F}(z) + y\Phi(z) + 1 = 0.$$

Cette équation représente les surfaces cylindroïdes, engendrées par le mouvement d'une droite parallèlement à un plan.

Faisons ensuite $n = 2$, nous aurons

$$z = \int_0^u \psi(u)[xf(u) + y\,\varphi(u) + \psi(u)]\,du.$$

Si l'on pose

$$\int_0^u \theta f du = \mathrm{F}\int_0^u \theta\varphi du = \Phi\int_0^u \theta\psi du = \chi,$$

la surface sera définie par les deux équations

$$z = x\mathrm{F}(u) + y\Phi(u) + \chi(u),$$
$$0 = x\mathrm{F}'(u) + y\Phi'(u) + \chi'(u);$$

c'est la surface développable la plus générale.

On peut dire qu'une surface développable est caractérisée par la propriété que les droites, ayant en un point avec elle le contact le plus élevé possible, soient confondues. On verra de même que la surface correspondante au cas général est caractérisée par la pro-

priété que, en chaque point, les paraboles

$$mx + ny + h = 0,$$
$$z = \alpha + \beta x + \ldots + \gamma x^{n-1},$$

ayant avec elle le contact de l'ordre le plus élevé, sont toutes confondues.

VII.

Nous allons, en terminant, généraliser la remarque de M. Hermite et montrer l'extension dont les recherches précédentes seraient susceptibles. Considérons d'abord une fonction entière u du troisième degré de μ variables, et posons

$$f = \sqrt[3]{u}.$$

Si l'on remplace x_i par $x_i + h\,dx_i$, le polynôme u deviendra du troisième degré en h, f prendra la forme

$$\sqrt[3]{A + Bh + Ch^2 + Dh^3},$$

et ce radical aura pour développement

$$f + h\,df + \frac{h^2}{2} d^2 f + \frac{h^3}{6} d^3 f + \ldots . \tag{40}$$

Je dis que, si l'on a choisi les différentielles dx_i de manière à satisfaire aux deux équations

$$d^2 f = 0, \quad d^3 f = 0,$$

toutes les différentielles suivantes $d^4 f$, ... seront nulles.

En effet, si l'on élève au cube le développement (40), on doit retrouver la quantité sous le radical. Mais, dans cette élévation aux puissances, on peut négliger les termes qui contiennent h^4 en facteur. On aura donc

$$A + Bh + Ch^2 + Dh^3 = (f + h\,df)^3;$$

donc le radical sera une fonction linéaire de h, et par conséquent, dans le développement (40), $d^4 f$ et les différentielles suivantes seront nulles dès que $d^2 f$, $d^3 f$ le seront. Cette proposition montre

qu'il existe des relations identiques de la forme

$$(41)\qquad \begin{cases} d^4 f = A\, d^2 f + B\, d^3 f, \\ d^5 f = A' d^2 f + B' d^3 f, \end{cases}$$

qui se ramèneront toutes d'ailleurs à la première. A et B contiennent évidemment les différentielles dx_i, A étant du second degré et B du premier degré par rapport à ces différentielles.

Considérons de même un polynôme v du quatrième degré et l'expression

$$f = \sqrt{v}.$$

Si l'on remplace x_i par $x_i + h\,dx_i$, v deviendra un polynôme du quatrième degré en h, dont le développement sera de la forme

$$f + h\,df + \frac{h^2}{2} d^2 f + \ldots.$$

Si l'on a

$$d^3 f = 0, \quad d^4 f = 0,$$

v deviendra un carré parfait, comme l'on s'en assure encore en élevant la série au carré. On sera donc conduit, en répétant le raisonnement précédent, à une équation de la forme

$$(42)\qquad d^5 f = A d^3 f + B d^4 f,$$

qui entraînera les suivantes :

$$d^{5+n} f = A_n d^3 f + B_n d^4 f.$$

Laissant de côté ces exemples particuliers, qu'il serait facile de multiplier, considérons maintenant d'une manière générale une fonction algébrique z, définie par une équation

$$(43)\qquad f(z_1 x_1, \ldots, x_\mu) = 0,$$

qui soit du degré m par rapport à toutes les variables. Je dis qu'il existera entre les différentielles de z des relations de la forme

$$(44)\qquad \begin{cases} d^{m+1} z = A_1 d^m z + A_2 d^{m-1} z + \ldots + A_{m-1} d^2 z, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ d^{m+p} z = A_1^p d^m z + \ldots \qquad\qquad + A_{m-1}^p d^2 z, \end{cases}$$

la première donnant les suivantes par la différentiation.

En effet, supposons que l'on différentie $m+1$ fois l'équation (43), en regardant $dx_1, dx_2, \ldots, dx_\mu$ comme des constantes; on obtiendra

une équation de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial z} d^{m+1} z + \mathrm{A} = 0,$$

où A est une somme de termes de la forme

$$a x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_\mu^{\alpha_\mu} z^\beta (dx_1)^{\alpha'_1} \ldots (dx_\mu)^{\alpha'_\mu} (dz)^{\beta_1} (d^2 z)^{\beta_2} \ldots (d^m z)^{\beta_m},$$

les exposants des différents facteurs satisfaisant aux deux conditions

$$\alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_\mu + \beta + \alpha'_1 + \ldots + \alpha'_\mu + \beta_1 + \ldots + \beta_m \overline{\overline{<}} m,$$
$$\alpha'_1 + \ldots + \alpha'_\mu + \beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + m\beta_m = m + 1.$$

On déduit de là, par soustraction, l'inégalité

$$\beta_2 + 2\beta_3 + \ldots + (m-1)\beta_m \geqq \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\mu + \beta + 1.$$

Il est donc impossible que les exposants β_2, β_3, ..., β_m soient tous nuls, et par conséquent chacun des termes de A contient l'une des différentielles $d^m z$, $d^{m-1} z$, ..., $d^2 z$. On peut donc écrire

$$d^{m+1} z = \mathrm{A}_1 d^m z + \ldots + \mathrm{A}_{m-1} d^2 z,$$

A_i étant une fonction homogène entière d'ordre i des différentielles dx_i. C'est la proposition qu'il s'agissait d'établir.

Dans le cas où $m = 2$, on a

$$d^3 z = \mathrm{A} d^2 z;$$

si $m = 3$, on aura

$$d^4 z = \mathrm{A} d^3 z + \mathrm{B} d^2 z,$$

et ainsi de suite.

L'équation

$$d^{m+1} z = \mathrm{A}_1 d^m z + \ldots + \mathrm{A}_{m-1} d^2 z \tag{45}$$

équivaut à autant de relations entre les dérivées de z et les coefficients des fonctions A_i qu'il y a de termes dans $d^{m+1} z$, c'est-à-dire à

$$\frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+m)}{1.2\ldots(m+1)}$$

équations. D'ailleurs, les coefficients arbitraires des fonctions A_i

sont au nombre de

$$\frac{(\mu+1)\ldots(\mu+m-1)}{1.2\ldots(m-1)}-1.$$

L'équation (45) exprimera réellement une propriété de la fonction z; elle conduira à des équations existant uniquement entre les dérivées de cette fonction, toutes les fois que le nombre des équations sera supérieur à celui des coefficients arbitraires, c'est-à-dire lorsqu'on aura

$$\frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+m)}{1.2\ldots(m+1)}>\frac{(\mu+1)\ldots(\mu+m-1)}{1.2\ldots(m-1)}-1,$$

ou

$$(46)\qquad \mu^2+\mu m \geqq m^2+m.$$

Ainsi, dès que le nombre μ des variables sera supérieur à la limite définie par cette inégalité, limite qui est évidemment plus petite que m, on sera assuré que l'équation (45) conduira, par l'élimination des arbitraires, à des équations aux dérivées partielles auxquelles devra satisfaire la fonction z.

Par exemple, dans le cas où $m=2$, il est clair que l'équation

$$d^3z=\mathrm{A}d^2z$$

n'exprime aucune propriété de z si z dépend d'une seule variable. Mais si μ est supérieur à 1, elle conduit à

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu+4)}{1.2.3}$$

équations du troisième ordre pour z.

De même, pour $m=3$, $m=4$, le nombre μ des variables doit être au moins égal à 3.

Mais il serait impossible de continuer ainsi en prenant pour base unique l'inégalité (46).

En effet, il est aisé de montrer que toutes les arbitraires entrant dans les polynômes A_i ne sont pas réellement distinctes et que l'on peut égaler à zéro quelques-uns des coefficients sans diminuer la généralité du second membre de l'équation (45).

Supposons, par exemple, que m soit égal à 4. L'égalité (45)

deviendra

$$(47) \qquad d^5 z = A_1 d^4 z + A_2 d^3 z + A_3 d^1 z,$$

et elle peut évidemment s'écrire

$$d^5 z = A_1 d^4 z + (A_2 + B_0 d^2 z) d^3 z + (A_3 - B_0 d^3 z) d^1 z,$$

B_0 désignant une constante. Remplaçons maintenant $d^3 z$ par son expression et disposons de B_0 de manière à annuler un des coefficients de $A_3 - B_0 d^3 z$; nous retrouverons l'équation (47), mais avec un terme de moins dans A_3.

D'une manière générale, désignons par $\theta(m, \mu)$ le nombre des coefficients arbitraires réellement distincts contenus dans le second nombre de l'équation (45); l'inégalité à laquelle devra satisfaire μ pour chaque valeur de m sera

$$(47) \qquad \frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+m)}{1.2\ldots(m+1)} > \theta(m, \mu).$$

Nous indiquerons dans la Note qui termine ce Mémoire comment on peut déterminer $\theta(m, \mu)$.

Mais on peut encore généraliser et rendre plus précise la proposition que nous venons de démontrer relativement aux fonctions algébriques. Considérons, en effet, une telle fonction définie par une équation de degré m,

$$f(z, x_1, \ldots, x_\mu) = 0.$$

Il est aisé de démontrer qu'il existera, entre les différentielles totales de z, les deux relations

$$A_\rho d^m z = A_{\rho+1} d^{m-1} z + \ldots + A_{\rho+m} z,$$
$$B_\nu d^{m+1} z = B_{\nu+1} d^m z + \ldots + B_{\nu+m-1} d^2 z,$$

où A_i, B_i désignent des polynômes homogènes en $dx_1, \ldots, dx_\mu$, d'un degré marqué par leurs indices; mais de plus *les coefficients de ces polynômes sont des fonctions rationnelles de* $x_1, \ldots, x_\mu$. On a généralement pour ρ et ν les valeurs

$$\rho = \frac{m(m-1)}{2}, \quad \nu = \frac{(m+2)(m-1)}{2}.$$

Cette proposition se déduit aisément de celles que l'on connaît relativement aux fonctions d'une seule variable définies par une

équation algébrique. Elle se rattache d'ailleurs indirectement à l'objet de ce Mémoire, et son étude m'entraînerait loin du problème que j'avais en vue. Je me contenterai donc d'ajouter à ce qui précède l'énoncé suivant :

Il y a toujours entre la fonction z et m quelconques de ses dérivées, ou entre $m+1$ dérivées de z, une relation linéaire et homogène dont les coefficients sont des fonctions entières des variables indépendantes. De plus, si parmi les quantités choisies se trouve une seule des fonctions

$$z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_\mu},$$

le coefficient de cette fonction dans la relation linéaire est nul.

En d'autres termes : *Quand toutes les dérivées sont au moins du second ordre, la relation a lieu entre m dérivées seulement. J'ajoute qu'il sera toujours possible de choisir dans cet ensemble de relations un certain nombre d'entre elles dont toutes les autres se déduiront par différentiation et élimination, et dont la solution commune se composera uniquement des diverses branches de la fonction z.*

Note sur une fonction numérique.

Considérons des fonctions homogènes et entières de μ variables

$$u_m, \quad u_{m-1}, \quad \ldots, \quad u_{m-p};$$

formons, avec des polynômes homogènes tout à fait arbitraires, d'ordre marqué par leur indice,

$$A_0, \quad A_1, \quad \ldots, \quad A_p,$$

la somme

$$(1) \qquad A_0 u_m + A_1 u_{m-1} + \ldots + A_p u_{m-p},$$

et proposons-nous de rechercher combien le polynôme d'ordre m, ainsi formé, contient de coefficients réellement arbitraires. Nous désignerons ce nombre par $\varphi(m, p)$. La fonction $\theta(m, \mu)$, que nous avons considérée à la fin de ce travail, se rattache évidemment à la

fonction $\varphi(m, p)$ par l'égalité

$$(2) \qquad \psi(m, \mu) = \varphi(m-1, m-1) - 1.$$

Par suite, si l'on connaît l'expression générale de $\varphi(m, p)$, on pourra en déduire celle de la fonction ψ. Nous allons voir qu'on peut exprimer φ au moyen de la fonction

$$N(p, \mu),$$

qui donne le nombre des coefficients dans un polynôme homogène d'ordre p à μ variables. On a, comme on sait,

$$N(p, \mu) = \frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+p-1)}{1.2\ldots p} = \frac{(p+1)\ldots(\mu+p-1)}{1.2\ldots(\mu-1)}.$$

Nous conviendrons de rendre nulle la fonction N toutes les fois que p sera négatif. Elle est ainsi définie pour toutes les valeurs entières de p.

En ce qui concerne la fonction $\varphi(m, p)$, on a évidemment

$$(3) \qquad \begin{cases} \varphi(m, 0) = 1, \\ \varphi(m, 1) = N(1, \mu+1) = \mu+1. \end{cases}$$

Nous conviendrons également de poser

$$(4) \qquad \varphi(m, p) = 0$$

dans le cas où, p étant négatif, la fonction n'aurait plus de sens.

Ces remarques une fois faites, nous allons établir une relation entre les fonctions φ et N.

Dans l'expression (1), nous pouvons évidemment substituer à A_p le polynôme

$$(5) \qquad A'_p = A_p - u_{m-p-1} B_{2p-m-1} - \ldots - B_0 u_p$$

(où les B_i sont des polynômes arbitraires d'un degré marqué par leurs indices, et que l'on supprimera quand cet indice deviendra négatif), à la condition de remplacer A_{p+q} par

$$A'_{p+q} = A_{p+q} + u_{m-p} B_{2p+q-m},$$

et l'expression (1) prendra la nouvelle forme

$$(5) \qquad A'_0 u_m + \ldots + A'_p u_{m-p}.$$

Nous pouvons la décomposer en deux parties : l'une, formée des p premiers termes, toute semblable à l'expression primitive où l'on aurait changé p en $p-1$, et qui, par conséquent, contiendra $\varphi(m, p-1)$ coefficients arbitraires; l'autre, composée du dernier terme $A'_p u_{m-p}$, A'_p étant donné par l'équation (5).

A'_p se forme en retranchant de A_p une fonction

$$u_{m-p+1} B_{2p-m+1} + \ldots + B_0 u_p,$$

qui contient $\varphi(p, 2p-m-1)$ coefficients réellement distincts. On peut disposer de ces coefficients de manière à annuler un nombre égal de coefficients de A'_p, qui sera ainsi ramené à ne contenir que

$$N(p, \mu) - \varphi(p, 2p-m-1)$$

coefficients arbitraires. On a donc l'équation

$$(7) \qquad \varphi(m,p) = \varphi(m, p-1) + N(p, \mu) - \varphi(p, 2p-m-1),$$

qui, jointe aux formules (3) et (4), va suffire à la détermination de φ.

Toutes les fois que l'on aura

$$(8) \qquad p < \frac{m+1}{2},$$

on aura aussi

$$\varphi(p, 2p-m-1) = 0,$$

et, par conséquent, l'équation (7) se réduira à

$$\varphi(m,p) = \varphi(m, p-1) + N(p, \mu).$$

Changeons p en $p-1$, $p-2$, ..., ce qui est permis, puisque p ne cessera de satisfaire à l'inégalité (8), et ajoutons toutes les équations ainsi obtenues; nous trouverons

$$\varphi(m,p) = N(p, \mu) + N(p-1, \mu) + \ldots,$$

ou

$$\varphi(m,p) = N(p, \mu+1).$$

Si nous introduisons la nouvelle fonction φ, définie par l'éga-

on aura donc

$$(10)\qquad \varphi_1(m,p)=0 \quad \text{pour} \quad p<\frac{m+1}{2}.$$

Remplaçons, dans l'égalité (7), φ par son expression en φ_1; elle deviendra

$$(7^a)\quad \begin{cases} \varphi_1(m,p) \\ \quad =\varphi_1(m,p-1)-\varphi_1(p,2p-m-1)-\mathrm{N}(2p-m-1,\mu+1). \end{cases}$$

En vertu de l'équation (10), appliquée à $\varphi_1(p,\,2p-m-1)$, on aura

$$\varphi_1(p,2p-m-1)=0.$$

toutes les fois que p satisfera à l'inégalité

$$2p-m-1<\frac{p+1}{2}$$

ou

$$(8^a)\qquad p<\frac{2m}{3}+1.$$

Dès que cette condition rélative à p sera remplie, l'équation (7^a) se réduira à la suivante :

$$\varphi_1(m,p)=\varphi_1(m,p-1)-\mathrm{N}(2p-m-1,\mu+1).$$

Ici encore on peut changer p en $p-1$, ... et ajouter les égalités obtenues, ce qui donnera

$$\varphi_1(m,p)=-\sum_{q=0}\mathrm{N}(2p-m-1-2q,\mu+1),$$

la somme devant être prolongée jusqu'à ce que l'argument de N devienne négatif. Si donc on pose, pour abréger,

$$\mathrm{N}_1(h)=-\sum_{q=0}\mathrm{N}(h-2q,\mu+1),$$

on pourra écrire

$$\varphi_1(m,p)=\mathrm{N}_1(2p-m-1)+\varphi_2(m,p),$$

et l'on aura

$$(10^a)\qquad \varphi_2(m,p)=0 \quad \text{pour} \quad p<\frac{2m}{3}-1.$$



En répétant indéfiniment la série des raisonnements que nous venons de faire, on sera conduit, on le reconnaîtra aisément, au résultat suivant.

Définissons les fonctions suivantes :

$$(11)\quad \begin{cases} N_1(h) = -\sum_{q=0} N(h-2q, \mu+1), \\ N_2(h) = -\sum_{q=0} N_1(h-3q), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ N_i(h) = -\sum_{q=0} N_{i-1}[h-(i+1)q], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

q prenant toutes les valeurs entières et positives pour lesquelles l'argument des fonctions N_i est positif; on aura

$$(12)\quad \begin{cases} \varphi(m,p) = N(p, \mu+1) \\ \qquad + N_1(2p-m-1) + N_2(3p-2m-3) + \dots \\ \qquad + N_i\left[(i+1)p - im - \dfrac{i(i+1)}{2}\right] + \dots, \end{cases}$$

la somme étant prolongée jusqu'à ce que l'argument de la fonction N_i devienne négatif. Comme on déduit aisément des formules (11)

$$N_i(h) = (-1)^i \Sigma\Sigma\Sigma\dots N[h - 2q_2 - 3q_3 - \dots - (i+1)q_{i+1}, \mu+1],$$

on voit que l'on pourra prendre aussi pour l'expression générale de $\varphi(m,p)$

$$(13)\quad \begin{cases} \varphi(m,p) \\ \quad = \Sigma\Sigma\Sigma\dots(-1)^i N\left[(i+1)p - im - \dfrac{i(i+1)}{2}\right. \\ \qquad\qquad \left. - 2q_2 - 3q_3 - \dots - (i+1)q_{i+1}, \mu+1\right], \end{cases}$$

la somme étant étendue à toutes les valeurs entières, positives ou nulles, de $i, q_2, \dots, q_{i+1}$ pour lesquelles l'argument de N est positif. Par conséquent cette somme se composera d'un nombre fini de termes.

Il suit de là que l'on peut écrire

$$(14)\quad \varphi(m,p) = \Sigma H(\alpha) N(p-\alpha, \mu+1),$$

α étant entier et positif ou nul, et $H(\alpha)$ étant une fonction numérique que l'on peut définir comme il suit.

Considérons toutes les solutions possibles de l'équation

$$\alpha = i(m-p) + \frac{i(i+1)}{2} + 2q_2 + 3q_3 + \ldots + (i+1)q_{i+1},$$

où $i, q_2, \ldots q_{i+1}$ sont des entiers positifs ou nuls. $H(\alpha)$ sera l'excès du nombre de ces solutions pour lesquelles i est pair sur le nombre de celles pour lesquelles i est impair.

Il suit de là, d'après les principes de la partition des nombres, que, si l'on considère la fonction

$$f(x) = \Sigma H(\alpha) x^\alpha,$$

elle aura pour expression

$$(15) \qquad f(x) = \sum_{i=0}^{i=\infty} (-1)^i \frac{x^{i(m-p)+\frac{i(i+1)}{2}}}{(1-x^2)\ldots(1-x^i)},$$

le produit $(1-x^2)\ldots(1-x^i)$ devant être remplacé par 1 pour $i=0$. Cette propriété va nous permettre de déterminer $H(\alpha)$.

En effet, dans l'équation bien connue

$$(1+xz)(1+x^2z)\ldots = 1 + \frac{xz}{1-x} + \frac{x^3z^2}{(1-x)(1-x^2)} + \ldots + \frac{x^{\frac{i(i+1)}{2}}z^i}{(1-x)\ldots(1-x^i)},$$

faisons $z = -x^{m-p-1}$; nous obtiendrons la formule

$$\prod_{\mu=0}^{\mu=\infty}(1-x^{m-p+\mu}) = 1 - \frac{x^{m-p}}{1-x} + \ldots + (-1)^{i+1}\frac{x^{\frac{i(i+1)}{2}+i(m-p)}}{(1+x)\ldots(1-x^{i+1})} + \ldots,$$

et, si nous comparons au développement de $f(x)$, donné par la formule (15), nous trouverons

$$\frac{x^{m-p}f(x)}{1-2} = 1-(1-x^{m-p})(1-x^{m-p+1})\ldots.$$

C'est l'équation que nous voulions obtenir. On peut encore la mettre sous la forme

$$(16)\quad \Sigma\,\mathrm{H}(\alpha)x^{\alpha+m-p} = 1 - x - \frac{\prod_{\mu=1}^{\mu=\infty}(1-x^{\mu})}{(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^{m-p-1})}.$$

On connaît la belle formule d'Euler

$$\prod_{\mu=1}^{\mu=\infty}(1-x^{\mu}) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \ldots$$
$$= \Sigma(-1)^n x^{\frac{3n^2 \pm n}{2}}.$$

Il ne reste plus qu'à développer le quotient

$$\frac{1}{(1-x^2)\ldots(1-x^{m-p-1})},$$

ce qui ne saurait offrir de difficulté.

Le cas particulier qui nous intéresse surtout est celui où l'on a $m - q = 2$. Nous aurons alors

$$\Sigma\,\mathrm{H}(\alpha)x^{\alpha+2} = 1 - x - (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots,$$

ou, en employant le développement d'Euler

$$\Sigma\,\mathrm{H}(\alpha)x^{\alpha+2} = x^2 - x^5 - x^7 + x^{12} + x^{15} - x^{22} - x^{26} + \ldots,$$

équation qui détermine $\mathrm{H}(\alpha)$. On en conclut

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(m, m-2) = \mathrm{N}(m-2, \mu+1) &- \mathrm{N}(m-5, \mu+1)\\ &- \mathrm{N}(m-7, \mu+1) + \mathrm{N}(m-12, \mu+1)\\ &+ \mathrm{N}(m-15, \mu+1) - \ldots, \end{aligned}\right.$$

le terme général étant

$$(-1)^{n-1}\mathrm{N}\left(m - \frac{3n^2 \pm n}{2}, \mu+1\right).$$

La formule (7) nous donne, d'ailleurs,

$$\varphi(m, m-1) = \varphi(m, m-2) + \mathrm{N}(m-1, \mu) - \varphi(m-1, m-3),$$
$$\varphi(m, m) \quad = \mathrm{N}(m, \mu).$$

Toutes les autres valeurs de $\varphi(m,p)$ se déduiront du développement (16).

De l'expression de $\varphi(m, m-2)$ on déduit facilement celle de la fonction θ définie par la formule (2)

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} 1+\theta(m,p) = \mathrm{N}(m-1, \mu+1) - \mathrm{N}(m-4, \mu+1) \\ \quad - \mathrm{N}(m-6, \mu+1) + \mathrm{N}(m-11, \mu+1) + \ldots . \end{array}\right.$$

Nous pouvons maintenant apprécier les différences des valeurs fournies par les inégalités (46) et (47), qui font connaître des limites inférieures pour μ lorsque m est donné. Voici ces valeurs pour les 10 premiers degrés :

Valeurs de m.	Valeurs de μ données par l'inégalité (46).	Valeurs exactes de μ données par l'inégalité (47).
2	2	2
3	3	3
4	3	3
5	4	4
6	5	4
7	5	5
8	6	5
9	6	5
10	7	6

Je ferai remarquer, en terminant, que l'on déduit de la formule (16) l'expression suivante de $\varphi(m, p)$:

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi(m,p) = \Sigma\mathrm{N}(m-i, \mu) - \Sigma\Sigma\mathrm{N}(m-i-k, \mu) \\ \qquad + \Sigma\Sigma\Sigma\mathrm{N}(m-i-k-l, \mu) - \ldots, \end{array}\right.$$

où les sommes sont étendues à toutes les valeurs différentes de $i, k, l, \ldots$, comprises dans la suite

$$m,\ m-1,\ \ldots,\ m-p.$$

Réciproquement, on pourrait démontrer d'une manière directe la formule (18) et en déduire les résultats qui précèdent.



COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

In memoriam Dominici Chelini Collectanea Mathematica, nunc primum edita cura et studio L. CREMONA et E. BELTRAMI. — 1 vol. in-8°, 424 p. Milan, 1881.

MM. Cremona et Beltrami ont eu la pensée touchante d'élever à la mémoire du P. Chelini un monument scientifique digne de lui; répondant à leur appel, les mathématiciens de l'Europe entière, les membres de la famille intellectuelle de Chelini sont venus former un pieux cortège d'admirateurs et d'amis; ils ont signé les pages d'un livre qui honorera longtemps la mémoire de ce savant si distingué et si modeste, de ce professeur si éminent.

C'est M. Beltrami qui s'est chargé de retracer la vie de Chelini, toute simple et comme cachée, et d'en résumer les œuvres.

Dominico Chelini naquit à Gragnano, le 18 octobre 1802; il termina ses études, en 1826, au collège de Nazareth, et fut consacré prêtre l'année suivante. Pendant vingt années (1831-1851), il enseigna, dans ce même collège, les Mathématiques, qu'il avait étudiées seul. En 1843, il fit la connaissance de Jacobi, venu à Rome pour des raisons de santé avec Lejeune-Dirichlet, Steiner, Schlaefli et Borchardt; il ne pouvait manquer d'acquérir l'estime et l'amitié du grand géomètre et de ses célèbres compagnons.

Nommé professeur de Mécanique et d'Hydraulique en 1851, à l'Université de Bologne, il occupa cette chaire jusqu'en 1860; le gouvernement nouveau montra, à son égard, une certaine tolérance; à la vérité, Chelini fut tout d'abord destitué, mais il fut réintégré immédiatement dans sa chaire, comme professeur extraordinaire et délivré de l'obligation de prêter un serment que sa conscience de prêtre lui interdisait; malheureusement, ces dispositions libérales, si justifiées par le caractère de l'homme qu'elles regardaient et par son talent, ne durèrent pas; en 1864, le ministère crut devoir exiger de lui le serment: Chelini refusa et fut destitué. En 1867, il fut chargé, à l'Université Romaine, de l'enseignement de la Mécanique rationnelle; quatre ans plus tard, Rome étant devenue capitale de l'Italie, il dut quitter sa chaire.

Il avait été nommé membre de l'Académie des Nuovi Lincei en 1847, de l'Académie de Bologne en 1854, de la Société Italienne des XL en 1863.

Chelini est mort en 1879.

M. Beltrami classe les travaux de Chelini en quatre groupes : Géométrie analytique, Théorie des surfaces, Mécanique, Mémoires divers.

Chelini s'est particulièrement occupé de la théorie des projections et de la composition des droites, des aires et des points ; il a exposé ses vues d'une façon systématique dans les deux beaux Mémoires intitulés : *Sulla composizione geometrica dei sistemi di rette, di aree e di punti; Sulla nuova geometria dei complessi.* Nous ne pouvons que renvoyer le lecteur à l'excellente analyse que M. Ruffini en a donnée dans le *Giornale di Matematiche* et que le *Bulletin* a reproduite (1re série, t. VII, p. 241) (¹).

L'*Interpretazione geometrica di formole essenziali alle scienze dell' estensione, del moto e delle forze* se rapporte, comme le titre l'indique, à des considérations du même ordre.

Dans le *Saggio di Geometria analitica trattata con nuovo metodo* et dans le Mémoire intitulé (²) : *Sull' uso sistematico dei principî relativi al metodo delle coordinate rettilinee,* Chelini a développé en particulier une idée due à Cauchy et qui devrait avoir pénétré entièrement dans l'enseignement classique de la Géométrie analytique : elle consiste à adjoindre au trièdre des coordonnées (obliques) le trièdre supplémentaire ; la dépendance entre les deux systèmes de coordonnées tient à la dépendance entre la forme quadratique qui donne le carré de la distance d'un point à l'origine et la forme adjointe; grâce à l'emploi de ces deux trièdres, qui s'impose d'ailleurs lorsqu'on se sert de coordonnées rectilignes ou orthogonales, les formules deviennent élégantes et symétriques.

Le Mémoire intitulé : *Sopra alcuni punti notabili nella teoria elementare dei tetraedri e delle coniche* contient une solution nouvelle et simple du problème de Lagrange ; d'autres travaux ont

(¹) *Voir* aussi dans le *Bulletin*, t. IV, p. 348.
(²) *Voir* le *Bulletin*, t. VII, p. 125.



contribué au développement et à la diffusion des découvertes de Chasles et de Möbius.

A propos du Mémoire *Sulla curvatura delle linee e delle superficie,* où Chelini a développé des propositions de la Géométrie des lignes et des surfaces qui sont indépendantes des vues de Gauss, M. Beltrami insiste avec raison sur la simplicité de la considération suivante, qui, dit-il, mériterait d'entrer dans tous les traités et qui peut servir de point de départ à la théorie ordinaire de la courbure, indépendamment de toute hypothèse sur le choix des axes. En désignant par X, Y, Z les cosinus directeurs de la normale à une surface et par S l'arc d'une ligne quelconque tracée sur cette surface, on a

$$X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}=0,$$

d'où, en différentiant par rapport à s,

$$X\frac{d^2x}{ds^2}+Y\frac{d^2y}{ds^2}+Z\frac{d^2z}{ds^2}=\frac{\cos\theta}{\rho}=-\left(\frac{dX}{ds}\frac{dx}{ds}+\cdots\right),$$

où ρ désigne le rayon de courbure et θ l'angle qu'il fait avec la normale à la surface; or le second membre conserve la même valeur pour toutes les courbes qui passent par le même point et y ont la même tangente.

Chelini publia ensuite les *Dimostrazioni geometriche delle trasformazioni degli integrali multipli relativi alle superficie ed ai volumi*, les *Teoremi relativi alle linee di curvatura e geodetiche sopra i paraboloidi*, la *Determinazione geometrica in coordinate ellittiche degli elementi* ds_1, ds_2, ds_3 *delle tre linee d'intersezione* s_1, s_2, s_3 *secondo cui si intersecano in un punto tre superficie ortogonali di secondo grado;* puis, dans un travail étendu (*Di alcuni teoremi di Gauss relativi alle superficie curve*), il fit connaître en Italie les résultats des admirables *Disquisitiones generales circa superficies curvas,* non sans y ajouter plusieurs propositions originales. Le *Memoria sulle formole fondamentali riguardanti la curvatura delle superficie e delle linee* contient l'application aux coordonnées curvilignes des formules relatives aux deux trièdres supplémentaires, la transformation générale de l'équation de Laplace, l'établissement des

formules relatives à la courbure des surfaces d'un système triple ; enfin, dans la *Teoria delle coordinate curvilinee nello spazio e nelle superficie,* Chelini a développé d'une façon complète et systématique ses recherches antérieures et les résultats essentiels de cette partie de la science.

L'un des plus beaux travaux de Chelini sur la Mécanique rationnelle est cette *Determinazione analitica della rotazione dei corpi liberi secondo i concetti del sig. Poinsot,* dont M. Hermite a pu dire qu'on y trouve développées « pour la première fois les conséquences analytiques de la belle théorie de Poinsot, que son auteur ni personne n'avait encore données d'une manière aussi approfondie ([1]) ». Malgré sa modestie, Chelini a dû sentir le prix singulier de cet éloge que lui donnait, dix-huit ans après la publication de son travail, celui qui portait au rare degré de perfection que l'on sait la théorie du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

Des intégrales, des forces vives et des aires, Chelini déduit l'équation de la projection de la polodie sur un plan principal de l'ellipsoïde central, projection qui est une ellipse ; introduisant ensuite l'*anomalie excentrique* φ de la projection du pôle instantané, il exprime au moyen de cet angle les composantes p, q, r, et la vitesse angulaire ω ; la relation entre ω et t donne φ en fonction elliptique du temps.

Peu après la publication de ce Mémoire, Chelini donnait les *Elementi di Meccanica razionale con Appendice sui principi fondamentali delle Matematiche,* etc., puis un Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes. Le travail intitulé *Dei moti geometrici e loro leggi nello spostamento d'una figura di forma invariabile* est relatif aux déplacements finis. Dans le Mémoire *Dell'uso delle coordinate obliquangole nella determinazione dei momenti d'inerzia*, l'auteur montre comment on peut, dans certains cas, se débarrasser de l'hypothèse de l'orthogonalité des axes. Les derniers travaux de Chelini regardent principalement la théorie des axes permanents et des centres de percussion : *Sulle proprietà geometriche e dinamiche dei centri di percossa nei*

([1]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 24 décembre 1877.

moti di rotazione. — Intorno ai principî fondamentali della dinamica con applicazioni al pendolo ed alla percussione dei corpi secondo POINSOT (¹).

On le voit par cette rapide analyse, Chelini a surtout cherché à faire œuvre d'enseignement; il a montré dans cette œuvre assez de force d'esprit pour qu'on soit assuré qu'il n'eût pas moins réussi en se consacrant tout entier à des recherches originales; mais, ainsi que le dit M. Beltrami, « il est bon que, dans la science et dans toutes les activités humaines, chaque intelligence s'applique à sa manière, quand elle est saine et robuste ». Sans doute la joie mêlée de modestie, que ressentait Chelini en faisant briller de toute leur lumière et de toute leur beauté des vérités déjà conquises, était aussi vive que celle qu'il aurait éprouvée en pénétrant plus avant dans les régions inexplorées du monde mathématique.

La préface de M. Beltrami est suivie de la liste complète des trente-trois publications de Chelini, qui se trouvent, sauf les *Elementi di Meccanica,* dans le *Giornale Arcadico,* la *Raccolta scientifica di Palomba,* les *Annali di scienze compilati da Tortolini,* les *Annali di Matematica pubblicati da Tortolini,* le *Giornale di Matematiche delle Università Italiane,* le *Bullettino* du prince *Boncompagni,* les *Atti dell' Accademia de' Nuovi Lincei,* les *Memorie dell' Accademia di Bologna.*

Voici maintenant la liste des Mémoires qui forment les *Collectanea Mathematica*, avec de brèves indications sur les matières traitées.

HERMITE. — Sur les fonctions $\Theta(x)$ et $H(x)$ de Jacobi. (p. 1-5, fr).

La série

$$\varphi(x, \omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n q^{\frac{m^2}{4}} e^{\frac{mi\pi\omega}{2K}}}{\operatorname{tang} \frac{\pi}{2K}(x - miK')},$$

où $m = 2n + 1$ et qui donne $\frac{1}{\Theta(x)}$ quand on y fait $\omega = 0$, jouit

(¹) *Bulletin,* 2ᵉ série, t. I, IIᵉ Partie, p. 82.

de la propriété

$$\varphi(x)e^{\frac{i\pi}{K}(x+iK'+\omega)} = -\varphi(x+2iK') + H(\omega)\left[1-e^{\frac{i\pi}{K}(x+iK'+\omega)}\right];$$

de même pour la série

$$\sum_{+\infty}^{-\infty} \frac{(-1)^n q^{n^2} e^{\frac{ni\pi\omega}{K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}(x-2niK')},$$

qui pour $\omega = 0$ donne $\frac{1}{H(x)}$. Ces résultats sont obtenus directement par la décomposition en éléments simples des termes de la série.

SIACCI. — L'hyperboloïde central dans la rotation des corps. (p. 6-16, ital.).

Quand un corps tourne autour d'un point fixe sans qu'il y ait de forces extérieures, un certain hyperboloïde, lié à ce corps et dont les axes coïncident avec les axes principaux d'inertie relatifs au point, roule sans glisser sur un cylindre circulaire droit dont l'axe passe par le point fixe et est parallèle à l'axe du couple d'impulsion.

CAYLEY. — Sur une équation différentielle. (17-26, angl.).

Il s'agit de l'équation

$$\frac{(a'z^2+2b'z+c')\,dz^2}{z^2(z-1)^2} = \frac{(ax^2+2bx+c)\,dx^2}{x^2(x-1)^2},$$

qui, ainsi que l'a montré M. Kummer, joue un rôle si considérable dans la théorie de la transformation des séries hypergéométriques.

BATTAGLINI. — Sur les cubiques ternaires syzygétiques. (27-50, ital.).

Dans ce travail l'auteur donne plusieurs propositions intéressantes relatives aux relations entre une cubique et sa cayleyenne, et il généralise quelques théorèmes de Clebsch relativement aux coniques polaires et aux poloconiques prises par rapport aux cubiques d'un faisceau syzygétique.

HIRST. — Sur les complexes engendrés par deux plans corrélatifs. (51-73, angl.).

Ce travail fait suite à l'étude sur la corrélation de deux plans publiée dans le Recueil de la *Société Mathématique* de Londres, 1874, t. V, p. 40. Soient α, β les deux plans qui se correspondent. Si la droite a du premier correspond au point B de l'autre, réciproquement à tout point A du premier point situé sur la droite a correspondra une droite b passant par B. On dit que les deux points A et B sont conjugués. Il est clair que la droite AB engendre un complexe C dont M. Hirst approfondit la nature et les singularités.

D'OVIDIO. — Note sur certains hyperboloïdes annexés aux cubiques gauches. (72-90, ital.).

L'auteur rappelle les formules fondamentales qu'il a données dans son *Studio sulle cubiche gobbe* présenté à l'Académie de Tunis (9 mars 1879), et qui sont obtenues par l'emploi des notations symboliques introduites par Clebsch dans l'étude des formes binaires. Il étudie ensuite certains faisceaux et réseaux de surfaces du second degré qui se présentent dans la théorie des cubiques gauches, en particulier les hyperboloïdes par trois cordes d'une cubique.

MANNHEIM. — Constructions planes des éléments de courbure de la surface de l'onde. (91-104, fr.).

Le point de départ est la génération trouvée par Mac Cullagh. La solution repose sur la représentation géométrique d'un élément de surface réglée au moyen d'une droite auxiliaire et sur la représentation d'un pinceau de droites au moyen d'une circonférence et d'un point.

PADOVA. — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. (105-116, ital.).

L'auteur étend la méthode donnée par Ampère (Cahiers XVII et XVIII du *Journal de l'École Polytechnique*) au cas d'un nombre quelconque de variables, et montre qu'elle conduit à la méthode de Cauchy, en évitant la difficulté signalée par M. Bertrand.

SMITH. — Sur quelques fractions continues. (117-143, lat.).

Sur la résolution en nombres entiers des équations de la forme

$$P_1P_2 - 2R^2 = \pm 1, \quad P_1P_2 - 3R^2 = \pm 1,$$

les solutions étant mises sous la forme qu'affecte le numérateur d'une fraction limitée. Sur certaines représentations par des formes quadratiques. Sur certains développements des racines carrées en fractions continues.

CAPORALI. — Sur les systèmes linéaires triplement infinis des courbes algébriques planes. (142-170, ital.).

Solution des principaux problèmes de géométrie numérique qui se présentent dans la théorie de ces systèmes; la méthode consiste à faire dépendre ces questions de considérations stéréométriques et les propriétés obtenues résultent de l'étude d'une surface représentée point par point sur le plan des systèmes linéaires de façon que ses sections planes aient pour images les courbes du système linéaire.

CERRUTI. — Sur une généralisation de quelques théorèmes de Mécanique. (171-182, ital.).

Si un point (x, y, z) est soumis à l'action d'une force qui ne dépende que de la position du point, les équations du mouvement auront une intégrale de la forme

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0,$$

où x', y', z' sont les composantes de la vitesse et où A, B, C, D sont des fonctions de x, y, z; si les lignes d'action de la force appartiennent à un complexe linéaire, cette condition est d'ailleurs nécessaire : une ligne quelconque peut toujours être décrite librement par une force dont les lignes d'action appartiennent à un complexe linéaire donné arbitrairement. L'auteur examine le cas où il existe deux intégrales de cette forme; il traite aussi le cas où le point doit se mouvoir sur une surface : si ses coordonnées

sont u, v, pour qu'il existe une intégrale de la forme

$$A u' + B v' + C = 0,$$

il faut que la surface soit une surface hélicoïdale.

Bardelli. — Sur les axes d'équilibre. (183-205, ital.).

Étant donné un système solide en équilibre, il existe toujours trois directions orthogonales entre elles, telles que, en faisant tourner le corps autour de l'une d'elles d'un angle égal à $(2n+1)\pi$, il vienne dans une nouvelle position d'équilibre, en supposant que les forces soient restées appliquées au même point et n'aient point varié en grandeur et en direction. La détermination de ces directions dépend d'une équation du 3ᵉ degré : quand le dernier terme est nul, il existe en général un axe unique, coïncidant avec une des directions précédemment définies, tel que le corps puisse tourner autour de cet axe d'un angle quelconque en restant en équilibre; il peut d'ailleurs exister une infinité de tels axes tous parallèles à un plan; enfin, dans le cas des systèmes astatiques, toute droite de l'espace est un tel axe.

Darboux. — Sur l'équation de Riccati. (199-205, fr.).

Si l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = p + 2qy + + ry^2,$$

où p, q, r désignent des fonctions quelconques de x, admet comme solutions particulières toutes les racines d'une équation algébrique

$$f(y) = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions de x, elle admettra aussi comme solutions particulières les racines de tous les covariants du polynôme $f(y)$. L'auteur applique cette proposition à un exemple étudié par M. Cayley.

BORCHARDT. — Sur deux algorithmes analogues à celui de la moyenne arithmético-géométrique de deux éléments. (206-212, fr.).

Si l'on considère la suite indéfinie

$$m, n; \quad m_1, n_1; \quad m_2, n_2; \quad \ldots,$$

où m, n sont deux nombres positifs et où

$$m_1 = \frac{m+n}{2}, \qquad n_1 = \sqrt{m_1 n},$$

$$m_2 = \frac{m_1+n_1}{2}, \qquad n_2 = \sqrt{m_2 n_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

les termes de cette suite auront pour limite

$$\frac{\sqrt{n^2-m^2}}{\arccos \dfrac{n}{m}} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{m^2-n^2}}{\log \dfrac{m+\sqrt{m^2-n^2}}{n}},$$

selon que l'on aura $n \gtrless m$.

BRIOSCHI. — Sur une forme binaire du huitième ordre. (213-220, ital.).

La forme binaire du huitième ordre f, pour laquelle le covariant du huitième ordre

$$g = \frac{1}{2}(ff)_4$$

satisfait identiquement à la relation

$$g = \rho f_1,$$

où ρ est une constante, ne diffère que par un facteur constant du hessien d'une forme du sixième ordre pour laquelle le covariant correspondant G est identiquement nul.

BRIOSCHI. — Résultante de deux formes binaires, l'une cubique, l'autre biquadratique. (221-223, ital.).

Le système simultané de deux formes binaires, l'une cubique, l'autre biquadratique, a été étudié par M. Gundelfinger; il se com-

pose de soixante-quatre formes; M. Brioschi exprime la résultante au moyen de certains des invariants de M. Gundelfinger.

KRONECKER. — Sur le potentiel dans une multiplicité n^{uple}. (224-231, allem.).

L'auteur donne une forme remarquablement simple pour l'expression du potentiel d'un ellipsoïde, non rapporté à ses axes, dans une multiplicité n^{uple}.

BETTI. — Sur la propagation de la chaleur. (232-240, ital.).

Sur le mouvement de la chaleur dans un milieu isotrope indéfini dont on suppose tous les points à la température zéro, sauf les points contenus dans un espace déterminé.

REYE. — Sur le complexe de sphères quadratiques et sur les cyclides confocales. (241-257, allem.).

L'auteur s'est proposé d'étendre la notion de normale aux complexes linéaires de sphères et d'arriver par une voie nouvelle au système de cyclides orthogonales et homofocales.

DINI. — Sur quelques théorèmes relatifs à la théorie des fonctions d'une variable complexe. (238-276, ital.).

Cette Communication se rapporte au théorème de M. Weierstrass sur l'existence d'une fonction entière dont on donne les zéros. M. Betti (t. III des *Annales de Tortolini*, p. 82) avait établi une proposition qui est un cas particulier de celle de M. Weierstrass; M. Betti avait supposé tous les zéros simples et leurs distances mutuelles supérieures à une quantité donnée : M. Dini montre comment on peut compléter la démonstration de M. Betti et comment des considérations analogues conduisent à la démonstration du théorème de M. Mittag-Leffler.

SCHLAEFLI. — Quelques remarques sur les fonctions de Lamé. (276-287, allem.).

En désignant par A, B, C ($A > B > C$) les carrés des demi-axes d'une surface du second degré, telle que $A - C$, $B - C$ soient des

constantes, et en posant

$$dt = \frac{dA}{2\sqrt{ABC}},$$

les fonctions de Lamé (*Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes,* p. 279) sont des fonctions entières du $n^{\text{ième}}$ degré des demi-axes, de la forme

$$P = A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} Q,$$

où les exposants α, β, γ sont zéro ou $\frac{1}{2}$, où Q est une fonction entière de A dont le degré ν est déterminé par l'équation

$$2(\alpha + \beta + \gamma + \nu) = n,$$

et telles que

$$\frac{1}{P}\frac{d^2P}{dt^2}$$

soit une fonction entière (du premier degré) de A; l'auteur montre, d'une façon élémentaire, que l'équation $Q = 0$ a toutes ses racines réelles, que les $\nu + 1$ fonctions Q qui appartiennent à un même groupe d'exposants α, β, γ sont différentes, et qu'il y a effectivement $2n + 1$ fonctions P.

Wolf (R.). — Sur la relation entre la période des taches du Soleil et les variations magnétiques observées à Rome. (288-293, allem.).

Geiser. — Sur les sécantes triples d'une courbe gauche algébrique (294-306, all.).

Problème de géométrie numérique. Nombre des sécantes triples qui passent par un point de la courbe, degré de la surface réglée, engendrée par une telle droite, etc.

Casorati. — Sur une formule fondamentale concernant les discriminants d'une équation différentielle et de son équation primitive complète. (307-312, ital.).

Relation entre le discriminant d'une équation différentielle de la forme

$$\varphi_0 dx^m + \varphi_1 dx^{m-1} dy + \ldots + \varphi_m dy^m = 0,$$

où les φ sont des fonctions de x et de y, et le discriminant de

l'équation obtenue par l'intégration et que l'on suppose de la forme

$$f(\Omega) = f_0 \Omega^m + f_1 \Omega^{m-1} + \ldots + f_m = 0,$$

où les f sont des fonctions de x et de y et où Ω est la constante arbitraire.

BERTINI. — Sur les courbes gauches rationnelles du cinquième ordre. (312-326, ital.).

Ces courbes, qui peuvent être obtenues par une transformation quadratique des courbes du quatrième degré, peuvent, si on les suppose sans points doubles, être rangées dans deux classes : les unes admettent une droite quadri-sécante, les autres en admettent une infinité; ce sont les premières qu'étudie M. Bertini, il s'occupe spécialement des droites tri-sécantes et des coniques cinqui-sécantes.

JUNG. — Sur les moments obliques d'un système de points. (327-339, ital.).

Étant donné un système de points $(o_1, o_2, \ldots)$ affectés de coefficients numériques $(m_1, m_2, \ldots)$, l'auteur appelle *moment oblique* de degré r de ce système par rapport à un plan la somme $\Sigma m_i x_i^r$ où x_i est la distance du point o_i au plan, comptée parallèlement à une direction fixe; il parvient, pour $r = 2$, par voie synthétique, à une représentation analogue des plans de moment constant. Celle que Hesse a employée pour rendre intuitive la distribution des plans de moment constant; la quadrique imaginaire (*imaginäres Bild*) de Hesse est remplacée par une quadrique qui peut être nulle ou imaginaire.

BELTRAMI. — Sur la théorie des axes de rotation. (340-362, ital.).

Exposition élégante des principes de la théorie développée par Chelini et M. Turazza.

BONCOMPAGNI. — Sur un testament inédit de Nicolò Tartaglia. (363-412, ital.).

Ce testament est reproduit a tographiquement.

CREMONA. — Sur une certaine surface du quatrième ordre. (413-424, ital.).

Sur la surface engendrée par faisceaux projectifs

$$S_1 - \lambda S_2 = 0,$$
$$S_3 - \lambda S_4 = 0$$

de surfaces du second degré, en supposant que toutes les surfaces $S = 0$ se touchent en un même point.

WEIERSTRASS. — ZUR THEORIE DER EINDEUTIGEN ANALYTISCHEN FUNCTIONEN. — In-4°, 60 pages ([1]).

Dans cet important travail, dont les résultats deviendront classiques, l'illustre géomètre s'est préoccupé principalement d'établir diverses formes analytiques susceptibles de représenter une fonction uniforme satisfaisant à certaines conditions : l'importance et la généralité des conclusions auxquelles parvient M. Weierstrass, la rigueur avec laquelle elles sont déduites, donnent à son œuvre une valeur exceptionnelle.

Une fonction uniforme de x est dite *régulière* dans les environs du point a quand, pour les valeurs de x telles que le module de $x - a$ soit inférieur à une quantité finie, elle peut être représentée par une série convergente telle que

$$A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots.$$

La même condition convient pour le point ∞, en remplaçant $x - \infty$ par $\frac{1}{x}$. Tout point par lequel une fonction uniforme n'est pas régulière est un point singulier : un tel point singulier a est *non-essentiel,* si l'on peut rendre la fonction régulière, dans les environs du point a, en la multipliant par une puissance entière et positive de $x - a$; si on ne peut le faire, le point a est un point

---

([1]) *Abhandlungen der könig. Akad. der Wiss. zu Berlin*, 1876. — *Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. VIII, p. 111.

singulier *essentiel*. Le caractère propre des fonctions rationnelles consiste en ce qu'elles ne peuvent avoir que des points singuliers non-essentiels : on n'aperçoit d'abord qu'une fonction uniforme qui n'a que des points singuliers non-essentiels en un nombre nécessairement fini, puisqu'on peut la représenter par le quotient de deux polynômes entiers en x.

Les fonctions uniformes n'ayant qu'un seul point singulier essentiel, situé à l'infini, offrent un intérêt particulier et sont l'objet d'une étude spéciale : elles peuvent être représentées par des séries de la forme

$$A + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

convergentes dans tout le plan; réciproquement une telle série illimitée représente une fonction uniforme ayant un seul point singulier essentiel, situé à l'infini. M. Weierstrass donne à ces fonctions le nom de fonctions *entières* (transcendantes); les fonctions entières, au sens ordinaire du mot, étant dites *rationnelles entières*.

On voit aisément qu'une fonction entière, au sens de l'auteur, ne peut avoir, dans une portion limitée du plan, qu'un nombre fini de zéros, même lorsque l'on compte pour n zéros un zéro d'ordre n de multiplicité. La suite des zéros $a_1, a_2, a_3, \ldots$ d'une fonction entière, que leur nombre soit, dans tout le plan, fini ou infini, peut donc être rangée de façon à satisfaire aux conditions suivantes :

1° Chaque valeur entre dans la suite autant de fois qu'il y a d'unités dans l'ordre de multiplicité du zéro correspondant;

2° Pour deux termes consécutifs de la suite $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ on a

$$|a_{n+1}| \geqq |a_n| \text{ (}^1\text{)};$$

3° Si la suite des zéros est illimitée, on a

$$\lim_{n=\infty} |a_n| = \infty.$$

Réciproquement, étant donnée une suite de nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots$ satisfaisant aux conditions précédentes, on peut se demander s'il

(1) Le symbole $|a|$ désigne, en général, le module de la quantité a.

existe une fonction entière dont la suite des zéros soit précisément la suite $a_1, a_2, a_3, \ldots$, et dans quelle mesure une telle fonction, dont on démontre effectivement l'existence, est déterminée.

On reconnaît d'abord immédiatement qu'on peut toujours former, et cela d'une infinité de façons, une suite de nombres entiers et non négatifs,

$$m_1, \quad m_2, \quad m_3, \quad \ldots,$$

tels que la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_\nu} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu} \right|$$

soit convergente pour toute valeur finie de x; dès lors la fonction

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_\nu} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu},$$

se comporte évidemment comme la dérivée logarithmique d'une fonction entière dont la suite des zéros serait la suite $a_1, a_2, a_3, \ldots$, et M. Weierstrass établit effectivement, en toute rigueur, l'existence d'une fonction entière $G(x)$, satisfaisant à cette dernière condition, satisfaisant aussi à l'égalité

$$\frac{dG(x)}{dx} = F(x)\,G(x).$$

Sa démonstration le conduit en même temps à une proposition que l'on peut regarder comme capitale dans cette théorie et qui concerne un mode de représentation analytique d'une fonction entière quelconque, mode de représentation qui met en évidence les zéros de cette fonction :

Toute fonction uniforme entière de x peut être exprimée par un produit infini dont les facteurs sont des fonctions primaires (¹) *de x, de la forme*

$$(kx + l)e^{g(x)},$$

(¹) M. Weierstrass appelle en général *fonction primaire* de x (*Primfunction*) toute fonction uniforme de x ayant seulement un point singulier, essentiel ou non, et n'ayant au plus qu'un zéro; la forme générale de ces fonctions est, en désignant

où $g(x)$ est une fonction rationnelle entière de x, s'annulant pour $x = 0$, et où k, l sont des constantes.

Il est bien entendu que la fonction $g(x)$ peut, ainsi que l'une des constantes k, l, se réduire à zéro, et qu'une constante doit être regardée comme une fonction primaire.

Par exemple, l'inverse de la fonction eulérienne $\Gamma(x+1)$ peut, d'après la définition de Gauss, être mise sous la forme

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x\log\frac{n+1}{n}};$$

cette fonction est entière (transcendante), ainsi qu'on le déduit bien aisément de cette forme même, et les *facteurs primaires* sont précisément les fonctions

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Quant à la seconde question, la réponse est immédiate; toute fonction entière, ayant les mêmes zéros que la fonction entière $G(x)$, peut être mise sous la forme

$$G(x)e^{\overline{G(x)}},$$

où $\overline{G(x)}$ désigne aussi une fonction entière.

Si maintenant $f(x)$ désigne une fonction uniforme ayant un seul point singulier c, essentiel ou non, on pourra la mettre sous la forme

$$f(x) = G\left(\frac{1}{x-c}\right),$$

G désignant une fonction entière, transcendante ou rationnelle, selon que le point c sera un point singulier essentiel ou non.

---

par c le point singulier,

$$\left(\frac{k}{x-c}+l\right)e^{G\left(\frac{1}{x-c}\right)},$$

k, l étant des constantes et G une fonction entière : il se borne d'ailleurs au cas où cette fonction est rationnelle : quand le point singulier est à l'infini, $x-c$ doit être remplacé par $\frac{1}{x}$.

De même, la forme la plus générale des fonctions uniformes ayant un seul point singulier essentiel c, ayant, en outre, tels points singuliers non-essentiels que l'on voudra, sera

$$\frac{G_1\left(\frac{1}{x-c}\right)}{G_2\left(\frac{1}{x-c}\right)},$$

où G_1, G_2 désignent des fonctions entières, ne s'annulant pas pour la même valeur de x et dont l'une, au moins, est transcendante.

L'expression la plus générale des fonctions uniformes de x ayant n points singuliers $c_1, c_2, \ldots, c_n$ peut de diverses façons s'obtenir en combinant n fonctions n'ayant qu'un seul point singulier; les formes suivantes sont les plus simples :

$$\sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right), \quad \prod_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right) R(x),$$

les G désignant les fonctions entières et $R(x)$ représentant une fonction *rationnelle* ne pouvant s'annuler ou devenir infinie que pour les points singuliers essentiels.

Toute fonction uniforme de x, ayant n points singuliers essentiels $c_1, c_2, \ldots, c_n$, ayant en outre un nombre arbitraire (même infini) de points singuliers non-essentiels, peut être représentée par l'une ou l'autre des deux expressions

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}{\sum_{\nu=1}^{n} G_{n+\nu}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)},$$

$$\frac{\prod_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}{\prod_{\nu=1}^{n} G_{n+\nu}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)} R(x),$$

les fonctions G et R ayant la même signification que précédem-

ment, les numérateurs et les dénominateurs ne s'annulant pas pour la même valeur de x.

Inversement, en prenant arbitrairement les fonctions G, ces expressions représentent n points singuliers essentiels $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ou un nombre moindre; pour que tous les points c soient des points singuliers essentiels, il faut que les fonctions G satisfassent à certaines conditions; quant au nombre des points singuliers non-essentiels, il n'est soumis à aucune restriction.

Pour établir ces propositions, l'auteur s'appuie sur un lemme qui offre, en lui-même, un intérêt considérable et que voici :

Soit

$$\varphi(x) = k_0 + \frac{k_1}{x - c_1} + \frac{k_2}{x - c_2} + \ldots + \frac{k_n}{x - c_n},$$

les quantités c, k étant des constantes soumises seulement aux restrictions suivantes : aucune des quantités $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ne peut être nulle, deux des quantités $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ne peuvent pas être égales; soient maintenant

$$F_0(y), \quad F_1(y), \quad \ldots, \quad F_{n-1}(y),$$

des fonctions uniformes de y, ayant un point singulier essentiel à l'infini; non seulement l'expression

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} F_\nu(y) \left(\frac{1}{x - c}\right)^\nu,$$

où c représente une quelconque des quantités $c_1, c_2, \ldots, c_n$ et où l'on suppose y remplacé par $\varphi(x)$, représente une fonction uniforme ayant les points singuliers essentiels $c_1, c_2, \ldots, c_n$, mais encore, étant donnée une telle fonction $f(x)$, on peut déterminer les fonctions

$$F_0(y), \quad F_1(y), \quad \ldots, \quad F_{n-1}(y)$$

de façon que l'on ait

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} F_\nu[\varphi(x)] \left(\frac{1}{x - c}\right)^\nu;$$

les fonctions

$$F_0(y), \quad \ldots, \quad F_{n-1}(y)$$

seront toutes *entières* (transcendantes), si la fonction $f(x)$ n'admet pas d'autres points singuliers essentiels.

Enfin M. Weierstrass examine, dans le voisinage d'un point singulier essentiel, le mode d'existence de ces fonctions uniformes, à nombre limité de points singuliers essentiels, dont il a été précédemment question, et démontre qu'elles s'approchent autant qu'on le veut de telle valeur qu'on veut. M. Picard, à qui l'on doit la traduction du Mémoire de M. Weierstrass, a récemment complété cet énoncé en montrant que ces fonctions, dans le voisinage d'un point singulier essentiel, *atteignent effectivement* telle valeur qu'on veut.

SCHUR. — Geometrische Untersuchungen über Strahlencomplexe ersten und zweiten Grades (¹).

L'auteur se propose d'étudier à un point de vue purement géométrique les propriétés des complexes du second degré, propriétés étudiées seulement jusqu'ici analytiquement. Il devait par suite trouver un équivalent de l'équation analytique, c'est-à-dire, une génération géométrique des complexes du second degré.

On obtient une telle génération au moyen de deux faisceaux réciproques de complexes linéaires; autrement dit, si l'on fait correspondre projectivement la variété doublement infinie de complexes linéaires qui passent par une surface réglée du second degré R, la variété aussi doublement infinie de congruences linéaires passant par une autre surface S, les surfaces réglées communes à chaque complexe linéaire passant par R et à la congruence linéaire correspondante passant par S constituent un complexe du second degré. Avant de montrer que tout complexe du second degré peut être engendré de la sorte et de déduire de ce mode de génération les propriétés principales du complexe, l'auteur entreprend une étude géométrique des congruences de second ordre et de seconde classe ou de second degré. (Chap. I.)

(¹) *Mathem. Annalen*, t. XX, p. 431-464.

Il imagine pour cela le complexe linéaire appliqué sur l'espace ponctuel, et alors (Chap. II, § 1-6) la congruence du second degré s'obtient comme représentation d'une surface du second degré. On arrive ainsi facilement aux propriétés des congruences du second degré, celles qui concernent les générations importantes à considérer dans la suite, aussi bien que celles qui se rapportent aux surfaces focales.

En particularisant (§ 7) la position de la surface du second degré représentative de la congruence, relativement à une autre surface du deuxième degré d'importance fondamentale dans la représentation du complexe linéaire sur l'espace ponctuel, on obtient les types principaux de congruence du second degré ou de surfaces de Kummer, tels que Weiler les a donnés dans le t. VII des *Mathematische Annalen*.

On substitue ainsi à l'appareil compliqué des diviseurs élémentaires de Weierstrass la considération bien plus intuitive des relations de position de deux surfaces du second degré.

L'auteur arrive alors (Chap. III, § 2) à la démonstration de la génération d'un complexe du deuxième degré par deux faisceaux réciproques de complexes linéaires. Il y parvient en cherchant les surfaces réglées du second degré contenues dans un complexe du deuxième degré. Partons d'une telle surface réglée par laquelle nous menons une congruence linéaire; cette congruence a avec le complexe du second degré une seconde surface réglée commune; partant de cette dernière et continuant de même, on voit que toutes les surfaces réglées du complexe auxquelles on peut arriver ainsi constituent une variété triplement infinie. Ces surfaces se distribuent en deux systèmes que l'auteur appelle *systèmes de surfaces fondamentales correspondantes :* deux surfaces de systèmes différents peuvent en effet être prises pour bases de deux faisceaux réciproques de complexes linéaires engendrant le complexe du deuxième degré. Deux surfaces réglées appartenant à un même système sont situées dans un complexe linéaire, deux surfaces de systèmes différents ont ou bien une position tout à fait générale ou bien se trouvent, dans un cas, sur une congruence linéaire. De ce mode de génération résulte la considération d'un second complexe que l'on peut dire en involution avec le complexe donné C^2 pour lequel les surfaces réglées sont en involution avec celles des deux systèmes

de C^2. L'auteur montre maintenant (§ 3) que toutes les surfaces appartenant aux deux systèmes qui passent par un rayon quelconque p de C^2 appartiennent à un complexe linéaire, le complexe tangent relatif à ce rayon.

Ce complexe tangentiel (§ 4) a en commun avec C^2 une congruence du deuxième degré qui contient en particulier quatre faisceaux de rayons, dont les plans passent par p et dont les centres sont situés sur p. On démontre maintenant que chacun des complexes linéaires, en nombre simplement infini, qui passent par ces quatre faisceaux de rayons est un complexe tangent relatif à p; mais chacun se rapporte à deux nouveaux systèmes de surfaces fondamentales correspondantes.

De la sorte, toutes les surfaces réglées contenues dans C^2 se trouvent distribuées en un nombre simplement infini de tels couples. En fixant *l'un* de ces couples, on peut désormais faire correspondre à chaque rayon de l'espace un complexe linéaire comme complexe polaire; on peut voir qu'à tous les rayons passant par un point correspondent tous les complexes passant par la surface réglée corrrespondant au point; à tous les rayons situés dans un plan correspondent tous les complexes passant par la surface réglée polaire du plan.

De plus, toujours sous les même conditions, on voit (§ 4) que les surfaces polaires de tous les points de l'espace d'une part, et d'autre part les surfaces polaires de tous les plans de l'espace constituent les deux systèmes de surfaces fondamentales d'un complexe du deuxième degré K^2. Ce complexe K^2 est le lieu des rayons dont les complexes polaires sont des complexes linéaires spéciaux; leurs directrices forment un nouveau complexe L^2 qui se représente univoquement sur K^2. Les points (§ 5) qui sont situés sur leurs surfaces polaires sont des points singuliers du complexe C^2, c'est-à-dire que les cônes du complexe passant par ces points se décomposent en deux plans et que de plus l'intersection de ces plans ou droite singulière correspondante appartient alors au complexe K^2. Les rayons singuliers de C^2 sont dès lors les rayons communs à tous les complexes K^2. La chose analogue a lieu pour les plans singuliers et leurs rayons singuliers. L'auteur montre ensuite (§ 6) que parmi les couples en nombre simplement infini de surfaces de bases correspondantes de C^2 il y en a six tels

que les deux systèmes se changent l'un dans l'autre. Il arrive ainsi à la considération du complexe linéaire fondamental C. Alors le complexe polaire d'un rayon quelconque p est en même temps complexe polaire du rayon conjugué de p dans le complexe linéaire C. L^2 devient alors aussi linéaire et se confond avec C; K^2 se change aussi en un complexe linéaire, mais tel qu'à un rayon de C correspondent deux rayons de K^2 et à ces deux-ci seulement un rayon de C. Alors aux rayons singuliers de C^2 qui se trouvent sur K^2 correspondent (§ 7) les rayons d'une congruence de deuxième degré située sur C, et il en résulte directement une des générations données précédemment pour cette congruence. Et comme les relations des points et des plans singuliers de C^2 avec leurs surfaces polaires montrent qu'ils sont identiques aux points et aux plans focaux de cette congruence, on a ainsi une démonstration directe de l'identité de la surface des singularités du complexe C^2 et de la surface de Kummer. La définition (§ 8) des complexes du second degré, en nombre simplement infini, situés en involution avec C^2, montre immédiatement qu'il ont la même surface de singularités que C^2.

On voit enfin que deux quelconques d'entre elles sont en involution, c'est-à-dire que les surfaces réglées constituant un couple de surfaces fondamentales correspondantes pour l'un des complexes sont des directrices pour un autre complexe. On a là une relation entre deux complexes qui ont la même surface de singularités, c'est-à-dire d'après la définition analytique qui forment un système unifocal. Voir Klein, *Zur Theorie der Liniencomplexe* 1. *und* 2. *Grades* (*Math. Ann.*, Bd. II, S. 198.)

Ce résultat doit être considéré comme analogue à ce théorème, que deux surfaces homofocales du deuxième degré se coupent à angle droit.

MÉLANGES.

SUR LE MOUVEMENT DU PENDULE CONIQUE;

PAR M. F. TISSERAND.

M. Resal a montré dans son *Traité de Mécanique* que la courbe décrite par la projection de l'extrémité du pendule sur l'horizon, dans le cas des petites oscillations, est une ellipse dont le grand axe tourne d'un mouvement uniforme autour de son centre. Les calculs suivants ont pour but de fixer le degré d'approximation de cette solution.

Soient l la longueur du pendule, g la gravité, θ l'angle du pendule avec la verticale, θ_0 le maximum, θ_1 le minimum de θ, φ l'angle que fait le plan vertical du pendule avec la position initiale de ce plan; en admettant que, pour $t = 0$, $\theta = \theta_0$ et $\varphi = 0$, on a les formules suivantes :

$$k = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$(1)\quad k\sqrt{2}\,dt = -\frac{\sin\theta\sqrt{\cos\theta_0 + \cos\theta_1}\,d\theta}{\sqrt{(\cos\theta - \cos\theta_0)(\cos\theta_1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta\cos\theta_0 + \cos\theta\cos\theta_1 + \cos\theta_0\cos\theta_1)}}$$

$$(2)\quad d\varphi = -\frac{\sin\theta_0\sin\theta_1\,d\theta}{\sin\theta\sqrt{(\cos\theta - \cos\theta_0)(\cos\theta_1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta\cos\theta_0 + \cos\theta\cos\theta_1 + \cos\theta_0\cos\theta_1)}}$$

Nous allons développer ces formules en séries; posons

$$\sin\theta = u,\quad \sin\theta_0 = u_0,\quad \sin\theta_1 = u_1;$$

$$(3)\qquad u^2 = u_0^2\cos^2\psi + u_1^2\sin^2\psi.$$

Pour $t = 0$, on aura $\psi = 0$; on tire de là

$$\frac{d\theta}{\sqrt{(\cos\theta - \cos\theta_0)(\cos\theta_1 - \cos\theta)}} = -\frac{\sqrt{(\cos\theta + \cos\theta_0)(\cos\theta + \cos\theta_1)}}{u\sqrt{1 - u^2}}\,d\psi,$$

et les formules (1) et (2) deviennent

$$(4)\quad k\sqrt{2}\,dt = \frac{d\psi}{\sqrt{1 - u^2}}\,\frac{\sqrt{(\cos\theta + \cos\theta_0)(\cos\theta + \cos\theta_1)(\cos\theta_0 + \cos\theta_1)}}{\sqrt{1 + \cos\theta\cos\theta_0 + \cos\theta\cos\theta_1 + \cos\theta_0\cos\theta_1}},$$

$$(5)\quad d\varphi = \frac{u_0 u_1\,d\psi}{u^2\sqrt{1 - u^2}}\,\frac{\sqrt{(\cos\theta + \cos\theta_0)(\cos\theta + \cos\theta_1)}}{\sqrt{1 + \cos\theta\cos\theta_0 + \cos\theta\cos\theta_1 + \cos\theta_0\cos\theta_1}}.$$

On a les développements suivants :

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{8}u^4 - \ldots,$$

$$\cos\theta_0 = 1 - \frac{1}{2}u_0^2 - \frac{1}{8}u_0^4 - \ldots,$$

$$\cos\theta_1 = 1 - \frac{1}{2}u_1^2 - \frac{1}{8}u_1^4 - \ldots;$$

on en conclut

$$\frac{1}{4}(1 + \cos\theta\cos\theta_0 + \cos\theta\cos\theta_1 + \cos\theta_0\cos\theta_1)$$
$$= 1 - \frac{u^2 + u_0^2 + u_1^2}{4} - \frac{u^4 + u_0^4 + u_1^4}{16} + \frac{u^2u_0^2 + u^2u_1^2 + u_0^2u_1^2}{16} + \ldots,$$

$$\frac{1}{8}(\cos\theta + \cos\theta_0)(\cos\theta + \cos\theta_1)(\cos\theta_0 + \cos\theta_1)$$
$$= 1 - \frac{u^2 + u_0^2 + u_1^2}{2} - \frac{u^4 + u_0^4 + u_1^4}{16} + 3\frac{u^2u_0^2 + u^2u_1^2 + u_0^2u_1^2}{16} + \ldots.$$

La formule (5) donnera ensuite

$$\left(k\frac{dt}{d\psi}\sqrt{1-u^2}\right)^2 = 1 - \frac{u^2 + u_0^2 + u_1^2}{4} - \frac{u^4 + u_0^4 + u_1^4}{16} - \ldots,$$

$$k\frac{dt}{d\psi}\sqrt{1-u^2} = 1 - \frac{u^2 + u_0^2 + u_1^2}{8} - 5\frac{u^4 + u_0^4 + u_1^4}{128}$$
$$- \frac{u^2u_0^2 + u^2u_1^2 + u_0^2u_1^2}{64} + \ldots;$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} & k\frac{dt}{d\psi} = 1 - \frac{u_0^2 + u_1^2}{8} - 5\frac{u_0^4 + u_1^4}{128} - \frac{u_0^2u_1^2}{64} \\ & \quad + \left(\frac{3}{8} - 5\frac{u_0^2 + u_1^2}{64}\right)u^2 + \frac{35}{128}u^4 + \ldots; \end{aligned}\right.$$

On trouve de même

$$(7)\qquad \frac{1}{u_0u_1}\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{3}{8} - \frac{u_0^2 + u_1^2}{32} + \frac{1}{u^2} + \frac{35}{128}u^2 + \ldots.$$

Il est aisé de démontrer que, si loin qu'on pousse les approximations, le coefficient de $\frac{1}{u^2}$, dans le second membre de la formule (7), sera toujours égal à 1.

Il faut maintenant trouver t et φ en fonction de ψ, en partant des formules (6) et (7); en se reportant à la définition (3) de u, on trouvera

$$\int_0^\psi \frac{d\psi}{u^2} = \int_0^\psi \frac{d\psi}{u_0^2\cos^2\psi + u_1^2\sin^2\psi} = \frac{1}{u_0 u_1}\,\text{arc tang}\left(\frac{u_1}{u_0}\,\text{tang}\,\psi\right),$$

$$\int_0^\psi u^2 d\psi = \frac{u_0^2 + u_1^2}{2}\psi + \frac{u_0^2 - u_1^2}{4}\sin 2\psi,$$

$$\int_0^\psi u^4 d\psi = \frac{3(u_0^4 + u_1^4) + 2u_0^2 u_1^2}{8}\psi + \frac{u_0^4 - u_1^4}{4}\sin 2\psi + \frac{(u_0^2 - u_1^2)^2}{32}\sin 4\psi.$$

Il en résultera

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} kt = {} & \psi\left[1 + \frac{u_0^2 + u_1^2}{16} + \frac{25(u_0^4 + u_1^4) - 26u_0^2 u_1^2}{1024} + \ldots\right] \\ & + (u_0^2 - u_1^2)\left(\frac{3}{32} + 25\,\frac{u_0^2 + u_1^2}{512} + \ldots\right)\sin 2\psi \\ & + (u_0^2 - u_1^2)^2\left(\frac{35}{4096} + \ldots\right)\sin 4\psi + \ldots; \end{aligned}\right.$$

$$\varphi = \text{arc tang}\left(\frac{u_1}{u_0}\,\text{tang}\,\psi\right) + u_0 u_1\left(\frac{3}{8} + 27\,\frac{u_0^2 + u_1^2}{256} + \ldots\right)\psi + u_0 u_1(u_0^2 - u_1^2)\left(\frac{35}{512} + \ldots\right)\sin 2\psi + \ldots.$$

Nous poserons

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_1 &= \text{arc tang}\left(\frac{u_1}{u_0}\,\text{tang}\,\psi\right), \\ \varphi &= \varphi_1 + \varphi', \end{aligned}\right.$$

d'où

$$(10)\quad \text{tang}\,\varphi_1 = \frac{u_1}{u_0}\,\text{tang}\,\psi,$$

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi' = {} & u_0 u_1\left(\frac{3}{8} + 27\,\frac{u_0^2 + u_1^2}{256} + \ldots\right)\psi \\ & + u_0 u_1(u_0^2 - u_1^2)\left(\frac{35}{512} + \ldots\right)\sin 2\psi + \ldots. \end{aligned}\right.$$

En résolvant l'équation (8) par rapport à ψ, et déterminant k'

par l'équation

$$(12)\qquad k = k'\left[1 + \frac{u_0^2 + u_1^2}{16} + \frac{25(u_0^4 + u_1^4) - 26 u_0^2 u_1^2}{1024} + \ldots\right],$$

on trouvera

$$\psi = k' t - (u_0^2 - u_1^2)\left(\frac{3}{32} + 11\frac{u_0^2 + u_1^2}{256} + \ldots\right)\sin 2\psi$$
$$- (u_0^2 - u_1^2)^2\left(\frac{35}{4096} + \ldots\right)\sin 4\psi - \ldots.$$

On en tire aisément, au même degré d'approximation,

$$(13)\qquad \begin{cases} \psi = k' t - (u_0^2 - u_1^2)\left(\frac{3}{32} + 11\frac{u_0^2 + u_1^2}{256} + \ldots\right)\sin 2k' t \\ \qquad + (u_0^2 - u_1^2)^2\left(\frac{1}{4096} + \ldots\right)\sin^2 4k' t + \ldots. \end{cases}$$

En portant cette valeur de ψ dans l'expression (11) de φ', et posant

$$(14)\qquad k'' = k'\left(1 + 9\frac{u_0^2 + u_1^2}{32} + \ldots\right),$$

il viendra, après des calculs faciles à effectuer,

$$(15)\qquad \varphi' = \frac{3}{8}u_0 u_1 k'' t + u_0 u_1 (u_0^2 - u_1^2)\left(\frac{17}{512} + \ldots\right)\sin 2k' t + \ldots.$$

L'équation (13) donnera ψ; (3) fera connaître u^2 ou $\sin^2\theta$; φ sera déterminé par les formules (9), (10), (15).

Concevons un axe polaire Ox', faisant avec l'ancien Ox l'angle φ' déterminé par l'équation (15); l'angle polaire de la projection du pendule, relativement à Ox', sera φ_1; le rayon vecteur du même point, compté à partir du point O, sera

$$(16)\qquad \rho = lu;$$

on a, du reste, en vertu de l'équation (3),

$$\operatorname{tang}^2\psi = \frac{u_0^2 - u^2}{u^2 - u_1^2},$$

et (10) donne

$$\tang^2\varphi_1 = \frac{u_1^2}{u_0^2}\,\frac{u_0^2 - u^2}{u^2 - u_1^2}.$$

En posant de même

$$\rho_0 = lu_0, \quad \rho_1 = lu_1,$$

on trouvera

$$\tang^2\varphi_1 = \frac{\rho_1^2}{\rho_0^2}\,\frac{\rho_0^2 - \rho^2}{\rho^2 - \rho_1^2};$$

d'où

$$(17) \qquad \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho_0^2}\cos^2\varphi_1 + \frac{1}{\rho_1^2}\sin^2\varphi_1:$$

c'est l'équation polaire d'une ellipse, ayant pour centre le point O, Ox' pour grand axe; les longueurs des axes de cette ellipse sont $2\rho_0$ et $2\rho_1$.

L'équation (15) fait connaître le mouvement angulaire de la direction du grand axe; (10) et (13) donnent le mouvement sur l'ellipse.

L'angle ψ est l'anomalie excentrique, ainsi que le montre l'équation (10).

Nous allons donner le résumé des formules, en ajoutant un terme du sixième ordre dans l'expression de k', et un du quatrième dans celle de k''; nous ne donnons pas le détail du calcul de ces nouveaux termes.

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} k = \sqrt{\dfrac{g}{l}}; \quad \sin\theta_0 = u_0; \quad \sin\theta_1 = u_1 \\[2ex] k' = \dfrac{k}{1 + \dfrac{u_0^2 + u_1^2}{16} + \dfrac{25(u_0^4 + u_1^4) - 26u_0^2u_1^2}{1024} + \dfrac{225(u_0^6 + u_1^6) - 313u_0^2u_1^2(u_0^2 + u_1^2)}{16384}}. \\[2ex] k'' = k'\left[1 + 9\dfrac{u_0^2 + u_1^2}{32} + \dfrac{151(u_0^4 + u_1^4) + 58u_0^2u_1^2}{1024} + \ldots\right]; \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} \psi = k't - (u_0^2 - u_1^2)\left(\dfrac{3}{32} + 11\dfrac{u_0^2 + u_1^2}{256} + \ldots\right)\sin 2k't \\[2ex] \qquad + (u_0^2 - u_1^2)^2\left(\dfrac{1}{4096} + \ldots\right)\sin 4k't - \ldots; \end{cases}$$

$$(\mathrm{III}) \qquad \tang\varphi_1 = \frac{u_1}{u_0}\tang\psi,$$

(IV) $\sin^2\theta = u_0^2 \cos^2\psi + u_1^2 \sin^2\psi;$

(V) $\varphi' = \frac{3}{8} u_0 u_1 k'' t + u_0 u_1 (u_0^2 - u_1^2)\left(\frac{17}{512} + \ldots\right) \sin 2k' t + \ldots.$

(VI) $\varphi = \varphi_1 + \varphi'.$

On aura, dans une première approximation,

$$\psi = k' t,$$
$$\varphi' = \frac{3}{8} u_0 u_1 k'' t;$$

$u_0 u_1$ est un terme du second ordre, mais, à cause du multiplicateur t, ce terme prend bien vite une valeur considérable.

On voit que le grand axe de l'ellipse tourne d'un mouvement uniforme dans le sens même du mouvement du pendule, et que, sur cette ellipse, le mouvement de la projection est défini par cette condition, que l'anomalie excentrique croît proportionnellement au temps; k'' diffère peu de l'unité; donc le grand axe de l'ellipse tourne avec la vitesse angulaire $\frac{3}{8} u_0 u_1$: c'est là la solution de M. Resal.

Deuxième approximation :

$$\psi = k' t - \frac{3}{32}(u_0^2 - u_1^2) \sin 2k' t,$$
$$\varphi' = \frac{3}{8} u_0 u_1 k'' t.$$

Le grand axe de l'ellipse tourne encore d'un mouvement uniforme, mais la loi du mouvement sur l'ellipse est plus compliquée.

La troisième approximation est donnée par les formules (II) et (V); le mouvement de rotation du grand axe n'est plus proportionnel au temps ; il y a un petit terme périodique.

Faisons une application numérique, en supposant

$$\theta_0 = 30^\circ, \quad \theta_1 = 15^\circ.$$

Nous trouverons

$$\psi = k't - 1^\circ 7' 33'' \sin 2k't + 2'' \sin 4k't,$$

$$\varphi' = \frac{3}{8} u_0 u_1 k'' t + 2' 42'' \sin 2k't.$$

En supposant $l = 0^m,5$, je trouve que le petit terme périodique de φ', savoir $2' 42'' \sin 2k't$ ne serait accusé sur la circonférence qui passe par les extrémités du grand axe de l'ellipse mobile que par un petit déplacement égal au plus à un cinquième de millimètre, et cependant θ_0 et θ_1 ont des valeurs relativement considérables.

On peut donc conclure de là que, dans les conditions où l'on fait généralement les expériences sur le pendule conique, on peut admettre sans erreur appréciable que la projection de l'extrémité du pendule reste toujours sur une ellipse de forme invariable, qui tourne autour de son centre d'un mouvement uniforme.

Mais, si l'on voulait calculer le lieu du mobile sur l'ellipse, il faudrait, dans la valeur de ψ, avoir égard au terme périodique $-\frac{3}{32}(u_0^2 - u_1^2) \sin 2k't$, introduit par la seconde approximation.

SUR LA SUITE DE SCHWAB;

PAR M. J. TANNERY.

Dans le Volume consacré à la mémoire de Chelini, M. Borchardt a traité la question suivante :

Étant donnés deux nombres positifs a_1, b_1, on fait

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad b_1 = \sqrt{a_1 b},$$

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad b_2 = \sqrt{a_2 b_1},$$

........................;

trouver la limite de la suite indéfinie,

$$a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots.$$

L'Analyse de M. Borchardt est fort élégante; toutefois, je ne crois pas inutile de faire remarquer qu'on peut parvenir par une voie entièrement élémentaire à la solution du problème que l'illustre géomètre n'a pas cru indigne de ses efforts.

Soit d'abord $a < b$; je pose

$$a = b\cos\alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$$

on aura

$$a_1 = b\cos^2\frac{\alpha}{2}, \quad b_1 = b\cos\frac{\alpha}{2}, \quad a_1 = b_1\cos\frac{\alpha}{2},$$

et, par suite,

$$b_2 = b_1 \quad \cos\frac{\alpha}{4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$b_n = b_{n-1}\cos\frac{\alpha}{2^n} = b\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^n},$$

ou

$$b_n = \frac{b\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}},$$

puis

$$a_n = b_n\cos\frac{\alpha}{2^n}.$$

De là résulte immédiatement que a_n et b_n ont, pour n infini, la limite commune

$$\frac{b\sin\alpha}{\alpha}.$$

Soit maintenant $a > b$; je pose

$$a = b\,\text{ch}\,\alpha, \quad \text{ch}\,\alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}, \quad \text{sh}\,\alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2},$$

α étant un nombre positif.

On aura de même

$$\frac{b\,\text{sh}\,\alpha}{2^n\,\text{sh}\frac{\alpha}{2^n}}, \quad a_n = b_n\,\text{ch}\frac{\alpha}{2^n},$$

et l'on voit que la limite commune de a_n et b_n, pour n infini, est

$$\frac{b \operatorname{sh} \alpha}{\alpha}.$$

Enfin, on arriverait à des propositions du même genre, plus ou moins simples, en prenant pour point de départ, non les expressions de $\sin 2x$, $\operatorname{sh} 2x$, mais les formules qui donnent $\operatorname{tang} 2x$, $\sin 3x$, $\operatorname{sn} 2x$, etc.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

SYLOW (L.) et LIE (S.). — Œuvres complètes de Niels-Henrik Abel, nouvelle édition, publiée aux frais de l'État norvégien. 2 vol. in-4°. Christiania. — Gröndahl et Fils, 1881.

L'édition des Œuvres d'Abel que l'on doit à Holmboe et qui a été publiée en 1839 avait été rapidement épuisée. Le soin avec lequel étaient recherchés les exemplaires, en petit nombre, qui figuraient sur les Catalogues, l'importance des travaux de l'illustre géomètre, l'intérêt actuel qu'ils présentent encore, tout faisait désirer une nouvelle publication de ces travaux, et ce désir avait été bien souvent exprimé. Le gouvernement norvégien, sollicité par la Société des Sciences de Christiania, a accueilli avec empressement les vœux de tous les savants, et il a confié à MM. Sylow et Lie le soin de publier une nouvelle édition, revue et complète, des Œuvres de leur illustre compatriote. Le choix des éditeurs sera ratifié unanimement. De tout temps la Norvège a tenu, dans le développement scientifique, une place considérable. MM. Sylow et Lie sont, après M. Broch, les dignes continuateurs d'Abel, et il est permis de penser qu'eux aussi, en dehors de l'influence qu'ils exercent par leur travaux personnels, réussiront à fonder une école mathématique florissante avec le concours de plusieurs collaborateurs éminents et se prépareront des successeurs, capables de maintenir la réputation et l'influence scientifique de leur pays.

MM. Sylow et Lie ont pris à cœur la tâche qui leur avait été imposée par le gouvernement norvégien et qu'ils avaient acceptée avec joie. Nous ne craignons pas d'être démenti par M. Lie si nous disons que M. Sylow a pris une part plus considérable à la tâche commune ; cela était indiqué par la nature de leurs travaux et de leur esprit. Les recherches de M. Sylow se rapprochent plus de celles auxquelles le nom d'Abel demeurera éternellement attaché. En tous cas, la nouvelle édition fait le plus grand honneur à cette collaboration des deux géomètres, et nous ne craignons pas de dire qu'elle est et restera, à très peu de chose près, l'édition définitive. On réimprimera encore les Œuvres d'Abel, nous aimons à l'espérer; mais on fera peu de changements à l'œuvre

que nous avons sous les yeux. Les éditeurs ont d'ailleurs profité des conseils et du précieux concours de plusieurs savants qui ont suivi la voie ouverte par Abel ou ajouté à ses découvertes. Ils citent particulièrement MM. Clebsch, Kronecker, Weierstrass, Broch, Jordan (C.), Schering et Borchardt. L'Académie des Sciences de Berlin a bien voulu mettre à leur disposition les manuscrits de plusieurs Mémoires imprimés par le *Journal de Crelle* et a ainsi rendu, nous le verrons, un important service à la nouvelle publication.

Les éditeurs ont pris pour règle d'admettre, dans la nouvelle édition, tous les travaux *publiés* par Abel; ils n'ont fait d'exception que pour un Opuscule inséré en 1824 dans le *Magasin des Sciences naturelles*, opuscule qui contient une faute grave, reconnue par Abel. En outre, ils ont cherché à recueillir tous les manuscrits et toutes les lettres d'Abel encore existantes et les ont soumis à un examen minutieux, pour en extraire tout ce qui pouvait présenter quelque intérêt scientifique. Malheureusement, ils n'ont pu retrouver tout ce qui existait entre les mains de Holmboe, et il y a lieu de penser qu'une partie des manuscrits d'Abel a été détruite par un incendie survenu peu après la mort d'Holmboe. Néanmoins leur examen n'a pas été infructueux, et il leur a montré que plusieurs théorèmes, trouvés plus tard par d'autres géomètres, étaient énoncés dans des Notes inédites d'Abel. Outre les théorèmes déjà donnés par Holmboe sur les équations résolubles par radicaux, nous signalerons un théorème fondamental sur les relations qui peuvent avoir lieu entre des intégrales de différentielles algébriques, qu'Abel avait énoncé sans démonstration dans une lettre à Legendre ; en outre, une proposition, très générale, sur la convergence des séries, qui a fait l'objet d'un beau Mémoire de M. Bertrand, publié dans le *Journal de Liouville*.

Le Tome I contient tout ce qui a été publié par Abel, à l'exception du Mémoire dont nous avons parlé plus haut. Voici la liste des Mémoires :

I. Méthode générale pour trouver des fonctions d'une seule quantité variable, lorsqu'une propriété de ces fonctions est exprimée par une équation entre deux variables.

II. Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies.

C'est dans ce Mémoire que se trouve, pour la première fois, la belle démonstration relative à la tautochrone, ou plutôt à un problème plus général.

III. Mémoire sur les équations algébriques où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré.

IV. L'intégrale définie $\Sigma^n \varphi(x)$ exprimée par une intégrale définie simple

V. Petite contribution à la théorie de quelques fonctions transcendantes.

Les Mémoires III et V avaient été omis par Holmboe, parce que leur contenu se retrouve dans d'autres travaux d'Abel. Nous croyons qu'il y avait intérêt néanmoins à les reproduire.

VI. Recherche des fonctions de deux quantités variables indépendantes x et y, telles que $f(x, y)$, qui ont la propriété que

$$f[z, f(x, y)]$$

est une fonction symétrique de z, x et y.

Ce Mémoire, écrit en français, fut traduit en allemand pour les lecteurs du *Journal de Crelle*.

VII. Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations qui passent le quatrième degré.

Les éditeurs ont ajouté en appendice l'analyse de ce Mémoire qu'Abel avait donnée dans le *Bulletin de Férussac*. Cette analyse n'est pas signée, mais Abel s'en est reconnu l'auteur dans une lettre à Holmboe.

VIII. Remarque sur le Mémoire n° 4 du premier Cahier du *Journal de Crelle*.

IX. Résolution d'un problème de Mécanique.

X. Démonstration d'une expression de laquelle la formule binôme est un cas particulier.

XI. Sur l'intégration de la formule différentielle $\frac{\rho\,dx}{\sqrt{R}}$, R et ρ étant des fonctions entières.

XII. Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes.

Ce Mémoire est celui qui a été présenté en 1826 à l'Académie des Sciences de Paris et qui a été publié dans le tome VII des *Savants étrangers*.

C'est dans ce Mémoire que, suivant une remarque fort juste des éditeurs, nous voyons apparaître pour la première fois le nombre p de Riemann. On lira avec le plus grand intérêt la Note publiée sur ce sujet, p. 298-300 du tome II.

XIII. Recherche de la quantité qui satisfait à la fois à deux équations algébriques données.

Ce Mémoire, inséré dans les *Annales de Gergonne,* ne figurait pas dans l'édition d'Holmboe.

XIV. Recherches sur la série $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots$.

XV. Sur quelques intégrales définies.

XVI. Recherches sur les fonctions elliptiques.

XVII. Sur les fonctions qui satisfont à l'équation

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \psi[xf(y) + yf(x)].$$

XVIII. Note sur un Mémoire de M. L. Olivier, ayant pour titre : *Remarques sur les séries infinies et leur convergence.*

XIX. Solution d'un problème général concernant la transformation des fonctions elliptiques.

XX. Addition au Mémoire précédent.

XXI. Remarque sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes.

XXII. Sur le nombre des transformations différentes qu'on peut faire subir à une fonction elliptique par la substitution d'une

fonction rationnelle dont le degré est un nombre premier donné.

XXIII. Théorème général sur la transformation des fonctions elliptiques de la seconde et de la troisième espèce.

XXIV. Note sur quelques formules elliptiques.

XXV. Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement.

XXVI. Théorèmes sur les fonctions elliptiques.

XXVII. Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendantes.

XXVIII. Précis d'une théorie des fonctions elliptiques.

XXIX. Théorèmes et problèmes.

Ces derniers Mémoires étaient tous connus ; nous ne saurions trop apprécier les notes excellentes dont MM. Sylow et Lie les ont enrichis ; elles seront d'un précieux secours à tous ceux qui auront à consulter la nouvelle édition.

Le Tome II comprend les Œuvres posthumes, les extraits de Lettres d'Abel et les Notes dont nous venons de parler. Voici comment s'expriment à ce sujet les éditeurs : « Tout en reconnaissant le grand mérite de Holmboe, comme l'habile maître et le fidèle ami d'Abel, et aussi comme le zélé éditeur de ses Œuvres, nous ne pouvons nous empêcher de faire observer qu'à notre avis l'éditeur n'a pas toujours traité les manuscrits laissés par Abel avec toute la critique désirable. En effet, dans le second Volume de son édition, il a imprimé, à côté de plusieurs Mémoires précieux, un certain nombre de travaux de jeunesse, datant d'une période où la critique d'Abel ne s'était pas encore complètement développée. Et même quand Abel parle plus tard des faux résultats auxquels conduit un raisonnement peu rigoureux, il nous paraît évident qu'il pense, entre autres, aux erreurs auxquelles il avait été porté lui-même dans ses anciens travaux, depuis longtemps rejetés par lui ; or ce sont ceux-là qu'a admis Holmboe, après la mort de l'auteur, parmi ses Œuvres complètes. Si nous avions à faire la première édition des Œuvres d'Abel, nous aurions renoncé à publier plusieurs travaux imprimés dans le second Volume

de l'édition de Holmboe. Cependant, comme ces travaux sont déjà connus du public et souvent cités, nous ne nous sommes décidés à omettre que trois des travaux publiés par Holmboe, lesquels nous semblent n'avoir plus aucun intérêt, même historique. D'autre part, nous avons cru devoir mettre au jour plusieurs parties inédites des manuscrits d'Abel, dont quelques-unes présentent un grand intérêt. »

Une bonne partie des manuscrits a malheureusement été perdue, nous l'avons déjà dit, et les treize premiers Mémoires du Tome II sont réimprimés uniquement d'après la première édition. Les éditeurs donnent la liste complète des manuscrits d'Abel qui existent encore. Ils ont pu aussi publier des extraits plus complets de certaines Lettres d'Abel. Bien des points intéressants seraient à signaler dans ce second volume, dont la publication et l'arrangement ont dû coûter beaucoup de peine et feront honneur aux éditeurs. Mais nous croyons en avoir assez dit pour faire comprendre tout le mérite de cette édition et tout ce qu'on y trouvera de nouveau. Les fragments publiés pour la première fois ont presque tous une réelle importance ; ils sont judicieusement choisis, et ne pourront qu'augmenter l'admiration qu'éprouve pour Abel tout véritable géomètre. Dans ce concours pacifique, auquel prennent part aujourd'hui toutes les nations, et dont le résultat sera d'élever aux savants un monument vraiment durable par la publication de leurs œuvres, la Norvège a tenu dignement sa place. En exprimant cette pensée, nous sommes assuré de l'assentiment de tous ceux qui regardent une haute culture intellectuelle et morale comme le premier titre d'une nation. G. D.

MÉLANGES.

SUR QUELQUES SÉRIES POUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS A UNE SEULE VARIABLE;

PAR M. HALPHEN.

Une série nouvelle que M. Léauté a fait connaître, il y a peu de temps, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des*

Sciences (t. XC, p. 1404) et dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (t. VII, p. 185), a été pour moi l'occasion du présent Mémoire. En cherchant les conditions d'existence de la série de M. Léauté, j'ai été conduit à des séries plus générales qui ne paraissent pas, il est vrai, susceptibles de beaucoup d'applications, mais qui me semblent offrir un intérêt théorique, surtout à cause des divers points de vue auxquels on peut les envisager. Elles peuvent être définies, en effet, comme fournissant le développement d'une fonction, ou bien suivant les dérivées d'une autre fonction, ou bien suivant des polynômes successifs, se déduisant les uns des autres par intégration. De tels polynômes forment une classe étendue et pleine d'intérêt, qui a été signalée à l'attention par M. Appell, dans un Mémoire inséré aux *Annales de l'École Normale* (2[e] série, t. IX).

1. Considérons une suite indéfinie de polynômes entiers, contenant une variable x, dont le premier soit une simple constante, et dont chacun soit la dérivée du suivant. Soient P_0, $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... ces polynômes rangés par ordre : on aura, par construction,

$$(1) \qquad P_{m-1}(x) = \frac{dP_m(x)}{dx},$$

et $P_m(x)$ est du degré m.

Soit, d'autre part, $f(x)$ une fonction quelconque, et, désignant par a une arbitraire, envisageons l'intégrale définie

$$(2) \quad U_m(a) = (a-x)\int_0^1 P_m[tx+(1-t)a]f^{(m+1)}[ta+(1-t)x]dt.$$

L'intégration par parties, si l'on tient compte de (1), donne

$$U_m(a) - U_{m-1}(a) = f^{(m)}(a)P_m(x) - f^{(m)}(x)P_m(a).$$

En changeant successivement l'indice m en $m-1$, $m-2$, ..., j'ai une suite de relations analogues, dont la dernière est

$$U_0(a) = f(a)P_0 - f(x)P_0.$$

De là je conclus l'expression suivante de $U_m(a)$:

$$(3) \qquad U_m(a) = \left\{ \begin{array}{l} f(a)P_0 + f'(a)P_1(x) \\ \quad + f''(a)P_2(x) + \ldots + f^{(m)}(a)P_m(x), \\ - f(x)P_0 - f'(x)P_1(a) \\ \quad - f''(x)P_2(a) - \ldots - f^{(m)}(x)P_m(a) \end{array} \right. \text{ (1)}.$$

Cette identité est la source de diverses séries, suivant les conditions subsidiaires par lesquelles on achève la détermination des polynômes P. On observera, en passant, le cas où l'on ferait

$$P_m(x) = \frac{(x-a)^m}{1.2\ldots m}.$$

C'est la série ordinaire de Taylor que l'on obtient avec une expression du reste et une démonstration qui n'ont rien de nouveau.

2. Pour déduire de la formule (3) une classe de séries nouvelles, je détermine les polynômes P par la condition que tous, sauf un seul, satisfassent à la condition

$$(4) \qquad AP_m(a) + BP_m(b) + CP_m(c) + \ldots + LP_m(l) = 0,$$

où A, B, C, ..., L, a, b, c, ... l sont des constantes données.

Une telle condition peut toujours être satisfaite, et par une seule série de polynômes. C'est ce que je vais d'abord montrer.

En premier lieu, si la somme $A + B + C + \ldots + L$ n'est pas nulle, la condition (4) ne peut être satisfaite par le polynôme P_0, qui est une simple constante. Mais elle peut l'être par tous les polynômes suivants, qui se déduisent chacun du précédent par une intégration : la condition (4) servira à déterminer chaque fois la constante introduite par cette intégration.

En second lieu, si la somme $A + B + C + \ldots + L$ est nulle,

---

(1) Cette formule ne diffère qu'en apparence de celle qu'a donnée M. Darboux dans son Mémoire *Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable*. (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3e série, t. II, p. [illegible]). Je fais allusion ici à la formule 7 (page 296) du Mémoire que je viens [illegible]

pour en finir d'un seul coup, supposons, en outre,

$$\begin{array}{llllll}
A & +B & +C & +\ldots+L & =0, \\
Aa & +Bb & +Cc & +\ldots+Ll & =0, \\
Aa^2 & +Bb^2 & +Cc^2 & +\ldots+Ll^2 & =0, \\
\multicolumn{6}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,} \\
\multicolumn{6}{l}{Aa^{k-1}+Bb^{k-1}+Cc^{k-1}+\ldots+Ll^{k-1}=0,}
\end{array}$$

en sorte que l'exposant k soit le plus petit de ceux, parmi les entiers positifs μ, pour lesquels la quantité

$$Aa^\mu + Bb^\mu + Cc^\mu + \ldots + Ll^\mu$$

ne soit pas nulle.

D'après ces hypothèses, la relation (4) est vérifiée d'elle-même pour les indices $m = 0, 1, 2, \ldots, (k-1)$, quels que soient d'ailleurs les polynômes P.

Elle est impossible pour l'indice $m = k$. On peut maintenant choisir les polynômes de telle sorte que la relation (4) soit vérifiée pour tous les indices supérieurs à k. Mais il est à remarquer que, de cette manière, les polynômes d'indice moindre se trouvent entièrement déterminés.

Effectivement, la suite indéfinie des polynômes P, d'après la condition (1), dépend d'une série simple de constantes arbitraires $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$, et l'on a

$$\begin{aligned}
P_m(x) = \lambda_0 \frac{x^m}{1.2\ldots m} &+ \lambda_1 \frac{x^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} \\
&+ \lambda_2 \frac{x^{m-2}}{1.2\ldots(m-2)} + \ldots + \lambda_{m-1} x + \lambda_m.
\end{aligned}$$

Pour l'indice $m = k+1$, la condition (4) donne une relation entre λ_0 et λ_1; pour l'indice $k+2$, une relation entre $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ et ainsi de suite.

J'achève enfin la détermination des polynômes, en faisant, pour l'indice k,

$$AP_k(a) + BP_k(b) + CP_k(c) + \ldots + LP_k(l) = 1.$$

Ce résultat est obtenu si l'on prend

$$\lambda_0 = \frac{1.2\ldots k}{Aa^k + Bb^k + Cc^k + \ldots + Ll^k}.$$

En résumé, voici comment sont choisis les polynômes dont il s'agit :

Soient A, B, C, ..., L, *et* a, b, c, ..., l *des constantes; envisageons les quantités*

$$T_\mu = A a^\mu + B b^\mu + C c^\mu + \ldots + L l^\mu,$$

et soit T_k *la première de ces quantités qui ne soit pas nulle dans la suite* $T_0, T_1, T_2, \ldots$.

Il existe une suite indéfinie de polynômes $P_m(x)$, *tels que l'on ait*

$$(5) \qquad AP_k(a) + BP_k(b) + CP_k(c) + \ldots + LP_k(l) = 1,$$

et, pour tous les indices m autres que k,

$$(6) \qquad AP_m(a) + BP_m(b) + CP_m(c) + \ldots + LP_m(l) = 0.$$

Ces polynômes satisfont d'ailleurs à la condition (1), *c'est-à-dire que chacun d'eux est la dérivée du suivant.*

Tels sont les polynômes que je choisis pour former la série dont je vais m'occuper.

On a aisément une expression concise de ces polynômes, par la formule

$$(7) \qquad P_m(x) = \frac{1}{1.2\ldots m}\left(\frac{d^m}{d\zeta^m}\,\frac{\zeta^k e^{\zeta x}}{A e^{\zeta a} + B e^{\zeta b} + \ldots + L e^{\zeta l}}\right)_{\zeta=0}.$$

3. Revenons à la formule (3), mettons successivement $b, c, \ldots, l$ au lieu de a, formons la quantité

$$(8) \qquad -R_m = AU_m(a) + BU_m(b) + CU_m(c) + \ldots + LU_m(l),$$

et tenons compte des relations (5) et (6). Le résultat est celui-ci :

$$(9) \quad \left\{\begin{aligned} f^{(k)}(x) = \quad & [Af(a) + Bf(b) + \ldots + Lf(l)]P_0 \\ & + [Af'(a) + Bf'(b) + \ldots + Lf'(l)]P_1(x) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + [Af^{(m)}(a) + Bf(b) + \ldots + Lf^{(m)}(l)]P_m(x) + R_m. \end{aligned}\right.$$

Ainsi, *avec les polynômes* P *ci-dessus définis et une fonction*

quelconque $f(x)$, on peut former une série dont le terme général est

$$[\mathrm{A}f^{(m)}(a)+\mathrm{B}f^{(m)}(b)+\ldots+\mathrm{L}f^{(m)}(l)]\mathrm{P}_m(x),$$

et qui représente la dérivée d'ordre k de cette fonction $f(x)$, sauf un reste dont l'équation (8) fournit l'expression par une intégrale définie.

4. Pour commencer l'étude de cette série (9), j'en fais l'application à la fonction

$$f(x)=e^{\zeta x}.$$

Le terme général sera

$$\zeta^m(\mathrm{A}e^{\zeta a}+\mathrm{B}e^{\zeta b}+\ldots+\mathrm{L}e^{\zeta l})\mathrm{P}_m(x).$$

La série indéfiniment prolongée donne donc pour résultat,

$$(\mathrm{A}e^{\zeta a}+\mathrm{B}e^{\zeta b}+\ldots+\mathrm{L}e^{\zeta l})[\mathrm{P}_0+\mathrm{P}_1(x)\zeta+\mathrm{P}_2(x)\zeta^2+\ldots].$$

Si elle converge, on voit, d'après (7), qu'elle représente $\zeta^k e^{\zeta x}$, ce qui est bien $f^{(k)}(x)$.

Posons, pour abréger,

$$\lambda(\zeta)=\mathrm{A}e^{\zeta a}+\mathrm{B}e^{\zeta b}+\ldots+\mathrm{L}e^{\zeta l}. \tag{10}$$

Soit ρ le plus petit module des racines de l'équation $\lambda(\zeta)=0$, sauf zéro. La série

$$\mathrm{P}_0+\mathrm{P}_1(x)\zeta+\mathrm{P}_2(x)\zeta^2+\ldots$$

représente ou non la fonction $\dfrac{\zeta^k e^{\zeta x}}{\lambda(\zeta)}$ suivant que le module de ζ est inférieur ou supérieur à ρ. Donc *la série (9), indéfiniment prolongée, s'applique à la fonction $e^{\zeta x}$ ou ne s'y applique pas, suivant que ζ est inférieur ou supérieur au plus petit module ρ des racines, autres que zéro, de l'équation* $\lambda(\zeta)=0$.

Il est bien digne de remarque que cette condition soit indépendante de x. Ce trait essentiel de la série (9) va se retrouver pour tous les cas. Déjà nous voyons qu'il subsiste pour les fonctions composées de sommes d'exponentielles. Par exemple, aux fonctions $\sin\zeta x$, $\cos\zeta x$ la série (9) s'applique dans le cas seulement où ζ est de module moindre que ρ.

La considération de la fonction

$$\varphi(\zeta) = \frac{\zeta^k e^{\zeta x}}{\lambda(\zeta)}$$

conduit tout naturellement à rechercher l'expression asymptotique des polynômes $P_m(x)$ pour m infiniment grand, au moyen de la belle méthode que M. Darboux a développée dans son Mémoire *Sur l'approximation des fonctions de grands nombres* (¹). Le principe de cette méthode, pour le cas actuel, est si simple que je vais le rappeler.

5. Considérons une fraction rationnelle $\Phi(\zeta)$ dont les infinis aient tous le même module ρ. Rangeons les fractions simples, dans lesquelles $\Phi(\zeta)$ se décompose, suivant l'ordre décroissant des exposants de leurs dénominateurs, et soit ainsi

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) = {} & \frac{M}{(u-\zeta)^p} + \frac{M'}{(u'-\zeta)^p} + \frac{M''}{(u''-\zeta)^p} + \ldots, \\ & + \frac{N}{(v-\zeta)^{p-1}} + \frac{N'}{(v'-\zeta)^{p-1}} + \frac{N''}{(v''-\zeta)^{p-1}} + \ldots, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Suivant l'hypothèse, $u, u', u'', \ldots, v, v', v'', \ldots$ ont un même module ρ.

Prenons la dérivée d'ordre m, et faisons $\zeta = 0$,

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\Phi^{(m)}(0)}{1.2\ldots m} \\ & = \frac{p(p+1)\ldots(p+m-1)}{1.2\ldots m}\left(\frac{M}{u^{p+m}} + \frac{M'}{u'^{p+m}} + \frac{M''}{u''^{p+m}} + \ldots\right) \\ & + \frac{(p-1)p\ldots(p+m-2)}{1.2\ldots m}\left(\frac{N}{v^{p+m-1}} + \frac{N'}{v'^{p+m-1}} + \frac{N''}{v''^{p+m-1}} + \ldots\right) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Si nous considérons comme formant un seul terme la somme des termes de la première ligne, comme un autre terme la somme des termes de la seconde ligne, et ainsi de suite, nous avons là,

(¹) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3ᵉ série, t. IV.

pour m infiniment grand, des quantités rangées dans l'ordre décroissant en ce qui concerne leurs grandeurs. Le premier terme est la partie principale. Il pourrait, bien entendu, se présenter des cas d'exception si ce premier terme était nul.

En second lieu, considérons une fonction $\Psi(\zeta)$, synectique autour de l'origine, et dont les points singuliers les plus proches de l'origine soient des pôles, à distance ρ. Il existe alors une fraction $\Phi(\zeta)$, dont la différence à $\Psi(\zeta)$ est synectique dans un rayon ρ_1, plus grand que ρ. Dans ce rayon, la série de Maclaurin, appliquée à $\Psi(\zeta)-\Phi(\zeta)$, converge. Donc, en désignant par ε une quantité infiniment petite avec $\frac{1}{m}$, on a

$$\frac{\Psi^{(m)}(0)-\Phi^{(m)}(0)}{1.2\ldots m}=\frac{\varepsilon}{\rho_1^m}. \tag{12}$$

Ce qui vient d'être dit pour une fonction telle que $\Psi(\zeta)$ peut être appliqué à la fonction $\varphi(\zeta)$ qui nous occupe. Le rayon ρ est alors le module minimum des racines, autres que zéro, de la fonction $\lambda(\zeta)$. Les quantités u, u', ... sont ces racines ; elles sont indépendantes de x. Quant aux numérateurs des fractions simples, ils sont de cette forme :

$$\begin{array}{lll} \mathrm{M}=\mathrm{a}e^{ux}, & \mathrm{M}'=\mathrm{a}'e^{u'x}, & \mathrm{M}''=\mathrm{a}''e^{u''x},\ \ldots, \\ \mathrm{N}=(\mathrm{b}x+\mathrm{c})e^{vx}, & \mathrm{N}'=(\mathrm{b}'x+\mathrm{c}')e^{v'x}, & \mathrm{N}''=(\mathrm{b}''x+\mathrm{c}'')e^{v''x},\ldots, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots, \end{array}$$

où a, a', ..., c'', ... sont des constantes.

Nous avons pour définition générale des polynômes $\mathrm{P}_m(x)$ l'expression

$$\mathrm{P}_m(x)=\frac{\varphi^{(m)}(0)}{1.2\ldots m};$$

en conséquence, l'étude qui vient d'être faite nous apprend comment se comportent ces polynômes pour m infiniment grand. Il nous est possible de répondre aux questions posées.

6. Je vais considérer une série S composée avec les polynômes $\mathrm{P}_m(x)$ et des coefficients μ_0, μ_1, ... indépendants de x :

$$\mathrm{S}=\mu_0\mathrm{P}_0+\mu_1\mathrm{P}_1(x)+\mu_2\mathrm{P}_2(x)+\ldots+\mu_m\mathrm{P}_m(x)+\ldots,$$

et je vais faire voir d'abord que *si, pour une suite continue de valeurs attribuées à x, la série* S *converge, il en est de même dans la série* Σ,

$$\Sigma = \mu_0 \Phi(0) + \mu_1 \Phi'(0) + \mu_2 \frac{\Phi''(0)}{1.2} + \ldots + \mu_m \frac{\Phi^{(m)}(0)}{1.2\ldots m} + \ldots,$$

obtenue en remplaçant la fonction $\varphi(\zeta)$ *par la fraction rationnelle* $\Phi(\zeta)$, *et réciproquement.*

En premier lieu, cherchons la condition pour que le $(m+1)^{\text{ième}}$ terme de S soit infiniment petit avec $\frac{1}{m}$. D'après les expressions de M, M′, ... la partie principale de $P_m(x)$ est

$$\frac{p(p+1)(p+m-1)}{1.2\ldots m}\left[\frac{a e^{ux}}{u^{p+m}} + \frac{a' e^{u'x}}{u'^{p+m}} + \frac{a'' e^{u''x}}{u''^{p+m}} + \ldots\right],$$

si toutefois le facteur entre crochets n'est pas nul. Mais u, u', u'',... sont essentiellement différents entre eux. Ce facteur ne peut donc être nul pour une suite continue de valeurs attribuées à x. On a donc bien ainsi la partie principale de $P_m(x)$. Pour que $\mu_m P_m(x)$ soit infiniment petit avec $\frac{1}{m}$ dans les mêmes conditions, il faut et il suffit qu'il en soit de même quand on remplace $P_m(x)$ par un seul des termes ci-dessus. Désignant toujours par ρ le module commun à u, u', u'', ..., et par ν_m la quantité

$$\nu_m = \frac{p(p+1)\ldots(p+m-1)}{1.2\ldots m}\,\frac{\mu_m}{\rho^m},$$

j'ai cette condition : ν_m *doit être infiniment petit avec* $\frac{1}{m}$.

Démontrons maintenant la proposition. A cet effet, envisageons la quantité

$$\mu_m\left[P_m(x) - \frac{\Phi^{(m)}(0)}{1.2\ldots m}\right],$$

que, d'après la relation (12), nous pouvons écrire

$$(13) \qquad \nu_m \frac{1.2\ldots m}{p(p+1)\ldots(p+m-1)}\,\varepsilon\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^m.$$

Comme ν_m est infiniment petit et $\frac{\rho_1}{\rho}$ inférieur à l'unité, on a là

le terme général d'une série [redacted]t convergente. Donc : 1° si le $m^{\text{ième}}$ terme d'une des séries [redacted]n'est pas infiniment petit avec $\frac{1}{m}$, il en est de même pour l'au[redacted]; 2° si le $m^{\text{ième}}$ terme est infiniment petit avec $\frac{1}{m}$, la différence [redacted]deux séries est une série convergente. La proposition est donc pr[redacted]ée.

7. Pour étudier la série S, il suffit donc d'[redacted]iner la série Σ.

En tenant compte des expressions qu'affect[redacted]ci les numérateurs M, M′,..., et aussi de l'égalité (11), o[redacted]econnaît que le $(m+1)^{\text{ième}}$ terme de Σ est une somme de [redacted]ités, en nombre limité, ayant la forme $G(m)x^r e^{ux}$, où [redacted]ctions telles que $G(m)$ sont indépendantes de x.

La convergence, devant avoir lieu pour une suite continue de valeurs attribuées à x, exige que chacune des séries, dont le terme général est tel que $G(m)$, converge séparément. Cette condition se réduit d'ailleurs à celle de la convergence pour la série dont le terme général est ν_m. Quand cette condition est remplie, la convergence a lieu, quel que soit x.

Voici donc la conclusion :

Désignons par ρ le module minimum des racines, autres que zéro, de l'équation

$$(14) \qquad A e^{a\zeta} + B e^{b\zeta} + C e^{c\zeta} + \ldots = 0,$$

et soit une série composée avec les polynômes $P_m(x)$, définis ci-dessus, et des coefficients $\mu_0, \mu_1, \ldots$ indépendants de x, comme il suit :

$$S = \mu_0 P_0 + \mu_1 P_1(x) + \ldots + \mu_m P_m(x) \ldots.$$

1° *Si cette série est convergente pour une suite continue de valeurs attribuées à x, elle est convergente, quel que soit x ;*

2° *La condition nécessaire et suffisante pour cette convergence est que la série*

$$\mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \ldots + \mu_m x^m \ldots$$

soit convergente dans un cercle de rayon supérieur à $\frac{1}{\rho}$.

8. Après cette étude sur la série générale S, examinons le cas où l'on compose cette série en prenant

$$\mu_m = \mathrm{A} f^{(m)}(a) + \mathrm{B} f^{(m)}(b) + \mathrm{C} f^{(m)}(c) \ldots .$$

Il ne s'agit plus seulement de savoir si la série converge, mais encore si elle représente $f^{(k)}(x)$. A cet égard, il est bon d'observer (¹) que la série peut très bien converger sans représenter la fonction. Désignons par ζ une racine quelconque de l'équation (14), et prenons la fonction $e^{\zeta x}$. Pour cette fonction particulière, tous les coefficients de la série sont nuls. Deux fonctions telles que $f(x)$ et $f(x) + e^{\zeta x}$ donnent ainsi lieu à une même série, qui, si elle représente l'une des fonctions, ne peut représenter l'autre.

La question posée se trouve résolue comme il suit :

Pour que la série (9) *s'applique à une fonction $f(x)$, il faut et il suffit :*

1° *Qu'il existe une constante α telle, que le produit $\alpha^m f^{(m)}(x)$, pour toute valeur finie attribuée à x, ne devienne pas infini avec m ;*

2° *Que la constante α ait un module supérieur à $\frac{1}{\rho}$.*

En premier lieu, ces conditions sont suffisantes ; c'est ce que montre immédiatement la forme (8) du reste de la série, combinée avec l'expression asymptotique des polynômes $\mathrm{P}_m(x)$. Effectivement, ces conditions remplies, les intégrales $\mathrm{U}_m(a)$, $\mathrm{U}_m(b)$,... sont infiniment petites avec $\frac{1}{m}$.

Pour prouver maintenant que les conditions dont il s'agit sont aussi nécessaires, reprenons la série S, où les constantes sont choisies de manière qu'elle converge. Désignons par $\mathrm{F}(x)$ la somme de la série ; c'est, d'après la proposition du n° 7, une fonction finie et uniforme dans tout le plan. J'ai, tout à l'heure, décomposé cette série en la somme de quelques autres $x^r e^{ux} \sum \mathrm{G}(m)$, et en une autre dont le terme général est donné par l'expression (13). De

(¹) Cette observation est imitée de celle que Cauchy a faite autrefois à l'égard de la série de Maclaurin et de la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$.

cette décomposition résulte que la série peut être différentiée par rapport à x. J'ai ainsi, quels que soient x et m,

$$(15) \qquad F^{(m)}(x) = \mu_m P_0 + \mu_{m+1} P_1(x) + \mu_{m+2} P_2(x) + \dots,$$

comme il résulte de la propriété (1) des polynômes P. Multiplions les deux membres de cette égalité par ρ^m, et observons que, d'après les hypothèses, tous les termes du second membre sont infiniment petits avec $\frac{1}{m}$, pour conclure que *le produit* $\frac{1}{\rho^m} F^{(m)}(x)$ *a pour limite zéro, quel que soit* x.

Ainsi la fonction $F(x)$, somme d'une série telle que S, satisfait nécessairement aux conditions de l'énoncé précédent. La proposition est ainsi prouvée.

9. Par cette voie, on retrouve immédiatement la composition des coefficients de la série par rapport à la fonction $F(x)$. En effet, de l'égalité (15) et de la définition des polynômes P (n° 2) résulte

$$(16) \qquad AF^{(m)}(a) + BF^{(m)}(b) + CF^{(m)}(c) + \dots = \mu_{m+k}.$$

Il est bien naturel de se demander maintenant, s'il est possible, ayant défini une fonction $F(x)$ par la série S, de caractériser $F(x)$ de quelque autre manière. Pour le faire, envisageons la fonction suivante :

$$V(x) = \mu_0 + \mu_1 \frac{x}{1} + \mu_2 \frac{x^2}{1.2} + \dots + \mu_m \frac{x^m}{1.2\dots m} + \dots,$$

qui, dans le cas où S converge, est synectique dans tout le plan. L'ensemble des relations telles que (16) conduit à cette conséquence

$$(17) \quad AF(a+x) + BF(b+x) + CF(c+x) + \dots = V^{(k)}(x).$$

Ainsi la fonction $F(x)$ peut être définie comme une solution de cette équation. Mais encore faut-il savoir quelle solution on doit choisir ; c'est ce que permet de décider une des propriétés trouvées tout à l'heure :

La somme de la série S *est, parmi les solutions* $F(x)$ *de*

l'équation (17), *l'unique fonction pour laquelle le produit* $\frac{1}{\rho^m} F^{(m)}(x)$ *soit infiniment petit avec* $\frac{1}{m}$.

10. Quelques observations me semblent utiles au sujet des fonctions jouissant de cette propriété : $\alpha^m f^{(m)}(x)$ reste fini pour m infini, quel que soit x. D'après l'analyse actuelle, ou, plus simplement, par la série de Taylor, on voit qu'une telle fonction est synectique dans tout le plan. En second lieu, et cette remarque me paraît plus importante, on est assuré qu'une fonction jouit de la propriété en question, si on la lui reconnaît *pour une seule valeur de x,* aux environs de laquelle la fonction est synectique. Effectivement, prenons la relation

$$f^{(m)}(x+h) = f^{(m)}(x) + hf^{(m+1)}(x) + \frac{h^2}{1.2} f^{(m+2)}(x) + \ldots,$$

et multiplions les deux membres par α^m. Si nous supposons que $\alpha^m f^{(m)}(x)$ reste fini pour m infini, la série obtenue converge vers une quantité finie. Donc $\alpha^m f^{(m)}(x+h)$ reste fini pour m infini, et la proposition en résulte. Ainsi la fonction e^{x^2} ne jouit pas de la propriété dont il s'agit. Au contraire, les fonctions

$$e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}, \quad \cos\sqrt{x}, \quad \sqrt{x}\sin\sqrt{x},$$

et aussi les fonctions de Bessel en jouissent ; de plus, pour ces fonctions, la constante α est infiniment grande. On peut donc leur appliquer la série proposée, quelles que soient les constantes A, B, ..., a, b, ...

De la manière la plus générale, on obtient de telles fonctions $f(x)$ comme il suit :

Soit une fonction $\psi(x)$ définie par la série suivante, convergente à l'intérieur d'un cercle concentrique à l'origine et de rayon α,

$$\psi(x) = \psi_0 + \psi_1 x + \psi_2 x^2 + \psi_3 x^3 + \ldots,$$

et divergente à l'extérieur de ce cercle. Posons

$$f(x) = \psi_0 + \psi_1 \frac{x}{1} + \psi_2 \frac{x^2}{1.2} + \psi_3 \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

La fonction $f(x)$ aura la propriété demandée à l'égard de la con-

stante α. Au moyen de $\psi(x)$, on peut définir $f(x)$ par une intégrale; *on a, en effet,*

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int \psi(z) e^{\frac{x}{z}} \frac{dz}{z},$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour fermé embrassant l'origine, et dont tous les rayons sont inférieurs à α.

Suivant une expression employée par Abel, ψ est la *déterminante* de f.

On peut manifestement se servir de cette expression de $f(x)$ pour démontrer que les conditions de l'énoncé du n° 8 sont suffisantes et se dispenser ainsi de recourir à la forme du reste donnée au début de ce travail.

11. De l'égalité (15) et de la définition (17), je conclus

$$F(x+y) = P_0 V(y) + P_1(x) V'(y) + P_2(x) V''(y) + \ldots.$$

C'est un développement de $F(x)$, suivant les dérivées d'une autre fonction $V(y)$, ici liée à F par la relation (18). L'idée de généraliser de tels développements est bien naturelle, et j'y donnerai suite un peu plus loin. Je veux d'abord appliquer la théorie qui précède au cas particulièrement intéressant de la série imaginée par M. Léauté.

12. Si l'on réduit à deux le nombre des quantités $a, b, \ldots$, et qu'on prenne $A + B = 0$, on obtient, comme cas particulier, la série de M. Léauté. Ainsi cette série procède suivant des polynômes P, définis par l'expression

$$1.2\ldots m P_m(x) = \left(\frac{d^m}{d\zeta^m} \frac{\zeta e^{\zeta x}}{e^{\zeta a} - e^{\zeta b}}\right)_{\zeta=0}.$$

Cette expression suggère immédiatement l'idée d'un rapprochement avec les *polynômes de Bernoulli* (¹), qui sont définis par

---

(¹) Pour les polynômes de Bernoulli, consultez l'excellent ouvrage de M. Schlömilch, *Compendium der höheren Analysis* (3ᵉ édition), t. II, p. 211.

l'une ou l'autre des deux égalités suivantes :

$$\psi_m(z) = m[1^{m-1} + 2^{m-1} + 3^{m-1} + \ldots + (z-1)^{m-1}],$$
$$\psi_m(z) = \left[\frac{d^m}{d\zeta^m}\,\frac{\zeta(e^{\zeta z}-1)}{e^{\zeta}-1}\right]_{\zeta=0}.$$

Effectivement, si, en employant la notation usuelle des nombres de Bernoulli, on pose

$$\left(\frac{d^{2n}}{d\zeta^{2n}}\,\frac{\zeta}{e^{\zeta}-1}\right)_{\zeta=0} = (-1)^{n-1}B_{2n-1},$$

on trouve très aisément les deux relations suivantes :

$$P_{2n-1}(x) = \frac{(a-b)^{2n-2}}{1.2\ldots(2n-1)}\,\psi_{2n-1}\left(\frac{x-b}{a-b}\right),$$
$$P_{2n}(x) = \frac{(a-b)^{2n-1}}{1.2\ldots(2n)}\left[\psi_{2n}\left(\frac{x-b}{a-b}\right) + (-1)^{n+1}B_{2n-1}\right].$$

La fonction $\lambda(\zeta)$ a ici pour racines les quantités de la forme $\frac{2ni\pi}{a-b}$, où n est un entier quelconque. La racine zéro réservée, on en trouve deux ayant le module minimum. Ces racines sont $\pm\frac{2i\pi}{a-b}$, et l'on a

$$\rho = \frac{2\pi}{a-b}.$$

En conséquence du théorème général, on a donc cette proposition :

Si le produit $\alpha^m f^{(m)}(x)$, pour m infiniment grand, reste fini, la fonction $f(x)$ est développable suivant la série de M. Léauté, savoir :

$$f(x) = \frac{1}{a-b}\int_b^a f(x)\,dx + P_1(x)[f(a)-f(b)]$$
$$+ P_2(x)[f'(a)-f'(b)] + \ldots,$$

pourvu que l'intervalle $(a-b)$ soit inférieur à $2\pi\alpha$.

13. Cette série ayant, d'après son inventeur, une grande utilité pour les applications mécaniques, et pouvant dans beaucoup de

cas, même sans converger, fournir, par un nombre limité de termes, une approximation convenable, il sera bon de donner au reste de la série une forme pratique. C'est ce que je pourrai faire aisément ici, au moyen de l'expression de ce reste, savoir :

$$R_m = U_m(b) - U_m(a).$$

Au point de vue où je me place maintenant, on devra essentiellement supposer x réel et compris entre les deux constantes b, a.

Les polynômes de rang impair ont, dans l'intervalle de b à a, les seules racines b, $\frac{a+b}{2}$, a. Les polynômes de rang pair ont, dans cet intervalle, deux racines qui varient avec le rang. A cause de ces circonstances, on obtient la forme la plus simple du reste en s'arrêtant, dans la série, à un terme de rang pair. Je prendrai pour dernier terme celui qui a le rang $2m$. Le reste sera donc

$$R_{2m-1} = U_{2m-1}(b) - U_{2m-1}(a).$$

Il nous faut évaluer les deux intégrales U. Prenons d'abord la seconde

$$U_{2m-1}(a) = (a-x)\int_0^1 P_{2m-1}[tx+(1-t)a]\, f^{(2m)}[ta+(1-t)x]\,dt;$$

supposons $b < a$ et x compris entre b et $\frac{a+b}{2}\cdot$ Partageons le champ d'intégration en faisant varier d'abord t depuis zéro jusqu'à $\frac{a-b}{2(a-x)}$; alors $tx+(1-t)a$ varie de a jusqu'à $\frac{a+b}{2}$, en même temps que $ta+(1-t)x$ varie de x jusqu'à $x+\frac{a-b}{2}\cdot$ Cette partie de l'intégrale, dans le champ de laquelle le facteur P_{2m-1} ne change pas de signe, est

$$f^{(2m)}(\xi)\left[-P_{2m}\left(\frac{a+b}{2}\right)+P_{2m}(a)\right],$$

où ξ est intermédiaire entre x et $x+\frac{a-b}{2}\cdot$

Faisons varier ensuite t depuis $\frac{a-b}{2(a-x)}$ jusqu'à l'unité ; alors

$tx+(1-t)a$ varie de $\frac{a+b}{2}$ à x, tandis que $ta+(1-t)x$ varie de $x+\frac{a-b}{2}$ à a. Cette partie de l'intégrale est

$$f^{(2m)}(\xi')\left[-P_{2m}(x)+P_{2m}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right],$$

où ξ' est intermédiaire entre $x+\frac{a-b}{2}$ et a.

Prenons maintenant l'intégrale

$$U_{2m-1}(b)=(b-x)\int_0 P_{2m-1}[tx+(1-t)b]f^{(2m)}[tb+(1-t)x]\,dt;$$

dans le champ de l'intégration, $tx+(1-t)b$ varie depuis b jusqu'à x; en sorte que P_{2m-1} ne change pas de signe, et l'on a, pour cette intégrale,

$$f^{2m}(\xi'')[P_{2m}(b)-P_{2m}(x)],$$

où ξ'' est intermédiaire entre x et b.

Le reste a donc la forme suivante :

$$\begin{aligned}R_{2m-1}= &\ f^{(2m)}(\xi'')[P_{2m}(b) - P_{2m}(x)]\\ &+f^{(2m)}(\xi)\left[P_{2m}(a) - P_{2m}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\\ &+f^{(2m)}(\xi')\left[P_{2m}\left(\frac{a+b}{2}\right)-P_{2m}(x)\right],\end{aligned}$$

où ξ'', ξ, ξ' sont respectivement dans les intervalles $(b,\,x)$, $\left(x,\,x+\frac{a-b}{2}\right)$ et $\left(x+\frac{a-b}{2},\,a\right)$.

Si x est entre $\frac{a+b}{2}$ et a, on aura l'expression du reste en échangeant ici a et b et changeant le signe.

On a d'ailleurs

$$P_{2m}(a)=P_{2m}(b)=(-1)^{m+1}\frac{(a-b)^{2m-1}}{1.2\ldots(2m)}B_{2m-1},$$

$$P_{2m}\left(\frac{a+b}{2}\right)=(-1)^m\frac{(a-b)^{2m-1}}{1.2\ldots(2m)}\left(1-\frac{1}{2^{2m-1}}\right)B_{2m-1}.$$

L'expression asymptotique des polynômes P_m pour m infiniment grand pourra être utilisée pour fournir une expression approchée

de ce reste. Cette expression asymptotique se déduit immédiatement de l'analyse ci-dessus. On peut aussi la tirer du développement des polynômes P en série trigonométrique, développement qui est une conséquence de celui des polynômes de Bernoulli. *Voici ce développement, qui est valable quand x est compris entre b et a,*

$$P_{2n-1}(x) = (-1)^n 2\left(\frac{a-b}{\pi}\right)^{2n-2}\left[\frac{\sin 2\pi\frac{x-b}{a-b}}{2^{2n-1}} + \frac{\sin 4\pi\frac{x-b}{a-b}}{4^{2n-1}} + \ldots + \frac{\sin 2\mu\pi\frac{x-b}{a-b}}{(2\mu)^{(2n-1)}} + \ldots\right],$$

$$P_{2n}(x) = (-1)^{n+1} 2\left(\frac{a-b}{\pi}\right)^{2n-1}\left[\frac{\cos 2\pi\frac{x-b}{a-b}}{2^{2n}} + \frac{\cos 4\pi\frac{x-b}{a-b}}{4^{2n}} + \ldots + \frac{\cos 2\mu\pi\frac{x-b}{a-b}}{(2\mu)^{2n}} + \ldots\right].$$

Le premier terme de chacun de ces développements fournit une expression asymptotique.

14. On ne manquera pas d'observer que, si x est égal à a ou à b, la série vient coïncider avec un développement déjà connu, celui qui conduit à la *série des différences,* de Maclaurin ([1]). Effectivement, si l'on fait $x = b$, $a - b = h$, et qu'on tienne compte des relations

$$P_1(b) = -\frac{1}{2}, \quad P_{2m+1}(b) = 0, \quad P_{2m}(b) = (-1)^{m-1}\frac{(a-b)^{2m-1}}{1.2..(2m)}B_{2m-1},$$
$$f^{(m)}(a) - f^{(m)}(b) = \Delta f^{(m)}(b),$$

on obtient

$$hf(b) = \int_b^a f(x)\,dx - \frac{h}{2}\Delta f(b) + \frac{B_1 h^2}{1.2}\Delta f'(b) - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4}\Delta f''(b)\ldots.$$

([1]) Voir, par exemple, l'ouvrage déjà cité de M. Schlömilch, p. 229.

On a une autre série, tout à fait analogue, en prenant $x = \frac{a+b}{2}$:

$$hf\left(\frac{a+b}{2}\right) = \int_b^a f(x)\,dx - \left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{B_1 h^2}{1.2}\,\Delta f'(b)$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{8}\right)\frac{B_2 h^4}{1.2.3.4}\,\Delta f'''(b)\ldots.$$

15. J'arrive maintenant aux séries plus générales dont j'ai dit quelques mots précédemment (n° **11**). C'est encore de la formule (3), placée au début de ce Mémoire, que je vais les tirer. Pour ce but, la somme limitée, telle que $AU_m(a) + BU_m(b) + \ldots$, va être remplacée par une intégrale définie. Je multiplie donc les deux membres de l'équation (3) par une fonction arbitraire de la quantité a, considérée comme variable, et j'intègre entre deux limites constantes. Je détermine les polynômes P de manière à faire évanouir tous les termes, sauf un seul, dans la première partie du second membre, et j'obtiens la conclusion que voici :

Soient b, c des constantes, $\theta(z)$ une fonction quelconque, et considérons les quantités T_μ ainsi définies :

$$T_\mu = \int_b^c \theta(z) z^\mu\,dz.$$

Soit T_k la première de ces quantités qui ne soit pas nulle dans la suite $T_0, T_1, T_2, \ldots$. Prenons les polynômes P, dont l'expression générale est

$$P_m(x) = \frac{1}{1.2\ldots m}\left[\frac{d^m}{d\zeta^m}\frac{\zeta^k e^{\zeta x}}{\displaystyle\int_b^c e^{\zeta z}\theta(z)\,dz}\right]_{\zeta=0}. \tag{18}$$

La série, dont le terme général est

$$P_m(x)\int_b^c \theta(z) f^{(m)}(z)\,dz, \tag{19}$$

représente $f^{(k)}(x)$, sauf un reste dont l'expression, quand on s'arrête au $(m+1)^{ième}$ terme est la suivante :

$$R_m = \int_b^c \theta(z)\,dz \int_0^1 dt\,(x - z) P_m[tx + (1-t)z] f^{(m+1)}[tz + (1-t)x]. \tag{20}$$

16. On peut aussi remplacer l'intégration entre deux limites par l'intégration le long d'un contour, et obtenir de la sorte les résultats les plus variés. Pour chaque cas, l'étude des conditions sous lesquelles le reste R_m est infiniment petit avec $\frac{1}{m}$ présentera des circonstances diverses. Mais laissons tout d'abord de côté cette étude, et supposons que nous soyons effectivement dans un cas où ce reste ait zéro pour limite. Admettons, pour simplifier, que le nombre k soit zéro. De la série, si elle peut être différentiée, on tirera comme au n° **11**,

$$f(x+y)=P_0V(y)+P_1(x)V'(y)+P_2(x)V''(y)\ldots+P_m(x)V^{(m)}(y)\ldots.$$

De là cette conséquence : *Pour développer $f(x+y)$ suivant les dérivées successives d'une fonction quelconque* $V(y)$, *on déterminera une fonction* $\theta(z)$ *par la condition*

$$\int\theta(z)f(z+y)\,dz=V(y),$$

l'intégrale étant prise entre des limites constantes. Les coefficients des dérivées de $V(y)$ *seront les mêmes que ceux des puissances correspondantes de* ζ *dans le développement de la fonction*

$$\frac{e^{\zeta x}}{\int\theta(z)e^{\zeta z}dz}.$$

Les coefficients sont, comme l'on voit, des polynômes dont chacun est la dérivée du suivant. On peut prendre la question d'un autre point de vue, en se donnant ces polynômes. La manière la plus générale de les définir est la suivante : $P_m(x)$ est le $(m+1)^{\text{ième}}$ coefficient dans le développement de $e^{\zeta x}\varphi(\zeta)$ suivant les puissances croissantes de ζ. Pour trouver le développement demandé, on devra donc déterminer la fonction $\theta(z)$ par la condition

$$\frac{1}{\varphi(\zeta)}=\int e^{\zeta z}\theta(z)\,dz,$$

et c'est alors le développement ci-dessus qui satisfera à la question.

Enfin, une dernière observation générale. Si l'on suppose,

comme plus haut,

$$V(x) = \mu_0 + \mu_1 \frac{x}{1} + \mu_2 \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \mu_m \frac{x^m}{1.2\ldots m} \ldots,$$

et qu'on envisage la série

$$S = \mu_0 P_0 + \mu_1 P_1(x) + \mu_2 P_2(x) + \ldots + \mu_m P_m(x) \ldots$$

formée avec une suite donnée de polynômes P, la somme de cette série fournit une fonction $f(x)$, solution de l'équation

$$\int_b^c \theta(z) f(z+x)\, dz = V(x).$$

17. L'examen des conditions sous lesquelles s'applique la série si générale dont je viens de parler ne saurait être fait avec précision. Il faudra se restreindre à des cas particuliers. L'élément essentiel de la question réside dans la nature des points singuliers, les plus proches de l'origine, que possède la fonction $\frac{1}{\lambda(\zeta)}$. La fonction $\lambda(\zeta)$, analogue à celle qui a été envisagée plus haut, est ici

(21) $$\lambda(\zeta) = \int_b^c e^{\zeta z} \theta(z)\, dz.$$

En premier lieu, la définition (18) des polynômes $P_m(x)$ suppose implicitement la fonction $\lambda(\zeta)$ synectique autour de l'origine. De cette seule hypothèse résulte cette conséquence tout à fait générale : *la série définie au n° 15 s'applique aux fonctions $f(x)$ qui jouissent de la propriété déjà mentionnée, savoir : il existe une constante α, laissant fini le produit $\alpha^m f^{(m)}(x)$, pour m infini. A une telle fonction la série s'applique pourvu que le rayon maximum du cercle, ayant son centre à l'origine et à l'intérieur duquel la fonction $\frac{\zeta^k}{\lambda(\zeta)}$ est synectique, soit supérieur à l'inverse du module de la constante α.*

En effet, soit ρ ce rayon. Le produit $P_m(x)\rho_1^m$ est infiniment petit avec $\frac{1}{m}$, dès que ρ_1 est inférieur à ρ. Donc, d'après l'hypothèse, $P_m(x) f^{(m)}(y)$ est infiniment petit avec $\frac{1}{m}$, quels que soient

x et y. Donc le reste R_m est infiniment petit. C'est ce qu'il fallait prouver.

18. Les conditions précédentes, suffisantes dans tous les cas, sont aussi nécessaires toutes les fois que le rayon ρ existe. C'est ce qu'il est aisé de prouver au moyen d'une analyse semblable à celle que j'ai employée précédemment (n° 6). Les séries correspondantes ne s'appliquent donc qu'à des catégories très restreintes de fonctions, et perdent par là beaucoup de leur intérêt, au point de vue de l'analyse pure. Mais il en est tout autrement quand le rayon ρ est infini, c'est à dire quand la fonction $\lambda(\zeta)$, synectique dans tout le plan, n'a, en outre, aucun zéro. Un exemple de ce cas s'est offert à moi comme déjà connu : celui où la fonction $\lambda(\zeta)$ est $e^{a\zeta^2}$. C'est la série de M. Hermite ([1]). Mais cette série présente ce caractère très différent, qu'elle s'applique aussi à des fonctions discontinues, à la manière de la série de Fourier. Cette circonstance, qui tient à la détermination des coefficients par le moyen de la fonction seule et non plus de ses dérivées, m'a conduit à envisager spécialement les cas de la série générale où un pareil fait peut être mis en évidence.

D'après la forme (19) du terme général de la série, supposons la fonction $\theta(z)$ choisie de telle sorte qu'elle s'évanouisse, ainsi que toutes ses dérivées, aux deux limites b, c de l'intégration. Cela fait, le terme général prend cette nouvelle forme

$$(22) \qquad (-1)^m P_m(x) \int_b^c \theta^{(m)}(z) f(z)\, dz,$$

et se calcule au moyen de la fonction f seule, non plus de ses dérivées. Il est naturel de donner aussi une forme analogue au reste R_m (20), en faisant disparaître la dérivée de la fonction f. Dans cette transformation, il arrive que R_m se présente comme la différence de deux expressions dont l'une est $f(x)$, l'autre la somme de la série sous forme d'intégrale double. Je me contente de donner ici le résultat de la transformation et de le vérifier *a posteriori*.

([1]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LVIII.

Je prends pour point de départ l'intégrale double suivante :

$$(23) \qquad (-1)^m S_m = \iint dy\, dz\, f(z)\, \theta^{(m+1)}(y)\, P_m(x+y-z),$$

à l'intérieur de l'aire limitée par les conditions

$$(z-y)(x-z) > 0, \quad b < z < c,$$
$$(x-y)(x-z) > 0,$$

et je suppose d'ailleurs x compris entre b et c.

Commençons l'intégration par la variable y. Il faudra séparer l'intégrale en deux parties. Dans la première, les limites de y seront b, z, et celles de z, b et x; dans la seconde, les limites seront c, z pour y; et x, c pour z. La première de ces quadratures donne le résultat que voici :

$$(24) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_b^z \theta^{(m+1)}(y)\, P_m(x+y-z)\, dy \\ &\quad = P_m(x)\theta^{(m)}(z) - P_{m-1}(x)\theta^{(m-1)}(z) + \ldots \\ &\qquad \pm P_1(x)\theta'(z) \mp P_0\theta(z). \end{aligned} \right.$$

C'est ce qu'on voit, d'une part, à cause de la propriété fondamentale (1) des polynômes P, et, d'autre part, à cause de l'hypothèse que la fonction $\theta(z)$ et ses dérivées s'évanouissent à la limite b.

En intégrant la même différentielle entre les limites c, z, on aura ce même résultat. Les deux quadratures par rapport à z se réunissent donc en une seule : on doit multiplier la somme (24) par $f(z)\,dz$, et intégrer de b à c. Par conséquent,

$$\begin{aligned} S_m = P_0 \int_b^c \theta(z) f(z)\, dz - P_1(x) \int_b^c \theta'(z) f(z)\, dz \\ + P_2(x) \int_b^c \theta''(z) f(z)\, dz + \ldots \\ + (-1)^m P_m(x) \int_b^c \theta^{(m)}(z) f(z)\, dz. \end{aligned}$$

19. Ainsi se trouve exprimée par une intégrale définie la somme des $(m+1)$ premiers termes de la série. Dans chaque cas, on pourra faire usage de cette expression pour reconnaître la limite de cette somme. J'ai opéré cette vérification pour le cas où l'on

prend b, c égaux à $-\infty$ et $+\infty$, avec $\theta(z)=e^{-z^2}$. En faisant connaître cette série, M. Hermite a donné aussi l'expression asymptotique des polynômes correspondants. Du même coup, on a l'expression asymptotique de $\theta^{(m)}(z)$. Rien n'est plus aisé alors que d'obtenir la limite de l'intégrale (23), qui s'offre, comme pour la série de Fourier, sous la forme $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Les polynômes P, dans ce cas, forment une *suite de Sturm*. Aussi pourrait-on faire encore la démonstration au moyen de la méthode donnée par M. Darboux tout spécialement pour les séries procédant suivant de tels polynômes (*Mémoire sur l'approximation...*, déjà cité).

Je me borne toutefois à ces indications, croyant de tels détours inutiles. Le sujet porte en lui-même un caractère d'évidence remarquable, comme je vais le montrer.

20. Pour préciser, je prends b, c égaux à $-\infty$ et $+\infty$, et je choisis la fonction $\theta(z)$ suivante

$$\theta(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\omega^{2n}}\cos z\omega\, d\omega, \tag{25}$$

où a est une constante et n un entier, tous deux positifs. A la place de cette définition, on peut mettre cette autre équivalente :

$$\theta(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\omega^{2n}-iz\omega}\, d\omega.$$

Je considère maintenant la fonction particulière

$$F(z)=e^{i\zeta z},$$

et je prends l'intégrale

$$A_m=\int_{-\infty}^{+\infty} F^{(m)}(z)\,\theta(z)\,dz, \tag{26}$$

dont le calcul est aisé :

$$\begin{aligned} A_m &= (i\zeta)^m\int_{-\infty}^{+\infty} dz\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{-a\omega^{2n}+iz(\zeta-\omega)} \\ &= (i\zeta)^m\int_{-\infty}^{+\infty} dz\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{-a\omega^{2n}}\cos z(\zeta-\omega). \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fourier, ceci donne

$$A_m = 2\pi (i\zeta)^m e^{-a\zeta^{2n}}.$$

Je considère le développement, suivant les puissances ascendantes de ζ, de la fonction suivante,

$$\frac{1}{2\pi} e^{\zeta x + (-1)^n a\zeta^{2n}} = P_0 + P_1(x)\zeta + \ldots + P_m(x)\zeta^m + \ldots,$$

où, comme l'on voit, les coefficients sont des polynômes entiers en x, appartenant à la classe générale dont il est question dans ce Mémoire.

Ce développement, à cause de la nature de la fonction, est valable pour toutes les valeurs de ζ. J'y change ζ en $i\zeta$, et j'ai

$$(27) \qquad e^{i\zeta x} = \sum_{m=0}^{m=\infty} 2\pi (i\zeta)^m e^{-a\zeta^{2n}} P_m(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} P_m(x) A_m,$$

développement encore valable quel que soit ζ.

Observons maintenant que la fonction $\theta(z)$ et toutes ses dérivées s'évanouissent pour z croissant à l'infini par des valeurs réelles; et concluons, au lieu de (26), la forme suivante pour A_m

$$A_m = (-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^{(m)}(z) e^{i\zeta z} dz.$$

Je peux donc remplacer l'égalité (27) par celle-ci :

$$e^{i\zeta x} = \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m P_m(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^{(m)}(z) e^{i\zeta z} dz,$$

d'où je tire aisément

$$(28) \qquad \cos\zeta(x-t) = \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m P_m(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^{(m)}(z) \cos\zeta(z-t) dz.$$

Il ne faut pas perdre de vue le point important : ce développement est valable quel que soit ζ. On pourra donc l'étendre à toutes les valeurs de ζ jusqu'à l'infini. En outre, il est aisé de voir que les

convergence de la série est uniforme par rapport à la variable ζ. Il est donc permis de l'intégrer, et cela jusqu'à une limite infinie.

C'est ce que je fais, après avoir, au préalable, multiplié les deux membres par $f(t)\,dt$, et intégré de $-\infty$ à $+\infty$. La fonction $f(t)$ est d'ailleurs arbitraire.

Le premier membre devient

$$(29)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) \cos\zeta(x-t) = 2\pi f(x),$$

si la fonction f a été choisie parmi celles auxquelles s'applique le théorème de Fourier.

Le terme général du second membre devient

$$(-1)^m P_m(x) \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^{(m)}(z) \cos\zeta(z-t)\,dz,$$

ou, si l'on renverse l'ordre des intégrations et qu'on tienne compte de (29),

$$2\pi(-1)^m P_m(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^{(m)}(z) f(z)\,dz.$$

21. D'après le mode de démonstration, la série obtenue est prouvée pour les seules valeurs réelles de la variable, et à l'égard de toute fonction susceptible d'être représentée par l'intégrale double de Fourier. Mais cette intégrale double ne s'applique qu'à des fonctions restant finies pour $x = \pm\infty$, et il est certain qu'ici les conditions sont plus larges, puisque le développement s'applique effectivement aux polynômes entiers, à la fonction $e^{\zeta x}, \ldots$. A cet égard, on démontrera aisément que la seule condition consiste en ce que les produits $f(z)\theta^m(z)$ puissent être intégrés jusqu'à $\pm\infty$. On pourra donc résumer ainsi le résultat acquis :

Une fonction $f(x)$, développable en série trigonométrique dans tout intervalle fini, pourra être représentée, pour toutes les valeurs réelles de la variable, en une série procédant suivant les polynômes P_0, $P_1(x)$, $P_2(x), \ldots$, dont l'expression

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *J. Hoüel*, Secrétaire de la rédaction, Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux, cours d'Aquitaine, 66.

6927 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

BLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

IENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAÏEF, BROCARD, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, MANSION, POTOCKI, RADAU, RAYET, WEYR, ETC.,

SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME V. — ANNÉE 1881.

(TOME XVI DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

—

1881

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE (¹).

Tome VIII; 1879-80.

Laguerre. — Sur la fonction exponentielle. (11-18).

Si l'on considère l'expression

$$V = Fe^{ax} + F_1 e^{bx} + \ldots + F_{m-1} e^{lx},$$

où $a, b, c, \ldots, l$ désignent des constantes quelconques et $F, F_1, \ldots, F_{m-1}$ des polynômes de degrés $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$, on peut disposer des coefficients de ces polynômes de façon que, en développant V suivant les puissances entières ascendantes de x, le développement commence par un terme en $x^{\mu+m-1}$, où $\mu = \alpha + \beta + \ldots + \lambda$. La détermination de ces polynômes a fait l'objet d'une Note de M. Hermite dans le *Journal de Borchardt* (t. 88); depuis, M. Laguerre a rattaché cette recherche à une équation différentielle linéaire d'ordre m. Dans cette Communication, il traite directement du cas où $m = 3$.

(¹) Voir *Bulletin*, IV_2, 72.

Halphen. — Sur certains cas singuliers du déplacement d'un corps solide. (18-20).

Si par quatre points a, b, c, d d'une droite G passent quatre surfaces $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dont les quatre normales en ces quatre points appartiennent à un même hyperboloïde, et qu'on assujettisse a, b, c, d à rester respectivement sur $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, le déplacement de G est généralement impossible ou ambigu.

Si par cinq points a, b, c, d, e d'un corps solide passent cinq surfaces $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ dont les normales en ces points soient rencontrées par deux mêmes droites, et qu'on assujettisse a, b, c, d, e à rester respectivement sur $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, le déplacement du solide est généralement impossible ou ambigu.

Laguerre. — Sur la réduction en fractions continues d'une fonction qui satisfait à une équation linéaire du premier ordre à coefficients rationnels. (21-27).

Soit

$$Wz' = Vz + U$$

une telle équation où U, V, W sont des polynômes entiers en x, et supposons que z soit développable suivant les puissances décroissantes de x; soit f_n le polynôme de degré n, dénominateur de la réduite de rang n, en sorte que le développement de

$$z - \frac{\varphi_n}{f_n},$$

suivant les puissances décroissantes de x_n, commence par un terme en $\frac{1}{x^{2n+1}}$. La recherche des polynômes φ_n, f_n dépend d'une équation linéaire du second ordre

$$Wy'' + W_0 y' + W_1 y = 0,$$

dont les solutions sont

$$y_1 = f_n, \quad y_2 = e^{-\int \frac{V}{W} dx}(\varphi_n - f_n z)$$

et où l'on a fait

$$W_0 = V + W' - W\frac{\Theta'_n}{\Theta_n},$$

$$W_1 = \frac{K_n}{\Theta_n},$$

en représentant par K_n et par Θ_n des polynômes dont le dernier satisfait à l'équation

$$f_n^2 U + f_n \varphi_n V - W(\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n) = A_n \Theta_n,$$

A_n étant un coefficient indépendant de x. Si l'on pose maintenant

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = P_n,$$

on a

$$f_{n+1} - Q_{n-1} f_n + P_{n-1} f_{n-1} = 0,$$

$$\varphi_{n+1} - Q_{n-1} \varphi_n + P_{n-1} \varphi_{n-1} = 0,$$

$$W f'_n = \Omega_n f_n - \Theta_n f_{n+1},$$

$$W \varphi'_n = U f_n + (V + \Omega_n)\varphi_n - \Theta_n \varphi_{n+1}.$$

en faisant

$$Q_n = \frac{\Omega_{n+1} + \Omega_n + V}{\Theta_{n+1}},$$

et en représentant par Ω_n un polynôme entier dont le degré est indépendant de n, dont la forme est donnée par la troisième relation et que l'on détermine complètement en exprimant que, pour une valeur convenable de P_n, l'expression

$$u = e^{\int \frac{\Omega_n}{W} dx}$$

satisfait à l'équation différentielle

$$Wu'' + W_0 u' + \left(W_1 - \frac{P_n \Theta_n \Theta_{n+1}}{W}\right) u = 0.$$

L'auteur applique ces formules au développement de la fonction

$$z = e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x},$$

puis, dans une Communication postérieure, à celui de la fonction

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega;$$

dans ce dernier cas, on a

$$W = x^2 - 1, \quad V = -2\omega, \quad U = 0.$$

Θ_n est une constante que l'auteur prend égale à -1. On trouve ensuite

$$P_n = (n+1)^2 - \omega^2,$$
$$\Omega_n = \omega - (n+1)x.$$

D'ailleurs l'équation linéaire du second ordre à laquelle satisfont f_n et $\varphi_n \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^\omega$ appartient au type de l'équation hypergéométrique, en sorte que la forme de f_n s'obtient aisément. Enfin M. Laguerre relie cette question au développement suivant les puissances de $x^2 - 1$ de la fonction $(x+z)^\omega$, ce qui le conduit à diverses formules intéressantes.

Lebon (E.). — Sur l'arête de rebroussement d'une développable. (27-30).

Halphen. — Observations sur la théorie des caractéristiques. (31-34).

Critique de diverses propositions contenues dans le *Kalkul der abzählenden Geometrie* de M. Schubert.

Laguerre. — Remarques sur les équations différentielles linéaires du second ordre. (35-36).

Laguerre. — Sur la fonction $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega$. (36-52).

Cette dernière Communication a été analysée ci-dessus.

Holst (*E.*). — Sur l'application d'un principe de la théorie des fonctions à des recherches purement géométriques. (52-59).

Pour vérifier que le produit de certaines fonctions algébriques

$$P = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n}$$

reste toujours constant, il suffit de démontrer qu'il ne peut jamais devenir nul (ou, ce qui revient au même, qu'il ne peut jamais devenir infini).

Applications. — I. Soient τ l'aire d'un triangle donné, T l'aire du triangle polaire réciproque par rapport à une ellipse $2a$, $2b$; soient enfin τ_1, τ_2, τ_3 les aires des trois triangles formés par le centre O de l'ellipse et deux des sommets de τ; on a

$$T = \frac{a^2 b^2}{4} \frac{\tau^2}{\tau_1 \tau_2 \tau_3}.$$

II. Soient données deux courbes planes φ, ψ. Appelons

$P_{N\varphi\psi}$ le produit des normales communes aux deux courbes, chaque normale étant comptée entre les deux pieds sur les deux courbes;

$P_{T\varphi\psi}$ le produit des tangentes communes aux deux courbes, chaque tangente étant comptée entre les deux points de contact;

$P_{N\varphi\, as\psi}$ le produit des normales communes à la courbe φ et aux asymptotes de la courbe ψ;

$P_{N\psi\, as\varphi}$ le produit analogue, en changeant les deux courbes.

On a

$$P_{N\varphi\psi} = P_{T\varphi\psi} P_{N\varphi\, as\psi} P_{N\psi\, as\varphi},$$
etc. . . . .

Schubert. — Réponse aux observations de M. Halphen sur la théorie des caractéristiques. (60-61).

Schubert. — Note sur l'évaluation du nombre des coniques faisant partie d'un système et satisfaisant à une condition simple. (61).

Halphen. — Sur une formule d'analyse. (62-64).

$$\begin{aligned}
&\frac{d^n}{dx^n}\left[f(x)\,\varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right]\\
&= \varphi\left(\frac{1}{x}\right) f^{(n)}(x) - \frac{n}{1}\,\frac{1}{x}\,\varphi'\left(\frac{1}{x}\right)\left[\frac{f(x)}{x}\right]^{(n-1)}\\
&\quad + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,\frac{1}{x^2}\,\varphi''\left(\frac{1}{x}\right)\left[\frac{f(x)}{x^2}\right]^{(n-2)} + \ldots\\
&\quad + (-1)^k \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}\,\frac{1}{x^k}\,\varphi^{(k)}\left(\frac{1}{x}\right)\left[\frac{f(x)}{x^k}\right]^{(n-k)} + \ldots.
\end{aligned}$$

Romilly (*W. de*). — Note sur certaines équations différentielles obtenues par l'élimination de deux fonctions arbitraires. (64-72).

Étant donnée une fonction explicite z de deux fonctions arbitraires F_1, F_2 qui sont elles-mêmes fonctions de fonctions données φ_1 et φ_2 de x et de y, on peut

se proposer d'éliminer les fonctions arbitraires et de trouver une relation entre la fonction explicite z de F_1 et F_2, les fonctions φ_1 et φ_2 et leurs différentielles. — Problème inverse.

Caron. — Sur l'épure des vingt-sept droites d'une surface du troisième degré, dans le cas où ces droites sont réelles. (73-74).

Laquière. — Rectification d'une formule de probabilité. (76-79).

Une droite l est divisée en m segments: quelle est la probabilité pour que n d'entre eux soient d'une longueur plus grande qu'une longueur donnée a?

Laquière. — Note sur un problème de probabilité. (79-81).

La probabilité que le centre O d'une courbe fermée tombe dans l'intérieur du triangle rectiligne ABC, dont les trois sommets sont pris au hasard dans l'intérieur de la surface limitée par la courbe, est égale à $\frac{1}{4}$.

Haag. — Note sur une classe d'équations différentielles. (80-81).

Sur l'équation différentielle

$$\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)^2 + A\left(\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\right)^2 + \ldots + L\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 + M\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + Ny^2 + P = 0,$$

A, ..., P étant des constantes.

Laquière. — Solutions régulières du problème d'Euler sur la marche du cavalier. (82-102).

Léauté. — Note sur le calcul approché, par la méthode de Poncelet, des radicaux de la forme $\sqrt{x^2 - y^2}$. (106-109).

Poncelet a développé sa méthode d'approximation pour les radicaux de la forme $\sqrt{x^2 + y^2}$; les formules relatives aux radicaux de la forme $\sqrt{x^2 - y^2}$ se déduisent de celles de Poncelet par le changement des lignes trigonométriques en lignes hyperboliques.

Laisant. — Remarques sur les fonctions 1^x et $(-1)^x$. (109-111).

Humbert. — Sur l'équation hypergéométrique. (112-120).

Soit l'équation

$$\Delta y'' + G y' + F = 0,$$

où

$$\Delta = A x^2 + B x + C, \quad G = D x + E,$$

qui se ramène aisément à l'équation hypergéométrique; elle admet comme solution un polynôme de degré n si l'équation du second degré

$$A n (n-1) + D n + F = 0$$

admet une solution entière positive n, l'autre racine n'étant pas en même temps entière et inférieure à $n - 1$.

Si K est une fonction de x satisfaisant à la relation

$$\frac{K'}{K} = \frac{G}{\Delta},$$

ce polynôme sera

$$P_n = \frac{\Delta}{K} D_n K \Delta^{n-1},$$

formule qui équivaut à une formule bien connue de Jacobi. Cette formule ne donne rien lorsque $K\Delta^{n-1}$ est une constante; dans ce cas, la solution la plus générale de l'équation est donnée par la formule

$$P_n = \Delta^n D_{n-1} \frac{\alpha x + \beta}{\Delta},$$

α et β étant des constantes arbitraires; on arrive à d'autres expressions des solutions de l'équation différentielle lorsqu'elle est satisfaite en remplaçant y par un polynôme, en faisant des substitutions appartenant au type

$$y = (x - a)^\alpha (x - b)^\beta,$$

a et b étant les racines de l'équation $\Delta = 0$.

Polignac (de). — Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications. (120-124).

Humbert. — Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme. (124-128).

Posant

$$\Delta(x) = Ax^2 + Bx + C, \quad \frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{Dx + E}{Ax^2 + Bx + C},$$

l'auteur traite du développement de la fonction

$$\int \frac{\Delta(x)\,dx}{K(x)(x - z)}$$

suivant les puissances croissantes de $\Delta(z)$.

Le Paige (C.). — Note sur les déterminants bordés. (128-132).

Soit Δ le discriminant de la forme quadratique à n variables

$$f = \Sigma a_{ik} x_i x_k;$$

soit Δ_1 le déterminant symétrique obtenu en bordant Δ de p rangées et de p colonnes composées chacune de n éléments $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ et de p zéros; soit encore

$$F = \Sigma A_{ik} x_k$$

la forme adjointe de f; soit enfin

$$D = \begin{vmatrix} \sum \lambda_i \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_i} & \sum \lambda_i \frac{dF(\mu)}{d\mu_i} & \cdots \\ \sum \mu_i \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_i} & \sum \mu_i \frac{dF(\mu)}{d\mu_i} & \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \end{vmatrix};$$

on aura

$$2^p \Delta_1 \Delta^{p-1} = D.$$

Laquière. — Solutions régulières du problème d'Euler sur la marche du cavalier. (132-158).

Rodet (*L.*). — Le souan-pan des Chinois et la banque des argentiers. (158-168).

Lucas (*É.*). — Sur les nouvelles formules de MM. Seidel et Stern concernant les nombres de Bernoulli. (169-172).

Ces formules sont les suivantes :

$$B^p(B+1)^n = (-1)^{p+n} B^n (B+1)^p,$$
$$2^p B^p (2B+1)^n - B^p(B+1)^n + (-1)^{p+n}[2^n B^n (2B+1)^p - B^n(B+1)^p] = 0,$$

où, les opérations effectuées, les exposants doivent être remplacés par des indices.

Lucas (*É.*). — Théorèmes généraux sur l'impossibilité des équations cubiques indéterminées. (173-182).

M. Lucas démontre trois propositions dues à M. Sylvester sur l'impossibilité de décomposer en cubes de nombres rationnels certaines classes de nombres entiers et donne en outre diverses propositions se rapportant au même sujet.

Pour que l'équation

$$X^3 + Y^3 = AZ^3$$

soit vérifiée par des valeurs entières de X, Y, Z, A, il faut et il suffit que A appartienne à la forme $xy(x+y)$, préalablement débarrassée des facteurs cubiques qu'elle peut contenir.

Si x, y, z vérifient l'équation

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = 3AZ^3,$$

on peut décomposer le nombre A en deux cubes ou résoudre l'équation

$$X^3 + Y^3 = AZ^3,$$

et cela par des formules qui expriment X, Y, Z par des fonctions homogènes du troisième degré en x, y, z.

Un nombre positif quelconque entier ou fractionnaire est, d'une infinité de manières, le produit ou le quotient de deux nombres formés de la somme de deux cubes positifs.

Humbert. — Sur la réduction en fractions continues d'une classe de fonctions. (182-187).

Il s'agit en particulier des fonctions de la forme

$$(x^2-1)^\alpha\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega;$$

l'auteur donne la réduite générale.

Lucas (É.). — Sur l'extension du théorème de Descartes. (187-191).

Démonstration élémentaire d'un théorème dû à M. Laguerre.

Humbert. — Sur une généralisation de la théorie des fractions continues. (191-196).

Soit

$$\Delta(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

et soit $G(x)$ un polynôme de degré $n-1$; $K(x)$ étant une fonction définie par l'égalité

$$\frac{K'(x)}{K(x)}=\frac{G(x)}{\Delta(x)},$$

posons

$$Z_i=\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{K(z)}{\Delta(z)}\frac{dz}{x-z}\quad(i=1,\ldots,n),$$

en supposant que ces intégrales aient un sens, et considérons l'expression

$$P_1z_1+P_2z_2+\ldots+P_nz_n,$$

où $P_1,\ldots,P_n$ sont des polynômes entiers en x, de degré m et tels que la fonction précédente, développée suivant les puissances descendantes de x, commence par un terme en $\frac{1}{x^{(m+1n)}}$; le polynôme P_i a toutes ses racines réelles et comprises entre x_{i-1} et x_i, en supposant les quantités x_i réelles et rangées par ordre de grandeur.

Laguerre. — Sur la Géométrie de direction. (196-208).

Propositions de Géométrie concernant des *directions* et des *cycles*, droites ou cercles parcourus dans un sens déterminé.

Kantor (S.). — Sur les transformations linéaires successives dans le même espace à r dimensions. (208-218).

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ([1]).

Tome XCI; 1880 (suite).

N° 14; 4 octobre.

Tempel. — Observations de la comète Faye, faites à l'Observatoire de Florence-Arcetri. (573).

Crafts (J.). — Sur quelques questions thermométriques. (574).

N° 15; 11 octobre.

West. — Sur les équations algébriques. (598).

Bigourdan. — Éphémérides de la planète *b* 1880. (609).

Bigourdan. — Observations de la comète *d* 1880, découverte le 29 septembre par M. Hartwig à Strasbourg, faites à l'Observatoire de Paris. (610).

Pujet. — Sur la fonction résolvante de l'équation $x^m + px + q = 0$. (611).

De l'équation

$$x^m - kxy - y = 0$$

on déduit

$$(mx^{m-1} - ky)\,dx - (kx+1)\,dy = 0,$$

et, en posant

$$mx^{m-1} - ky = z,$$

on obtient par élimination

$$x = \frac{my}{z + (1-m)ky},$$

$$m^m y^{m-1} = (z + ky)[z + (1-m)ky]^{m-1}.$$

Dans cette dernière équation, le coefficient de z est nul; elle fournit ainsi une relation de la forme

$$z^2\varphi(z) = m^m y^{m-1} - (1-m)^{m-1} k^m y^m.$$

([1]) Voir *Bulletin*, IV_2, 231.

L'équation différentielle devient alors

$$\frac{m\,dt}{(m-1-t)(1+t)\sqrt{\psi(t)}} = \frac{k^{\frac{m}{2}}\,dy}{\sqrt{m^m y - k^m(1-m)^{m-1}y^2}},$$

en introduisant la variable $t = \frac{z}{ky}$ et en posant

$$\varphi(z) = k^{m-2}y^{m-2}\psi(t),$$

où $\psi(t)$ désigne une fonction entière de la variable t, à coefficients numériques et du degré $m-2$. Les conséquences sont évidentes.

Dillner (*G.*). — Sur une classe très étendue d'équations différentielles linéaires, à coefficients rationnels, dont la solution dépend de la quadrature d'un produit algébrique irrationnel. (616).

Généralisation intéressante de résultats indiqués par M. Brioschi dans sa Communication du 9 août.

Lipschitz. — Principes d'un calcul algébrique qui contient comme espèces particulières le calcul des quantités imaginaires et des quaternions. (619).

Les règles du calcul des imaginaires et du calcul des quaternions découlent de ce fait algébrique que le produit de deux sommes de deux carrés ou de quatre carrés s'exprime également par une somme de deux ou de quatre carrés. La méthode donnée par M. Hermite et par M. Cayley pour transformer la somme de n carrés en elle-même conduit M. Lipschitz à la découverte des règles d'un nouveau genre de calcul algébrique, où le calcul usuel des quantités imaginaires et le calcul des quaternions sont contenus comme les deux premiers cas. Cette généralisation est distincte de l'extension donnée par Hamilton du calcul des quaternions. M. Lipschitz se réserve de comparer ses recherches à celles de M. Frobenius, publiées dans le Tome 84 du *Journal de Borchardt*.

David. — Sur la partition des nombres. (621).

Cros (*C.*). — Sur les actions mécaniques de la lumière; considérations théoriques pouvant servir à interpréter les expériences réalisées par M. G. Bell. (622).

N° 16; 18 octobre.

Mouchez. — Longitude de la côte du Brésil. (635).

Breguet (*A.*). — Sur les expériences photophoniques du professeur Graham Bell et de M. Sumner Tainter. (652).

Thollon (*L.*). — Études spectroscopiques faites sur le Soleil, à l'Observatoire de Paris. (656).

Lipschitz. — Principes d'un calcul algébrique qui contient comme espèces particulières le calcul des quantités imaginaires et des quaternions. (660).

West (*E.*). — Sur les équations algébriques. (664).

N° 17; 26 octobre.

Appell. — Sur les équations différentielles linéaires. (684).

Analogies entre ces équations et les équations algébriques. Les quantités analogues aux fonctions symétriques des racines sont des fonctions algébriques entières des éléments d'un système fondamental d'intégrales et de leurs dérivées, qui se reproduisent à un facteur constant près quand on remplace ces éléments par les éléments d'un autre système fondamental. On peut constituer une théorie de la transformation des équations différentielles linéaires analogue à celle de la transformation des équations algébriques. Enfin l'étude des équations différentielles linéaires entre les intégrales desquelles il existe une relation algébrique à coefficients constants permet, dans le cas du second ordre, de ramener l'intégration à des quadratures abéliennes.

Dillner (*G.*). — Sur la classe des équations différentielles linéaires de divers ordres, à coefficients rationnels, dont la solution dépend de la quadrature d'un produit algébrique qui ne contient d'autre irrationnalité que la racine carrée d'un polynôme entier ou rationnel. (687).

Draper. — Photographie de la nébuleuse d'Orion.

N° 18; 2 novembre.

Callandreau (*O.*). — Éléments de l'orbite de la nouvelle planète (217), découverte par M. Coggia. (717).

West (*E.*). — Sur la résolution des équations algébriques; examen de la méthode de Lagrange. (718).

Dillner. — Sur les équations différentielles linéaires, à coefficients rationnels, dont la solution dépend de la quadrature d'une fonction rationnelle de la variable indépendante et d'un produit algébrique irrationnel. (721).

Picard (*E.*). — **Sur une propriété des fonctions uniformes d'une variable, liées par une relation algébrique. (723).**

Soient u, v deux fonctions uniformes d'une variable z liées par la relation algébrique de degré m

$$F(u, v) = 0. \tag{1}$$

Si la courbe représentée par cette équation est unicursale, on voit aisément que u, v peuvent s'exprimer de la façon suivante :

$$u = \varphi_1[R(z)],$$
$$v = \varphi_1[R(z)],$$

φ_1 et φ_2 étant des fonctions rationnelles et $R(z)$ une fonction uniforme de z.

Dans le cas général, on supposera que l'équation (1) ait un terme en v^m et que le rapport $\frac{v}{u}$ ait m valeurs finies et distinctes pour $u = \infty$. Considérant alors une intégrale abélienne de première espèce, relative à l'équation (1),

$$\int \frac{f(u, v)}{F'_v(u, v)}\, du,$$

on reconnaît d'abord, par l'examen de ce qui se passe dans le voisinage soit d'un pôle de la fonction u, soit d'une valeur z_0 qui fait acquérir à u une valeur critique relativement à l'équation (1), que l'expression

$$\frac{f(u, v)\dfrac{du}{dv}}{F'_v(u, v)}$$

est une fonction entière $G(z)$; on en conclut

$$\int_{u_0}^{u} \frac{f(u, v)\, du}{F'_v(u, v)} = G'(z),$$

$G_1(z)$ étant aussi une fonction entière. Or une telle relation entre les fonctions uniformes u et G_1 est impossible si l'espèce p de la courbe (1) est supérieure à 1. Si l'on a $p = 1$, on aura

$$u = F[G_1(z)], \quad v = F_1[G_1(z)],$$

F et F_1 étant des fonctions doublement périodiques aux mêmes périodes, et $G_1(z)$ une fonction entière.

Graham Bell. — **Sur l'application du photophone à l'étude des bruits qui ont lieu à la surface solaire. (726).**

N° 19; 8 novembre.

West (*E.*). — **Sur les équations algébriques; examen des propositions d'Abel. (759).**

N° 20; 15 novembre.

Brioschi. — Sur quelques équations différentielles linéaires. (807).

Si l'on considère l'équation linéaire du troisième ordre

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^3y}{du^3} = [(\rho+2)k^2\,\mathrm{sn}^2 u - \alpha]\dfrac{dy}{du} \\ \qquad + [(4-\rho)\lambda k^2\,\mathrm{sn}^2 u + (4-\rho)k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u - \beta]y, \end{cases}$$

où les constantes ρ, λ, α, β, ω sont liées par les équations

$$(2)\quad \begin{cases} 3\lambda^2 - (\rho-1)\Omega + \alpha - (\rho+2)\dfrac{1+k^2}{3} = 0, \\ 2\lambda^3 - (\rho+2)\lambda\Omega - \rho\Omega_1 - \beta - (\rho-4)\dfrac{1+k^2}{3} = 0, \end{cases}$$

en supposant

$$\Omega = k^2\,\mathrm{sn}^2\omega - \frac{1+k^2}{3},\quad \Omega_1 = k^2\,\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega,$$

on aura, en faisant successivement $\rho = 4$, $\rho = 1$, deux équations différentielles du troisième ordre, dont l'une a été étudiée par M. Picard, l'autre par M. Hermite (séance du 5 avril). Une intégrale particulière de cette équation différentielle linéaire du troisième ordre est égale au produit de deux intégrales particulières de deux équations de Lamé dont pour l'une $n = 0$, pour l'autre $n = 1$, et les valeurs des constantes λ, ω de ces équations sont données par les relations (2).

Lecornu. — Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles. (809).

Le travail de M. Lecornu, dont cette Note contient les résultats principaux, a été analysé dans la première Partie du *Bulletin*.

N° 21; 22 novembre.

Mouchez. — Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Greenwich (transmises par l'Astronome Royal, M. Airy) et à l'Observatoire de Paris pendant le troisième trimestre de l'année 1880. (833).

Poincaré. — Sur la réduction simultanée d'une forme quadratique et d'une forme linéaire. (844).

L'auteur a, dans un Mémoire précédent (séance du 14 juin), étudié les questions relatives à la réduction et à l'équivalence des formes cubiques ternaires : parmi ces formes, celles qui sont décomposables en un facteur linéaire et un facteur quadratique conduisent à étudier la réduction d'un système composé d'une forme linéaire et d'une forme quadratique.

Il peut arriver que cette réduction se ramène à celle d'une forme définie, que l'on obtienne un nombre fini de systèmes réduits, ou enfin que la réduction se ramène à celle d'une forme quadratique indéfinie : c'est le cas le plus intéressant, le seul où il y ait des substitutions semblables.

M. Poincaré s'occupe en particulier des transformations binaires, à coefficients entiers, qui reproduisent un système composé d'une forme linéaire et d'une forme quadratique.

Gaillot (A.). — **Sur les Tables du mouvement de Saturne de Le Verrier. (847).**

Laguerre. — **Sur une propriété des polynômes X_n de Legendre. (849).**

Étant donné un polynôme entier $F(x)$, ordonné comme il suit,

$$F(x) = AX_m + BX_p + CX_q + \ldots,$$

A, B, ... étant des constantes et les entiers $m, p, q, \ldots$ allant en croissant, le nombre des racines positives de l'équation $F(x) = 0$, qui sont égales ou supérieures à l'unité, est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes de la suite

$$A, B, C, \ldots.$$

Angot (A.). — **Tables nouvelles pour calculer les hauteurs au moyen des observations barométriques.**

N° 22; 29 novembre.

Floquet (G.). — **Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques.**

Si les coefficients d'une équation différentielle linéaire sont simplement périodiques, les éléments d'un système fondamental d'intégrales se partagent en groupes, tels que

$$\begin{aligned} F_1(x) &= e^{rx}\varphi_{11}(x), \\ F_2(x) &= e^{rx}[\varphi_{21}(x) + x\varphi_{22}(x)], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_\lambda(x) &= e^{rx}[\varphi_{\lambda 1}(x) + x\varphi_{\lambda 2}(x) + \ldots + x^{\lambda-1}\varphi_{\lambda\lambda}(x)], \end{aligned}$$

où les φ désignent des fonctions de la période ω des coefficients.

Si l'expression

$$f(x) = e^{\rho x}[\psi_0(x) + x\psi_1(x) + \ldots + x^\nu\psi_\nu(x)]$$

est une intégrale de l'équation différentielle, les ψ désignant des fonctions de période ω, il en sera de même des ν premières dérivées de cette intégrale, prises en considérant $e^{\rho x}$ et les $\psi(x)$ comme des constantes.

N° 23; 6 décembre.

Tisserand (*F.*). — Sur le développement d'une fonction quelconque du rayon vecteur dans le mouvement elliptique. (897).

En désignant par a, e, ζ, r le demi-grand axe, l'excentricité, l'anomalie moyenne et le rayon vecteur dans l'orbite elliptique d'une planète, on a

$$\frac{r}{a} = A_0 + A_1 \cos\zeta + \ldots + A_n \cos n\zeta + \ldots,$$

où les coefficients A sont des fonctions de e qui s'expriment simplement à l'aide des transcendantes de Bessel; M. Tisserand montre que, dans le développement correspondant,

$$f(r) = B_0 + B_1 \cos\zeta + \ldots + B_n \cos n\zeta,$$

le coefficient B_n est donné par la formule

$$\frac{1}{2} B_n = (-1)^n \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\left(\frac{e}{2}\right)^{n+2p}}{p!\,(p+n)!} u(u-n)^{n+p-1}(u+n)^{p-1}(u+n+2p);$$

quand on aura effectué le développement de l'expression

$$u(u-n)^{n+p-1}(u+n)^{p-1}(u+n+2p)$$

suivant les puissances entières et positives de u, on devra y remplacer u^i par $a^i \frac{d^i f(a)}{da^i}$, en désignant par $\frac{d^i f(a)}{da^i}$ la valeur à laquelle se réduit $\frac{d^i f(r)}{dr^i}$ quand on y fait $r = a$.

Bigourdan. — Observations de la comète *d* 1880 (Hartwig), faites à l'Observatoire de Paris. (917).

Schulhof et *Bossert.* — Sur la comète Hartwig (*d* 1880) et sur la comète Swift (*e* 1880). (918).

Laussedat. — Sur la méthode employée par d'Aubuisson, en 1810, pour la mesure des bases géodésiques. (922).

Angot (*A.*). — Sur le calcul des hauteurs au moyen des observations barométriques. (924).

André (*Ch.*). — Sur la distribution des températures dans les couches inférieures de l'atmosphère. (927).

Mercadier (*E.*). — Sur la radiophor

N° 24; 13 décembre.

Gyldén. — **Sur l'orbite que parcourt un point matériel attiré par un sphéroïde. (957).**

Dans le cas qui intéresse l'Astronomie, la force d'attraction est exprimée, avec une approximation suffisante, par la formule

$$-\frac{r^2}{\mu}-\frac{3\mu^2}{r^4},$$

où

$$\mu^2=\frac{1}{2}(2C-A-B);$$

en représentant par A, B, C les moments d'inertie du sphéroïde, M. Gyldén examine le cas où l'orbite est située dans le plan de l'équateur et où elle est fermée.

Schulhof et *Bossert.* — **Comète Swift (e 1880). (965).**

Darboux (G.). — **Sur le contact des coniques et des surfaces. (969).**

Par chaque point d'une cyclide passent dix cercles; ce nombre de dix séries de sections circulaires est un maximum et n'est atteint que pour les cyclides; pour le démontrer, M. Darboux a étudié le contact d'une conique et d'une surface et examiné particulièrement le cas où cette conique est un cercle.

Si, dans une surface (S), on considère toutes les sections planes passant par une même droite tangente en un point simple O, le lieu des coniques osculatrices de ces sections à leur point de contact commun avec la tangente est une surface du second degré ayant un contact du second ordre avec la surface (S).

Étant donnée une surface quelconque (Q) à neuf paramètres, on peut en général disposer de ces paramètres de telle manière que la surface soit osculatrice en O à la surface (S), et de telle manière que les trois tangentes au point triple de la courbe de section des deux surfaces en O soient confondues suivant une tangente quelconque (T) donnée à l'avance. Dans le cas où la surface (Q) est du second degré, la tangente (T) ne peut pas être prise arbitrairement; elle ne peut avoir que trois positions, et alors il y a une infinité de surfaces du second degré correspondantes à chacune de ces directions. La théorie du contact d'une surface du second degré avec une surface quelconque conduit donc à un système de lignes analogues aux lignes de courbure et définies par une équation différentielle du premier ordre et du troisième degré en $\frac{dy}{dx}$. Trois surfaces particulières du second degré peuvent être considérées comme ayant le contact le plus intime possible avec la surface proposée.

Les plans qui coupent la surface (S) suivant des sections planes surosculées en O par une conique enveloppent un cône de neuvième classe admettant le plan tangent en O pour plan tangent sextuple.

En dehors des surfaces du second ordre, il n'y a que la surface de Steiner et

ses variétés et la surface réglée du troisième ordre qui admettent une infinité de coniques passant par chaque point de la surface.

Il y a en général vingt-sept coniques qui coupent la surface (S) en sept points confondus au point O.

Les plans qui coupent la surface (S) suivant des sections surosculées en O par un cercle enveloppent un cône de cinquième classe admettant le plan tangent pour plan tangent quadruple.

Le lieu des pôles des inversions qui transforment la surface (S) en une autre (S') pouvant avoir au point O', inverse de O, un contact du troisième ordre avec une surface du second ordre est une courbe du sixième ordre qui est l'inverse, par rapport à O, d'une cubique gauche.

Par chaque point simple de la surface (S), il passe en général dix cercles coupant la surface en cinq points confondus. En d'autres termes, il y a dix sections dont les coniques osculatrices sont des cercles.

S'il y a plus de dix cercles, le point est nécessairement un ombilic.

Une surface ne peut admettre plus de dix cercles passant en chaque point sans se réduire à une sphère.

Les seules surfaces qui admettent dix séries de sections circulaires sont les cyclides.

Appell. — Sur une classe d'équations différentielles linéaires. (972).

Considérons une équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n z}{dx^n} + \varphi_1(x,y)\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + \varphi_n(x,y)\, z = 0,$$

dans laquelle $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont des fonctions rationnelles de x et y, y étant la fonction algébrique de x définie par l'équation

$$F(x,y) = 0,$$

représentant une courbe d'ordre m, de genre p et contenant un terme en y^m. Les coefficients φ possèdent deux sortes de points singuliers : 1° les points ξ_i, τ_{ik} de la courbe $F = 0$, où certaines des fonctions φ deviennent infinies; 2° les points critiques de la fonction algébrique y de x, que l'on suppose distincts des points ξ_k, τ_{ik}. Supposant aussi que ces derniers points et le point ∞ soient des pôles ou des points ordinaires de la fonction intégrale, M. Appell montre qu'il existe une fonction intégrale $\psi(x,y)$ qui se reproduit, multipliée par un facteur constant, toutes les fois que le point (x,y) décrit un cycle simple. Le nombre de ces multiplicateurs distincts est $2p$.

Soient $u^i(x,y)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ les p intégrales abéliennes normales de première espèce; considérons les cycles qui donnent les $2p$ périodes normales, à savoir, pour l'intégrale $u^{(i)}$, les périodes

$$\begin{array}{llllll} \omega_1^{(i)} = 0, & \omega_3^{(i)} = 0, & \ldots, & \omega_i^{(2i-1)} = 2\pi\sqrt{-1}, & \ldots, & \omega_{2p-1}^{(\,)} = 0, \\ \omega_2^{(i)} = 2\alpha_{i1}, & \omega_4^{(i)} = 2\alpha_{i2}, & \ldots, & \omega_{2i}^{(i)} = 2\alpha_{ii}, & \ldots, & \omega_{2p}^{(i)} = 2\alpha_{ip}; \end{array}$$

à ces cycles répondront, pour la fonction intégrale $\psi(x,y)$, $2p$ multiplicateurs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2p}$, le facteur μ_k correspondant au cycle qui donne $\omega_k^{(i)}$. Soit $\Theta(x)$ la fonction Θ de p variables formée avec les nombres α_{ik}, et considérons la fonc-

tion

$$T(x,y) = \frac{\Theta[u^{(i)}(x,y) - g_i]}{\Theta[u^{(i)}(x,y)]} e^{\lambda_1 u^{(1)}(x,y) + \lambda_2 u^{(2)}(x,y) + \ldots + \lambda_p u^{(p)}(x,y)},$$

où λ_i et g_i sont des constantes. Si le point (x,y) décrit un cycle donnant pour les intégrales abéliennes une période à indice impair $2i-1$, la fonction $T(x,y)$ se reproduit, multipliée par $e^{2\lambda_i\pi\sqrt{-1}}$; on détermine les p constantes λ_i de façon que cette intégrale soit égale à

$$\frac{1}{\mu_{2i-1}} \quad (i = 1, 2, \ldots, p);$$

on détermine de même les constantes g_i de façon que

$$e^{2(\lambda_1 a_{1i} + \lambda_2 a_{2i} + \ldots + \lambda_p a_{pi}) + g_i}$$

soit égale à

$$\frac{1}{\mu_{2i}} \quad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Dès lors, la fonction $\psi(x,y)$ peut se mettre sous la forme

$$\psi(x,y) = \frac{R(x,y)}{T(x,y)},$$

$R(x,y)$ étant une fonction rationnelle de x, y.

Collet (J.). — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Les diverses méthodes pour l'intégration de ces équations se ramènent à l'intégration d'une équation de la forme

$$(1) \qquad dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \ldots - p_n dx_n = 0,$$

où les valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont fournies par n équations distinctes

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_n = 0,$$

dont les premiers membres sont astreints à satisfaire à $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions de la forme

$$0 = (f_h, f_k) = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{\partial f_h}{\partial p_i}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f_k}{\partial z}\right) - \frac{\partial f_k}{\partial p_i}\left(\frac{\partial f_h}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f_h}{\partial z}\right)\right].$$

Lorsque la fonction z n'entre pas dans ces équations, le premier membre de l'équation (1) est une différentielle exacte; lorsqu'elle entre, *il existe toujours un facteur d'intégration.*

Mittag-Leffler. — Sur les équations différentielles linéaires du second ordre. (978).

Soient U, V d'une part, u, v de l'autre, des intégrales linéairement indépendantes des équations

$$z'' + P z' + Q z = 0,$$
$$y'' + p y' + q y = 0.$$

Soit $\varphi(x, \xi)$ une fonction rationnelle de ξ, dont les coefficients soient des fonctions uniformes de x; si l'on suppose

$$\frac{V'}{V} = \varphi\left(x, \frac{v'}{v}\right), \quad \frac{U'}{U} = \varphi\left(x, \frac{u'}{u}\right),$$

on peut obtenir P et Q sous forme de fonctions symétriques par rapport à $\frac{v'}{v}$ et $\frac{u'}{u}$, et par suite sous forme de fonctions rationnelles de $\frac{v'}{v} + \frac{u'}{u}$ et de $\frac{v'}{v}\frac{u'}{u}$ ou de $\frac{F'(x)}{F(x)}$ et de $\frac{1}{2}\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{1}{2}p\frac{F'(x)}{F(x)} + q$, en posant $uv = F(x)$; les coefficients, dans ces expressions rationnelles, sont des fonctions uniformes de x. Si maintenant l'on suppose que, dans $\varphi(x, \xi)$, les coefficients des diverses puissances de ξ soient des fonctions doublement périodiques de x, et que p et q soient aussi des fonctions doublement périodiques, telles que le quotient $\frac{F'(x)}{F(x)}$ soit lui-même doublement périodique, il en sera de même des coefficients P, Q de l'équation $z'' + Pz' + Qz = 0$, et des deux expressions de $\frac{V'}{V}$ et $\frac{U'}{U}$ on conclut un système d'intégrales qui, en général, ne sont pas uniformes. En supposant $\varphi(x, \xi) = \omega\xi$, on retombe au cas traité par M. Hermite.

N° 25; 20 décembre.

Discours prononcés aux funérailles de M. Chasles par MM. Bertrand, Bouquet, Laussedat, Dumas et Rolland.

N° 26; 27 décembre.

Hermite. — Sur la série de Fourier et autres représentations analytiques des fonctions d'une variable réelle. (1018).

M. Hermite, après quelques mots sur les travaux de M. Liouville, de Sturm, de M. Lipschitz, de M. P. du Bois-Reymond, fait l'éloge du Livre de M. Ulysse Dini, *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale.*

Cornu (A.). — Sur la vitesse de propagation de la lumière. (1019).

Cruls. — Détermination de la durée de la rotation de la planète Jupiter. (1049).

Schulhof et *Bossert.* — Sur la comète Hartwig (*d* 1880). (1051).

Tacchini. — Observations solaires, faites à l'Observatoire Royal du Collège Romain, pendant le troisième trimestre de 1880. (1053).

Tacchini. — Observations de la comète Swift (e 1880), faites à l'Observatoire Royal du Collège Romain. (1054).

Moutard. — Sur le contact des coniques et des surfaces. (1055).

Réclamation de priorité au sujet de ceux des théorèmes de M. Darboux, communiqués dans la séance du 13 décembre, qui concernent les coniques *quelconques* osculatrices à une surface en un point donné. M. Moutard indique aussi la méthode géométrique dont il s'est servi pour étudier cette question; il emploie, pour étudier les éléments différentiels d'une surface algébrique (S) d'ordre m, en un point A, une surface dérivée (Δ), à savoir : le lieu du point qu'on obtient en portant sur chaque transversale issue du point A le rayon vecteur dont l'inverse est égal à la moyenne arithmétique des inverses des rayons vecteurs limités à tous les points d'intersection restants, sauf un seul, de la transversale et de la surface (S).

Cette surface (Δ) est d'ordre $2m - 3$; elle renferme comme droites multiples d'ordre $m - 3$ les deux osculatrices de (S) en A; le complément de son intersection avec le plan tangent est une cubique (Γ) située sur la polaire du troisième ordre de A par rapport à (S); l'orientation des plans tangents à (Δ) aux divers points de (Γ), la direction des droites osculatrices à (Δ) en ces mêmes points, la position des droites qui surosculent (Δ) en un point de (Γ), ne dépendent respectivement que des polaires du quatrième, du cinquième, du sixième ordre de A par rapport à (S).

Toute conique (C) ayant avec une surface algébrique (S) d'ordre m un contact du second ordre au point A est associée à une droite (D) située dans son plan, de telle manière que, sur toute transversale menée dans ce plan par le point A, la somme de l'inverse du rayon vecteur limité à (C) et de ($m - 2$) fois l'inverse de celui qui est limité à (D) est égale à la somme des inverses des rayons vecteurs limités à (S). Le contact de (C) et de (S) monte au troisième ordre quand la droite (D) rencontre en un point I la courbe (Γ) et, en général, à l'ordre $n + 3$ lorsque (D) a en I un contact de l'ordre n avec (Δ).

Picard (E.). — Sur une propriété des fonctions uniformes d'une variable, et sur une classe d'équations différentielles linéaires. (1058).

Considérant les équations différentielles de la forme

$$F\left(u, \frac{d^2 u}{dz^2}\right) = 0, \tag{1}$$

F étant un polynôme, l'auteur cherche dans quel cas elles admettent des intégrales uniformes. Il résulte tout d'abord d'une Communication précédemment analysée que le nombre p relatif à la relation algébrique (1) est égal à 0 ou à 1 et que l'on devra avoir

$$u = \varphi(R), \quad \frac{d^2 u}{dz^2} = \varphi_1(R),$$

φ et φ_1 désignant dans le premier cas des fonctions rationnelles, dans le second des fonctions doublement périodiques à mêmes périodes, et R désignant dans le premier cas une fonction uniforme, dans le second une fonction entière; on en

déduit

$$\left(\frac{dR}{dz}\right)^2 = \frac{2\int \varphi_1(R)\,\varphi'(R)\,dR}{[\varphi'(R)]^2}.$$

Si $p = 0$, cette équation ne pourra admettre d'intégrale uniforme que si l'expression $\int \varphi_1(R)\,\varphi'(R)\,dR$ est rationnelle; on est ramené alors à chercher si l'on peut déterminer la constante d'intégration de façon que le quotient $\frac{\int \varphi_1 \varphi'\,dR}{\varphi'^2}$ se réduise à un polynôme de degré au plus égal à 4.

Si $p = 1$, il faut que le même quotient se réduise à une constante; on aura alors $\varphi'(R) = A^2 \varphi''(R)$, A étant une constante, et $R(z)$ aura la forme linéaire $Az + B$. Toutes les intégrales de l'équation (1) ne sont pas d'ailleurs uniformes dans ce cas.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK (¹).

Tome XXIV; 1879.

Beez. — Sur la mesure, d'après Riemann, de la courbure des multiplicités d'ordre supérieur. (1-17, 65-82).

Le travail de M. Beez se rapporte à la seconde Partie de la *Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quæstioni ab illustrissima Academia Parisiensi propositæ*, publiée dans les Œuvres complètes de Riemann (p. 370). Cette seconde Partie, d'un caractère purement analytique, est intitulée *De transformatione expressionis* $\Sigma_{ii'} b_{ii'} ds_i ds_{i'}$ *in formam datam* $\Sigma_{ii'} a_{ii'} dx^i dx^{i'}$. C'est là qu'on peut trouver la base de la théorie de la mesure de la courbure attribuée à Riemann et comme la conclusion de son *Habilitationsschrift* « *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.* » Toutefois l'interprétation géométrique donnée par Riemann des beaux résultats analytiques obtenus par lui paraît à M. Beez entièrement accessoire et sujette à revision; c'est cette revision qu'il entreprend, et il arrive à la conclusion suivante : *Il est impossible d'étendre la théorie ordinaire de la courbure aux surfaces d'un espace plan de plus de trois dimensions.*

Hochheim (Ad.). — Sur les surfaces polaires des surfaces réglées du troisième ordre. (18-31).

Équations des surfaces polaires du second et du premier ordre, surfaces diamétrales, surface de Hesse, points paraboliques, tangentes d'inflexion, etc.

Matthiessen (L.). — Formes générales, de Clebsch et Aronhold, pour les racines des équations du second, du troisième et du quatrième degré. (32-39).

Chwolson (O.). — Sur le problème de l'induction magnétique de deux sphères. (40-53).

(¹) Voir *Bulletin*, II_2, 151.

Kantor (*S.*). — Recherches géométriques. (54-57).

Niemöller. — Sur une application des fonctions sphériques. (57-60).

« Étant donnée la fonction

$$\varphi(y) = \frac{c_0}{y} + \frac{c_1}{y^2} + \frac{c_2}{y^3} + \ldots,$$

trouver la fonction $f(x)$ telle que l'on ait

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,dx}{y-x} = \varphi(y). \text{ »}$$

Schmidt (*A.*). — Sur la surface de l'onde dans un milieu isotrope non homogène. (60-62).

Schoenflies (*A.*). — Remarque sur le Mémoire *Ueber ein specielles Hyperboloid....* (62-63).

Voir *Zeitschrift*, XXIII, 269, et *Bulletin*, II_2, 154.

Rodenberg (*C.*). — Sur un problème de maximum. (63-66).

« Diviser un nombre donné en parties égales dont le produit soit maximum. »

Thomae (*J.*). — Exemple d'une fonction discontinue une infinité de fois. (64.).

Schlegel (*V.*). — Sur les nouvelles méthodes géométriques et leur liaison avec la *Science de l'étendue* de Grassmann. (82-95).

1. Le *Punktcalcul* de Gauss-Siebeck. — 2. Les coordonnées barycentriques de Möbius, le rapport anharmonique de Chasles, les coordonnées trilinéaires de Schendel. — 3. La Géométrie non euclidienne. — 4. Sur la représentation des imaginaires de Björling. — 5. Sur les quaternions de Hamilton.

Günther (*S.*). — Sur la représentation explicite des déterminants réguliers de coefficients binomiaux. (96-103).

M. Günther désigne ainsi un déterminant d'ordre p dont la $i^{\text{ième}}$ ligne est composée des éléments

$$\binom{m_i}{n_1}, \quad \binom{m_i}{n_2}, \quad \ldots, \quad \binom{m_i}{n_p},$$

où m et n sont des entiers quelconques positifs et où l'on suppose que les nombres n vont en croissant avec leur indice.

Hagen (*J.*). — Sur la théorie des trois figures ellipsoïdales d'équilibre d'une masse fluide homogène tournant librement. (104-115).

L'auteur suit une méthode donnée par M. A. Giesen, dans le *Zeitschrift* (t. XXI,

p. 1), pour traiter les problèmes d'Hydrodynamique relatifs à des ellipsoïdes de petites excentricités et qui consiste à négliger les puissances des excentricités supérieures à 2.

De cette façon, il parvient simplement, lorsque la vitesse de rotation est très petite, aux trois figures ellipsoïdales connues pour l'équilibre d'une masse fluide homogène animée d'un mouvement de rotation, ainsi qu'aux figures limites.

Röllner (F.). — Génération d'une surface du second ordre au moyen de deux faisceaux de sphères projectifs. (116-119).

Schur (F.). — Démonstration synthétique de l'identité d'une *Tripelcurve* avec la courbe engendrée par un faisceau de coniques et un faisceau projectif de droites. (119-123).

Schlegel (V.). — Généralisation d'un paradoxe géométrique. (123-128).

Étant donné un carré, on le décompose, par une parallèle à l'un des côtés, en deux rectangles dont les surfaces soient entre elles comme les entiers a, b $(a < b)$; prenons pour unité la $(a+b)^{\text{ième}}$ partie du côté. On décompose le petit rectangle en deux triangles rectangles et le grand en deux trapèzes égaux dont les bases soient a, b : le rectangle dont les côtés sont b et $a + 2b$ ne diffère de la somme des quatre figures ainsi formées, si les nombres sont convenablement choisis, que par un petit parallélogramme allongé. L'auteur se propose de déterminer les nombres a, b de façon que l'aire de ce parallélogramme soit égale à 1.

Geisenheimer (L.). — Recherches sur le mouvement d'un système mobile qui reste semblable à lui-même. (128-158).

Le résultat principal de ces recherches est l'établissement d'une formule et d'une construction pour le centre de courbure de l'enveloppe d'une courbe plane mobile dans son plan, qui, dans le cas où la similitude se réduit à l'égalité, reviennent à la formule et à la construction de Savary.

Weiler. — L'involution sur une courbe gauche du troisième ordre. (159-167).

Étant donnée une telle courbe, un faisceau de plans en involution passant par une sécante détermine sur elle une involution. Soient a, a' les tangentes en deux points correspondants ; on considère la congruence linéaire dont les droites a, a' sont les directrices ; l'ensemble de toutes ces congruences constitue un complexe du troisième ordre qu'étudie M. Weiler.

Zech (P.). — Passage d'un faisceau étroit de rayons par un prisme (168-179).

Enneper (A.). — Sur les lignes de courbure d'une surface algébrique. (180-187).

Cette surface a été définie par M. Laguerre (*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. II, p. 145-156 ; *Bulletin*, 2e série, t. I. IIe Partie, p. 329), et M. Laguerre en a déterminé géométriquement [illegible] M. Enneper

établit qu'elle peut être regardée comme l'enveloppe de la surface du second ordre

$$\frac{x^2}{s+a}+\frac{y^2}{s+b}+z^2\frac{s+\alpha+\beta-c}{(s+\alpha)(s+\beta)}-1=0,$$

où s est un paramètre variable; il montre en outre comment l'équation différentielle du second degré des lignes de courbure se décompose aisément en deux équations du premier degré qui s'intègrent sans difficulté.

Pilgrim (*L.*). — Sur le nombre de parties dans lesquelles on peut décomposer une figure de k dimensions au moyen de n figures de $k-1$ dimensions. (188-192).

Résultats généraux analogues à ces propositions particulières : un plan est décomposé par six droites en seize parties, dont dix sont finies; un espace est décomposé par dix plans en cent trente parties, dont quatre-vingt-quatre sont finies, etc.

Wittwer (*C.*). — Sur la dépendance entre la chaleur spécifique des corps et leur température. (183-205).

Rachmaninoff. — Le principe du plus petit travail des forces perdues comme principe général de la Mécanique. (206-220).

Il s'agit du principe de Gauss (*Princip des kleinsten Zwanges*), lequel peut être regardé comme un principe du plus petit travail des forces perdues. M. Rachmaninoff l'énonce sous la forme suivante : « Dans le mouvement d'un système de points matériels, le travail que produiraient les forces perdues par le mouvement libre du même système est un minimum; l'accroissement infiniment petit de ce travail est positif pour tout déplacement qui, combiné avec le déplacement réel, produirait un déplacement possible. »

L'auteur montre en outre la connexion de ce principe avec les principes généraux de la Mécanique.

Thieme (*H.*). — Sur la définition des figures géométriques par la construction de leur système polaire. (221-238, 276-284).

Les recherches de M. Cremona et de M. Frahm ont montré qu'un réseau de courbes planes d'ordre $n>2$ ou de surfaces d'ordre $n\geqq 2$ ne pouvait pas, en général, être regardé comme le réseau des premières courbes ou surfaces polaires pour une courbe ou une surface d'ordre $n+1$; il y a donc lieu de chercher à construire les figures générales (à 1, 2, 3 dimensions) qui constituent les systèmes des premières polaires des figures de même dimension et d'ordre immédiatement supérieur. S'occupant spécialement du cas des surfaces, M. Thieme montre comment la solution de ce problème peut conduire à la définition purement géométrique d'une surface d'ordre $n+1$, en partant de la surface d'ordre n; il établit ainsi, indépendamment de toute considération algébrique, qu'une surface d'ordre $n+1$ est déterminée en général par $\frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{6}-1$ points et qu'elle est rencontrée par une droite, au plus en $n+1$ points.

Giesen (*A.*). — Oscillations d'une masse fluide homogène sous l'influence de la tension superficielle. (230-238).

Graetz (*L.*). — Quelques théorèmes sur les mouvements de tournoiement dans les liquides visqueux. (239-244).

L'auteur montre que, si dans un liquide visqueux incompressible on a

$$\Delta\pi = 0, \quad \Delta\chi = 0, \quad \Delta\rho = 0,$$

π, χ, ρ désignant les composantes de la vitesse de rotation au point (x, y, z) et le symbole Δ désignant l'opération

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

les propositions de M. Helmholtz sur le mouvement de tournoiement (*Wirbelbewegung*) dans un liquide parfait subsistent pour un liquide visqueux.

Günther (*S.*). — Une relation entre les puissances et les déterminants. (245-256).

Démonstration d'une proposition communiquée à M. Günther par M. Brocard.

Le déterminant du septième ordre

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

est égal à ρ^3; le déterminant Δ_{2m+1}, d'une structure analogue, est égal à $(m+2)^m$.

Weiler (*A.*). — Démonstration simple du théorème de Desargues. (248-250).

Küttner (*W.*). — Sur la théorie des nombres de Bernoulli. (250-252).

Démonstration de la relation

$$B_n = (-1)^{n+1}\left[\frac{1}{2} + \sum_{i=0}^{i=2n-2} (-1)^{i+1} \frac{(2n-1-i)!}{2n+1-i} S_{i,2n-i}\right],$$

où les S sont déterminés par la relation

$$1 + 2S_{k,2} + 3S_{k,3} + \ldots + pS_{k,p} = S_{k+1,p} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

avec $S_{0,p} = 1$.

Heymann (*W.*). — Remarques sur l'équation différentielle

$$x\varphi(y') + y\psi(y') + \chi(y') = 0.$$

(252-255).

L'auteur transforme cette équation en une équation différentielle linéaire en substituant les coordonnées tangentielles aux coordonnées ponctuelles et examine divers cas d'intégrabilité.

Holzmüller. — Démonstration géométrique élémentaire d'un théorème de Mécanique. (255-256).

Enneper (*A.*). — Coordonnées isométriques sur la surface de la sphère. (256).

Si l'on pose

$$x = \operatorname{sn} u \operatorname{dn} v, \quad y = \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v, \quad z = \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v,$$

on aura

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u - k'^2 \operatorname{sn}^2 v,$$

qui montrent bien que les coordonnées u, v constituent sur la sphère un système isométrique; si maintenant u, v sont des fonctions quelconques de p, q, on reconnaît aisément que, pour que ces dernières coordonnées soient isométriques, il faut que l'on ait

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \pm \frac{\partial v}{\partial q}, \quad \frac{\partial u}{\partial q} = \mp \frac{\partial v}{\partial p},$$

en sorte que u, v doivent satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 w}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial q^2} = 0.$$

Mehmke (*R.*). — Géométrie du cercle dans le plan. (257-269).

Un réseau de cercles est l'ensemble des cercles orthogonaux à un cercle donné dit *cercle polaire du réseau*, lequel est lui-même le réseau polaire de ce cercle; un faisceau de cercles est l'ensemble des cercles orthogonaux à deux cercles donnés; les réseaux polaires de tous les cercles d'un faisceau ont en commun un faisceau de cercles, dit *faisceau polaire du premier*. Un faisceau est dit normal à un réseau quand il en contient le cercle polaire. Il n'y a qu'un seul faisceau qui contienne un cercle donné et soit normal à un réseau donné, lorsque le cercle et le réseau ne sont pas polaires. Le cercle d'intersection de ce faisceau et du réseau est la projection normale du cercle donné sur le réseau donné. La projection normale d'un cercle sur un faisceau est le cercle du faisceau tel que le faisceau qui le joint au cercle donné rencontre le faisceau polaire du faisceau donné; l'angle de deux réseaux est l'angle de leurs cercles polaires; l'angle

d'un cercle et d'un réseau est l'angle du cercle et de sa projection normale sur le réseau; de même pour l'angle d'un cercle et d'un faisceau, etc.... Ces diverses définitions laissent apercevoir la possibilité d'une Géométrie dont le cercle est l'élément et dont M. Mehmke développe diverses propositions, en faisant ressortir l'analogie des résultats qu'il obtient avec la Géométrie non euclidienne.

Niemöller (*F.*). — Déformation d'une plaque plane circulaire infiniment mince sous l'influence de la chaleur, quand la température des différents points de la plaque est une fonction continue de leur distance au centre de la plaque. (270-275).

Hagen (*J.*). — Sur l'application du pendule à la représentation graphique des courbes de Lissajous. (285-303).

Matthiessen (*L.*). — Équations différentielles de la dioptrique des lentilles à disposition continue; application à la dioptrique du cristallin. (304-315).

Frenzel (*C.*). — Représentation des fonctions analytiques uniformes par des produits infinis ou des séries de fractions simples. (316-343).

L'auteur, en suivant la voie ouverte par Cauchy pour la décomposition d'une fonction uniforme en facteurs, s'efforce de parvenir à la démonstration de la proposition donnée par M. Weierstrass dans son Mémoire sur les fonctions uniformes relativement à leur décomposition en facteurs *primaires;* il donne ensuite des applications aux fonctions circulaires et elliptiques; malheureusement, si l'analyse de M. Frenzel est simple, on est obligé de reconnaître qu'elle manque de rigueur. La critique de son travail a d'ailleurs été faite dans le Volume suivant du *Zeitschrift* par M. Herz, qui a mis en évidence les points défectueux.

Schwering (*K.*). — Nouveau problème élémentaire touchant la condition qu'une certaine suite d'opérations soit limitée. (343).

Geisenheimer (*L.*). — Construction de figures en affinité au moyen de systèmes qui se meuvent en restant semblables à eux-mêmes. (344-380).

« Deux systèmes sont en affinité quand ils sont homographiques et que les éléments à l'infini se correspondent. »

Le mouvement d'un système mobile toujours semblable à lui-même est connu quand on connaît à chaque instant la position de deux de ses points. Un tel mouvement sera donc connu quand on connaîtra deux trajectoires et la façon dont se correspondent sur ces trajectoires les points qui à chaque instant peuvent être regardés comme les positions de deux points du système mobile. M. Burmester a montré que, lorsque les points ainsi correspondants formaient deux suites en affinité, il en est de même de deux suites décrites par deux points quelconques du système. Cette proposition et ses conséquences sont étudiées en dé-

tail par M. Geisenheimer, qui en déduit divers résultats intéressants relatifs à la courbure de deux courbes en affinité.

Hauck (*G.*). — Sur la concordance ou la discordance de la collinéation dans l'espace. (381-390).

L'auteur revient sur une proposition qu'il a établie dans le *Zeitschrift* (t. XXI, p. 407) : « Dans deux espaces collinéaires, deux trièdres correspondants offrent toujours ou la même disposition ou des dispositions inverses. » La collinéation, suivant les cas, est dite concordante ou discordante; son caractère est déterminé par le signe du déterminant de la substitution qui exprime analytiquement la collinéation.

Börsch (*A.*). — Sur un système d'équations lié au système d'équations d'une substitution orthogonale. (391-399).

Recherche du maximum du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & x_{01} & x_{02} & \dots & x_{0n} \\ 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ . & \dots & \dots & \dots & \dots \\ . & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix},$$

où les $n(n+1)$ variables x_{ij} sont liées par les $n+1$ relations

$$\sum_{i=1}^{j=n} x_{ij}^2 = 1 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Böklen (*O.*). — Sur la surface de l'onde dans les cristaux biaxes. (400-405).

Schwering (*K.*). — Nouvelle représentation géométrique des lignes géodésiques sur l'ellipsoïde de révolution (405-407).

Horst (*Ed.*). — Sur la division d'un angle en un nombre quelconque de parties égales. (407-408).

Tome XXV; 1880.

Graetz (*L.*). — Sur les mouvements de tournoiement dans les fluides compressibles. (1-10).

L'auteur étudie ces mouvements dans les fluides compressibles, où il n'y a pas de frottement, en supposant que les composantes de la vitesse d'une molécule quelconque et les variations de la densité soient très faibles; les mouvements de tournoiement, en chaque point, sont alors indépendants du temps. M. Graetz montre que les composantes de la vitesse u, v, w en un point quelconque (x, y, z) sont complètement déterminées si l'on se donne les composantes ξ, η, ζ de

la vitesse angulaire de rotation en tous les points : $u, v, w, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}$ à l'époque $t = 0$ pour tous les points $\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial n}, \frac{\partial w}{\partial n}$ pour tous les éléments de la surface limite.

Küttner (*W.*). — Sur la Statistique mathématique. (11-24).

Schwering (*K.*). — Sur une déformation particulière des sections coniques. (25-40).

Si l'on coupe un cône du second degré par un plan et qu'on développe le cône sur un plan, la transformée de la conique sera une certaine courbe dont on a aisément l'équation, d'où cette question : « La déformation peut-elle être telle que la transformée de la conique soit algébrique? » M. Schwering détermine effectivement les courbes algébriques qui doivent être les transformées si ce genre de déformation est possible, puis arrive à ce résultat singulier, que l'identification est impossible pour des valeurs réelles.

Enneper (*A.*). — Sur un problème de la théorie des maxima et minima. (41-43).

Thomae (*L.*). — Convergence des séries Θ. (43-44).

Démonstration géométrique pour $p = 2$.

Soit la série $\Sigma\Sigma e^{-f}$, où $f = ax^2 + 2bxy + cy^2$, la sommation étant étendue à toutes les valeurs $x = x_1 + m, y = y_1 + n$, et m, n prenant toutes les valeurs entières. Ces formules correspondent à une décomposition du plan en carrés dont la surface est 1. Considérons l'ellipse

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = N^2.$$

Désignons, pour $N = 1$, sa surface, et son périmètre par F et L; on reconnaît sans difficulté que le nombre de sommets du réseau de carrés qui tombe entre les deux ellipses qui correspondent aux valeurs N et $N+1$ est inférieur à $F(2N+1) + LN$; les termes correspondants de la série ont donc une somme moindre que

$$[(2N+1)F + NL]e^{-N^2}.$$

Or la série dont cette expression est le terme général converge visiblement.

Niemöller (*F.*). — Sur les oscillations d'une corde dont la tension est une fonction continue du temps. (44-48).

Schlömilch (*O.*). — Sur la généralisation du théorème de Taylor. (48-53).

Il s'agit de la formule

$$\varphi(\zeta + h) = \varphi(\zeta) + \frac{h}{1}\frac{\Delta\varphi(\zeta)}{\Delta\zeta} + \frac{h(h-\delta)}{1.2}\frac{\Delta^2\varphi(\zeta)}{\Delta\zeta^2} + \ldots + \frac{h(h-\delta)(h-2\delta)\ldots[h-(n-1)\delta]}{1.2\ldots n}\frac{\Delta^n\varphi(\zeta)}{\Delta\zeta^n},$$

ou

$$\frac{\Delta^m \varphi(\zeta)}{\Delta \zeta^m} = \frac{1}{\delta^m}(m)_0 \varphi(\zeta + m\delta) - (m)_1 \varphi[\zeta + (m-1)\delta] + \ldots$$

Supposant la fonction φ synectique à l'intérieur d'un contour comprenant les points $\zeta + h$, ζ, $\zeta + \delta$, ..., $\zeta + n\delta$, M. Schlömilch donne la forme du reste,

$$R_n = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{h(h-\delta)(h-2\delta)\ldots(h-n\delta)}{(z-\zeta)(z-\zeta-\delta)\ldots(z-\zeta-n\delta)}\,\frac{\varphi(z)\,dz}{z-(\zeta+h)},$$

et en déduit diverses conditions sous lesquelles la série est convergente.

Waltenhofen (*A. v.*). — Sur une mesure directe du travail d'induction et sur une détermination qui s'en déduit pour l'équivalent mécanique de la chaleur. (53-54).

Kantor (*S.*). — Recherches géométriques (54-59).

Börsch (*A.*). — Ellipse d'aire minimum inscrite à un triangle donné; ellipsoïde de volume minimum inscrit à un tétraèdre. (59-64).

Niemöller (*F.*). — Formules pour le calcul numérique de l'intégrale générale de l'équation différentielle de Bessel. (65-71).

L'auteur donne pour l'intégrale $J_{+\varepsilon}$ de l'équation de Bessel

$$\frac{d^2J}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{dJ}{d\lambda} + J\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2}\right) = 0$$

la formule

$$J_{+\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[A\sin\left(2\lambda + \frac{\alpha\pi}{2}\right) + B\cos\left(2\lambda + \frac{\alpha\pi}{2}\right)\right],$$

où α a été mis à la place de $\frac{1}{2} - \varepsilon$, et où

$$A = \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} - \frac{4!(\alpha+1)_4}{2!\,2^4\lambda^{\frac{5}{2}}} + \frac{8!(\alpha+3)_8}{4!\,2^8.\lambda^{\frac{9}{2}}} - \ldots,$$

$$B = \frac{2!(\alpha)_2}{1!\,2^2.\lambda^{\frac{3}{2}}} + \frac{6!(\alpha+2)_6}{3!\,2^6.\lambda^{\frac{7}{2}}} - \frac{10!(\alpha+4)_{10}}{5!\,2^{10}.\lambda^{\frac{11}{2}}} + \ldots,$$

les quantités $(\alpha)_2$, $(\alpha+1)_4$, ... désignant des coefficients binomiaux. Ces formules conviennent pour le calcul numérique lorsque λ est grand, pour des valeurs de ε inférieures à $\frac{1}{2}$. L'intégrale $O_0\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$ est donnée par la formule

$$O_0 = -\frac{\sin\left(2\lambda + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}}\left(CA_0 + \frac{\pi}{2}\right)B_0$$

$$+\frac{\cos\left(2\lambda + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\pi}{2}A_0 - CB_0\right).$$

où A_1 et B_1 sont ce que deviennent A et B pour $z = \frac{1}{2}$, et où C [illegible]....

Enfin M. Niemöller montre comment le calcul des intégrales pour $z > \frac{1}{2}$ se ramène au calcul des intégrales précédentes.

Matthiessen (*L.*). — Sur les figures ellipsoïdales d'équilibre des satellites de la Terre et de Jupiter. (72-86).

Schumann (*A.*). — Sur les aires de surface et les arcs de courbe décrits par une droite dans le mouvement d'un système solide. (87-94).

Wiener (*C.*). — Sur la dépendance entre certains éléments d'une courbe gauche et les éléments correspondants de sa projection. (95-97).

Geiser. — Sur la construction d'une surface du second ordre qui passe par neuf points. (98-100).

Geiser. — Construction d'une courbe du troisième ordre au moyen de ses points conjugués. (100-103).

Schlömilch (*O.*). — Quelques remarques sur la valeur inverse de la fonction Γ. (103-106).

La définition qui sert de base à la théorie donnée par Gauss des fonctions Γ, combinée avec la formule

$$n^\rho = e^{\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\rho}\, e^{-(C+\delta)\rho},$$

où δ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, donne

$$\Gamma(1-\rho) = e^{-C\rho}\, \frac{e^{\frac{1}{1}\rho}}{1-\frac{1}{1}\rho}\, \frac{e^{\frac{1}{2}\rho}}{1-\frac{1}{2}\rho}\, \frac{e^{\frac{1}{3}\rho}}{1-\frac{1}{3}\rho} \cdots;$$

on en déduit aisément le résultat obtenu par M. Weierstrass, à savoir la possibilité du développement

$$\frac{1}{\Gamma(1-\rho)} = K_0 + K_1\rho + K_2\rho^2 + \ldots$$

M. Schlömilch donne une forme intéressante des coefficients K_n, à savoir

$$K_n = \frac{(-1)^n e}{2\pi .1.2\ldots n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{1+iz} [\log(1+iz)]^n dz.$$

Ce résultat se déduit de la formule due à Cauchy,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{icz}\,dz}{(a+iz)^{\mu}} = \begin{cases} 0 & \text{si } c<0, \\ \dfrac{2\pi}{\Gamma(\mu)}\, c^{\mu-1} e^{-ac} & \text{si } c>0, \end{cases}$$

$\mu - 1$ et la partie réelle de a étant des quantités positives. On en déduit

$$\frac{1}{\Gamma(1+\rho)} = \frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{(1+iz)^{1+\rho}}\, dz.$$

Schröder (*E.*). — Détermination de la valeur, pour n infini, de l'intégrale $\int_0^1 (u)_n\, du$. (106-117).

Suivant les habitudes du *Zeitschrift*, le symbole $(u)_n$ désigne le coefficient binomial

$$(u)_n = \frac{u!}{n!\,(u-n)!}.$$

M. Schröder parvient à la formule approchée, pour n très grand,

$$(u)_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n\,(\log n)^2}.$$

Schlömilch (*O.*). — Remarque sur la Communication précédente. (117-119).

M. Schlömilch donne le résultat suivant,

$$\int_0^1 (u)_{m-1}\, du = \frac{(-1)^m}{m+1}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{3S_2}{a^4} - \frac{8S_3}{a^5} + \frac{5S_4}{2a^6} + \cdots\right)$$

où

$$S_p = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots, \quad a = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}.$$

Consentius (*R.-O.*). — Le cercle cubique. (119-121).

Consentius (*R.-O.*). — Sur la détermination de la position oblique de deux faisceaux de rayons projectifs dans le plan. (122-124).

Herz (*N.*). — Sur la représentation des fonctions analytiques uniformes. (125-128).

Krey (*H.*). — Sur la résolution, par M. Hermite, de l'équation du cinquième degré. (129-146).

Exposition détaillée de la méthode de M. Hermite et des propositions d'Algèbre qu'elle suppose.

Niemöller (*F.*). — Déformation, sous l'action du magnétisme ter-

restre, d'un fil conducteur élastique traversé par un courant (147-155).

Mertens (*F.*). — Deux problèmes de contact. (148-170).

Solution analytique de ces problèmes : « Étant donnée une surface du second ordre F et trois plans a, b, c, trouver un plan qui coupe F suivant une conique tangente aux sections déterminées par les trois plans a, b, c. Déterminer trois plans $u_x = 0$, $v_x = 0$, $w_x = 0$ tels que chacune des sections qu'ils déterminent dans la surface F soit tangente aux deux autres et aussi à deux des sections déterminées par les trois plans donnés $a_x = 0$, $b_x = 0$, $c_x = 0$. »

Lehmann (*E.*). — Sur l'action de deux sphères en repos, ou animées d'un mouvement de rotation, en admettant la loi de Weber. (171-195, 244-262).

Schröder (*E.*). — Sur les propriétés des coefficients binomiaux relativement à la résolution de l'équation trinôme. (196-207).

Communication relative à un travail de M. von Mangoldt sur le développement en série de la racine de l'équation

$$w - y(1+w)^\rho = 0,$$

qui s'annule pour $y = 0$.

Böklen (*O.*). — Sur la surface de l'onde dans les cristaux biaxes. (207-213).

Geisenheimer (*L.*). — Relation entre les rayons de courbure de deux courbes collinéaires. (214-215).

Le rapport entre les rayons de courbure en deux points correspondants de deux courbes projectives est égal au cube du rapport des segments des tangentes prolongées jusqu'à l'axe de collinéation, multiplié par le rapport anharmonique de la collinéation, constant pour tous les points des deux courbes.

Graefe (*F.*). — Quelques notes sur l'hexagramme de Pascal. (215-216).

Helm (*G.*). — Essais sur l'exposition géométrique de la Mécanique. (217-233).

Schwering (*K.*). — Sur une classe de courbes dont les arcs s'expriment par des intégrales elliptiques ou hyperelliptiques de première espèce. (234-243).

M. Kiepert (*Journal de Borchardt*, t. 79, p. 304) a fait connaître une suite de courbes dont les arcs s'expriment au moyen d'intégrales elliptiques de première espèce. M. Schwering, reprenant par une méthode personnelle les exemples traités par M. Kiepert, donne des résultats plus généraux.

Vietor (*A.*). — Le couple de cercles polaires d'une cycloïde. (263-271).

L'auteur montre comment toute courbe engendrée par un point invariablement lié à un cercle qui roule sur un autre cercle est susceptible d'un double mode de génération.

Pfannstiel (*A.*). — Sur une méthode pour déterminer la mesure absolue de la composante horizontale du magnétisme terrestre par la simple observation d'oscillations. (271-279).

Kröber. — Sur les centres de similitude des sphères d'un faisceau de sphères tangentes à trois sphères données. (279-280).

Goebel (*J.-B.*). — Sur quelques propriétés du cylindroïde. (281-299).

Geisenheimer (*L.*). — Relation entre les rayons de courbure de deux courbes réciproques, collinéaires ou inverses. (300-315).

L'un des principaux théorèmes démontrés dans ce travail a été donné plus haut; en voici un autre du même genre :

Le produit des rayons de courbure en deux points correspondants de deux courbes en involution réciproque est inversement proportionnel au cube du produit des distances des tangentes au centre de l'involution.

Graetz (*L.*). — Sur le mouvement d'un fluide dans un tûbe. (316-334, 375-404).

Schlömilch (*O.*). — Sur une transformation de la fonction Γ. (335-342).

Communication relative à la fonction

$$P(x) = \left(1+\frac{x}{1}\right)^{\frac{1}{1}}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\cdots$$

et à son logarithme; l'auteur donne diverses formules pour le calcul de ce logarithme.

Braun (*W.*). — Formule de correction pour le décrément logarithmique. (342-345).

Böklen (*O.*). — Sur la surface de l'onde dans les cristaux biaxes. (346-351).

Schlömilch (*O.*). — Sur le quotient de deux fonctions Γ. (351-352).

L'auteur établit la formule

$$\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p)}=\sqrt{p}\,e^{-\frac{1}{4p}}\left[1+\frac{\alpha_1}{p+\frac{1}{2}}\frac{\alpha_2}{\left(p+\frac{1}{2}\right)\left(p+\frac{3}{2}\right)}\cdots\right],$$

où

$$\alpha_1=\frac{1}{8},\quad \alpha_2=\frac{9}{128},\quad \alpha_3=\frac{193}{3072},\quad \cdots.$$

Wittwer (W.-C.). — Fondements de la Chimie mathématique. (353-374).

Stier (K.). — Sur les figures ellipsoïdales d'équilibre et la vitesse de rotation d'une masse homogène fluide d'énergie donnée. (405-409).

Schönemann (P.). — Le *Kreuzpendel* et le *Pendelkreuz*, appareils pour la représentation graphique des courbes d'oscillation. (410-414).

Schur (F.). — Sur les tangentes communes à deux surfaces du second degré ayant un quadrilatère gauche commun. (414-415).

Schlömilch (O.). — Note sur certaines fractions décimales périodiques. (416).

Soient T un diviseur de 10^{k+1} et

$$N=\frac{10^k+1}{T};$$

les k chiffres du nombre entier T — 1 sont les k premiers chiffres de la période de la fraction décimale équivalente à $\frac{1}{N}$, les k derniers étant leurs compléments à 9. Exemple : $T=7$, $N=143$, $T-1=6$, $\frac{1}{143}=0,006993\ldots.$

MONTHLY NOTICES OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY OF LONDON (¹).

Tome XL; novembre 1879 à juin 1880.

Pearson (J.). — Note sur la mise en place d'une lunette équatoriale. (1-2).

(¹) Voir *Bulletin*, III_2, 203.

L'auteur suppose les cercles d'ascension droite et de déclinaison rigoureusement placés sur l'instrument; on le tourne alors sur lui-même jusqu'à ce que la visée sur une étoile connue donne sa déclinaison exacte et l'angle horaire qui convient à l'heure de l'observation.

Herschel (Major *J.*). — **Note sur la différence de l'intensité de la pesanteur à Revel et à Saint-Pétersbourg et sur les observations de longueur du pendule faites en d'autres stations par Grischow. (2-5).**

Neison (*E.*). — **Note sur le demi-diamètre de la Lune. (5-7).**

Suivant M. Neison, le demi-diamètre de la Lune, mesuré dans un instrument méridien de A pouces anglais d'ouverture, est égal à

$$15'33'',37 + 4'',10(1 + 0'',70 A).$$

Dans une lunette de 13 pouces, comme celle du professeur Pritchard, à Oxford, le demi-diamètre doit alors être de

$$15'33'',78,$$

et, en y ajoutant 0",30 pour l'irradiation photographique, on arrive à

$$15'34'',08,$$

nombre identique à celui qu'a déduit M. Pritchard de la mesure des photographies faites sous sa direction.

Wilding (*R.*). — **Comparaison du coefficient adopté par Hansen pour la latitude de la Lune avec le coefficient employé par Plana et par quelques autres astronomes. (8-10).**

Les coefficients de Hansen s'accordent d'une manière très remarquable avec ceux de Plana, de Delaunay, de Damoiseau et de Pontécoulant.

Adams (*J.-C.*). — **Note sur l'ellipticité de Mars et son effet sur le mouvement de ses satellites. (10-13).**

M. Adams a calculé quel doit être le mouvement des nœuds et l'inclinaison des orbites des satellites de Mars dans l'hypothèse de différentes ellipticités de la planète :

SATELLITE I.

Mouvement annuel du nœud dû à l'action solaire, 0°,06.
En supposant l'ellipticité de

$$\frac{1}{118},\quad \frac{1}{176},\quad \frac{1}{228},$$

le mouvement du nœud dû à cette ellipticité sera

$$33°,\quad 18°,2,\quad 11°,3,$$

correspondant à des inclinaisons du plan fixe sur l'équateur égales à

$$17'', \quad 31'', \quad 50''.$$

SATELLITE II.

Mouvement annuel du nœud dû à l'action solaire, 0°,24.
En supposant l'ellipticité de

$$\frac{1}{118}, \quad \frac{1}{176}, \quad \frac{1}{228},$$

le mouvement du nœud dû à cette ellipticité sera

$$13°,4, \quad 7°,3, \quad 4°,5,$$

correspondant à des inclinaisons du plan fixe sur l'équateur égales à

$$27', \quad 50', \quad 1°19'.$$

L'inclinaison des satellites de Mars sur le plan de l'équateur de la planète restera donc toujours très faible.

Harkness. — **Sur la constitution physique de Mars. (13).**

Les dessins qui ont servi à M. Harkness pour la construction de la Carte de Mars, dont les *Monthly Notices* donnent un fac-simile, ont été obtenus, en 1877, avec l'équatorial de 26 pouces de Washington. La Carte ressemble à celle publiée par M. Kaiser dans le Tome III des *Leiden Observations*.

Draper (J.-C.). — **Note sur une photographie du spectre solaire montrant les lignes noires de l'oxygène. (14-17).**

Calver (G.). — **Note sur le travail d'un miroir en verre argenté de 37 pouces de diamètre, destiné à M. Common. (17-20).**

La première Partie du travail a été faite à l'aide d'une machine analogue à celles de lord Rosse ou de Lassell; les corrections ont été obtenues à la main.

Bowden (A.). — **Description d'un micromètre enregistreur. (21-23).**

L'enregistrement est obtenu en poussant des chevilles placées dans des ouvertures qui correspondent aux divisions du tambour ordinaire des micromètres.

Lindsay (lord). — **Observations du spectre de la comète *d* de 1879 (comète Palisa). (23).**

Le spectre obtenu par MM. R. Copeland et J.-G. Lohse se composait des trois bandes ordinaires, ayant pour longueurs d'onde :

	mmm.
Bande I	551,3
Bande II	511,7
Bande III	465,5

Copeland (*R.*) et *Lohse* (*J.-G.*). — **Observations de la comète *d* de 1879 (comète de Palisa), faites à Dun-Echt du 26 août au 20 octobre 1879. (24-25).**

Stone (*E.-J.*). — **Note sur la probabilité d'une liaison passée entre quatre étoiles éloignées du ciel austral. (26-30).**

Les quatre étoiles étudiées par M. Stone

	Mouvement propre en Æ.	Mouvement propre en δ.
	s	″
ζ du Toucan	+ 0,280	— 1,13
e Éridan	+ 0,266	— 0,75
ζ_1 du Réticule	+ 0,194	— 0,65
ζ_2 du Réticule	+ 0,190	— 0,65

sont remarquables par la grandeur inusitée de leurs mouvements propres. En comparant leur position relative telle qu'elle résulte des observations faites depuis Lacaille, l'auteur démontre :

1° Que les étoiles considérées ont un mouvement propre plus grand que celui de la moyenne des étoiles;

2° Que ces étoiles ont un mouvement propre commun de plus de 1″;

3° Que ces quatre étoiles ont entre elles un mouvement relatif beaucoup plus faible que leur mouvement commun.

Ces faits paraissent à M. Stone prouver que ces astres, quoique très éloignés, ont été en relation physique à leur origine.

Ellery (*R.-J.-L.*). — **Observation de la conjonction de Mars et de Saturne, faite à Melbourne le 30 juin 1879. (30-32).**

Winnecke (*A.*). — **Observation de l'éclipse solaire du 18 juillet 1879, faite à l'Observatoire de l'Université de Strasbourg. (33-35).**

Schuster (*A.*). — **Recherches sur la polarisation de la couronne solaire. (35-57).**

Le Dr Schuster examine successivement les problèmes suivants :

1° Quantité de lumière renvoyée dans une direction donnée par une particule de matière située au voisinage d'une sphère lumineuse.

2° Cas d'une sphère lumineuse surmontée d'une atmosphère de particules dispersantes.

L'intensité de la polarisation radiale augmente avec la distance au Soleil si les particules dispersantes sont distribuées suivant la raison inverse d'une puissance quelconque de leur distance au Soleil.

3° Quantité de lumière polarisée dispersée dans les diverses directions par une atmosphère de particules enveloppant un point lumineux.

4° Quantité de lumière polarisée envoyée dans les diverses directions par une atmosphère de particules en partie lumineuses par elles-mêmes.

5° Cas de la couronne solaire.

Il a été fait un trop petit nombre de déterminations de l'intensité de la polarisation de la couronne pour que les résultats numériques de M. le Dr Schuster puissent être utilement comparés à la réalité; mais, les lois auxquelles il arrive étant très différentes suivant le mode de distribution de la matière circumsolaire, la question de la polarisation de la couronne devra être étudiée avec soin.

Stone (*E.-J.*). — Comparaison entre les ascensions droites et les distances polaires des étoiles du *Nautical Almanac* et celles du Catalogue général du Cap de Bonne-Espérance pour 1880. (57-70).

Les corrections en ascension droite sont très faibles.

Les corrections en déclinaison sont plus considérables et offrent une marche systématique, suivant l'ascension droite des étoiles ou suivant les saisons dans lesquelles elles sont observées. Les Tables de réfraction de Bessel ne corrigent donc pas suffisamment les observations de l'influence de la température de l'air, ou plutôt de l'influence de l'état hygrométrique de l'air. La correction passe de $-0'',24$ pour les étoiles de 0^h à 6^h d'ascension droite, observées pendant la saison sèche, à $+0'',39$ pour les étoiles comprises entre 12^h et 18^h d'ascension droite, observées au méridien pendant la saison humide.

Marth (*A.*). — Éphéméride pour les satellites d'Uranus en 1880. (70-71).

Tacchini (*P.*) et *Millosevich*. — Observations de la comète de Palisa et de la comète de Hartwig, faites à l'équatorial du Collège Romain en septembre et octobre 1880. (72-74).

Neison (*E.*). — Sur la correction d'équation personnelle exigée par les observations de la Lune, faites au cercle des passages de l'Observatoire de Greenwich. (75-80).

La grandeur des corrections a brusquement changé en 1870 par l'adjonction d'observateurs nouveaux aux observateurs anciens.

Newcomb (*S.*). — Note sur la correction de la longitude moyenne de la Lune dans les Tables de Hansen. (81-82).

Lynn (*W.-T.*). — Sur un changement récent dans l'erreur moyenne de longitude de la Lune, d'après les Tables de Hansen. (82-85).

Downing (*A.-M.-W.*). — Note sur les distances polaires du *Seven Year Catalogue* de Greenwich pour 1860. (85-86).

Noble (capitaine *W.*). — Note sur deux dessins de Jupiter, faits dans les nuits du 4 et du 18 octobre 1879. (86-87).

Copeland (*R.*) et *Lohse* (*J.-G.*). — Note sur le spectre de la tache rouge de Jupiter. (87-88).

D'après les observations faites à Dun-Echt, la tache rouge produit dans le spectre une bande sombre qui s'étend du rouge à F, mais laisse voir les lignes du spectre de la planète.

Hall (*M.*). — La nébuleuse des Pléiades. (89).

Remarques sur les descriptions de cette nébuleuse par Bessel, Schonfeld, Tempel et Schiaparelli.

Webb (*T.-W.*). — Découverte d'une nébuleuse gazeuse dans le Cygne. (90-91).

La nébulosité a 4" de diamètre; sa position est identique à celle de l'étoile 4004 de la zone +41° d'Argelander.

Knott (*G.*). — Note sur la nébuleuse gazeuse du Cygne. (91).

Son spectre est formé d'une seule ligne lumineuse très brillante.

Lindsay (lord) et *Lohse* (*J.-G.*). — Note sur les nébuleuses du Cygne. (91-92).

Le spectre est formé de trois lignes ayant pour longueurs d'onde

500,1, 495,7, 486,5.

Winnecke. — Note sur la nébuleuse du Cygne. (92-93).

La nébuleuse est elliptique avec un grand axe de 5",7.

Common (*A.-A.*). — Note sur Mimas et Hypérion. (93-95).

Les deux satellites de Saturne ont été observés en octobre et novembre 1879, avec un télescope de 36 pouces anglais d'ouverture.

Common (*A.-A.*). — Observations des satellites de Mars en septembre, octobre et novembre 1879. (95-99).

Burnham (*S.-W.*). — Observations de nouvelles étoiles doubles, faites à l'Observatoire de Dearborn (Chicago). (99-102).

Copeland (*R.*) et *Lohse* (*J.-G.*). — Observations du satellite extérieur de Mars, faites à Dun-Echt en novembre 1879. (102-103).

Lohse (*J.-G.*) et *Knott* (*G.*). — Observations de l'étoile rouge découverte dans le Petit Chien par M. Baxendell. (103-104).

La position est, pour 1879,0,

Æ..............................	$7^h 34^m 45^s,67$
δ..............................	$+ 8° 39' 39'',6$

Bosanquet (*R.-H.-M.*) et *Sayce* (*A.-H.*). — L'Astronomie babylonienne. (105-123).

Le Mémoire de ces deux savants est consacré à l'étude de divers fragments de zodiaque et de planisphères publiés par le *British Museum* (*Western Asiatic Inscriptions*); malgré son grand intérêt, il ne saurait être analysé ici.

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les averses météoriques. (124-131).

Les averses météoriques nouvelles sur lesquelles M. Denning voudrait attirer l'attention des observateurs sont les suivantes :

	α.	δ.
	°	°
I. Juillet 30-août 1..............	35	+ 53
II. Juillet 27-30..................	341	— 13
III. Août 21-25....................	291	+ 60
IV. Octobre 14-20................	31	+ 9
V. Août 8-11......................	41	+ 25

Corder (*H.*). — Averses météoriques observées de 1870 à 1879. (131-133).

Corder (*H.*). — Liste des points radiants des météores observés de 1876 à 1879 à Writtle (Essex). (134-138).

Perry (le Révérend *S.-J.*). — Les météores de novembre. (139-140).

Les observations d'étoiles filantes faites en novembre à Stonyhurst ont donné les résultats suivants :

	Météores.
Novembre 13...........................	67
» 14...........................	144
» 15...........................	98

Ellery (*R.-L.-J.*). — Occultation de 64 du Verseau, observée à l'Observatoire de Melbourne le 14 septembre 1879. (140-142).

D'après M. Ellery, qui observait avec un équatorial de 8 pouces, les phénomènes ont été les suivants : le premier contact de l'étoile et du disque de la planète s'est produit à $10^h 5^m 19^s$ (temps moyen de Melbourne); l'étoile est restée visible dans cette même position pendant environ deux minutes; peu à peu elle s'est projetée sur le disque de la planète et semblait vue comme à travers un brouillard; enfin, à $10^h 7^m 43^s,8$, elle disparaissait complètement, après s'être éteinte en deux secondes.

Des phénomènes semblables ont été observés au grand télescope par M. Turner.

Perry (*S.-J.*). — Occultations d'étoiles observées à Stonyhurst en octobre et novembre 1879. (143).

Perry (*S.-J.*). — Observations des satellites de Jupiter, faites en 1879 à Stonyhurst. (144-148).

Airy (*G.-B.*). — Occultations d'étoiles par la Lune et phénomènes des satellites de Jupiter, observés à Greenwich en 1879. (149-152).

Pratt (*H.*). — Sur la période de rotation de Jupiter. (153-157).

L'auteur, en discutant ses observations de 1879 par une méthode analogue à celle qui a été employée en 1835 par M. Airy (*Mémoires de la Société Astronomique de Londres*, t. IX), trouve que la tache rouge donne une rotation de $9^h 55^m 33^s,91$. Ce nombre est presque identique à celui que Schroeter avait déterminé en 1786, et un peu plus petit que celui publié par M. J.-F.-J. Schmidt en 1866.

Backhouse (*T.-W.*). — Observations du passage de la tache rouge de Jupiter par le méridien central de la planète pendant les mois d'août à décembre 1879. (157).

Airy (*G.-B.*). — Surface moyenne des taches solaires en 1878 et 1879, d'après les photographies faites à l'Observatoire de Greenwich. (158-159).

De la comparaison de ces résultats avec ceux des années précédentes, il résulte que le minimum des taches solaires et des facules s'est produit à la fin de 1878 ou dans les premiers mois de 1879.

	Surfaces moyennes		
Années.	des ombres	des taches entières	des facules
1878........	5	25	84
1879.....................	10	44	163

Marth (*A.*). — Note sur les observations et la mesure de l'éclat de Mars, qui peuvent être faites en février ou mars 1880. (159-161).

L'éclat de Mars a été comparé, en 1801, par Olbers, à celui de α du Taureau et de α d'Orion ; le célèbre astronome de Brême a trouvé un éclat intermédiaire. Ce sont ces mêmes observations que M. Marth voudrait voir reprendre.

Airy (*G.-B.*). — Observations du satellite extérieur de Mars, faites à Greenwich le 12 novembre 1879. (161-162).

Downing (*A.-M.-W.*). — Note sur le Catalogue étalon d'ascensions droites de Greenwich. (162-165).

Les différences entre les positions des étoiles telles qu'elles sont données dans l'Introduction du *Greenwich Nine-Year Catalogue* et dans les Catalogues de Newcomb (*Washington Observations for* 1870), de Gyldén (*Monthly Notices for* 1875) et d'Auwers (*Publication der Astronomischen Gesellschaft*, n° 14), peuvent être réduites à des quantités inférieures à $0^s,02$, si l'on corrige le Catalogue de Newcomb de la quantité constante — $0^s,009$, celui de Gyldén de — $0^s,016$ et celui d'Auwers de — $0^s,026$.

Les différences entre ces divers Catalogues tiennent donc à une différence dans la position adoptée pour les équinoxes.

Dunkin (*E.*). — Sur l'influence de l'erreur personnelle sur les erreurs des Tables lunaires. (165-167).

Ce sont des remarques sur le travail de M. Neison sur le même sujet et une défense de l'ancien travail de l'auteur.

Pritchard (*C.*). — Note sur la mesure des photographies lunaires, en réponse aux observations critiques de M. Neison. (167-169).

Réponse aux critiques de M. Neison, publiées à la page 5 du présent Volume des *Monthly Notices*. Le procédé de mesure est celui de Bessel, avec quelques légères modifications.

Burton (*C.-E.*). — Changement dans l'éclat relatif des satellites de Jupiter. (169).

Todd (*C.*). — Observations des phénomènes des satellites de Jupiter, faites, en 1878, à l'Observatoire d'Adelaïde. (170-176).

Rapport annuel du Conseil de la Société Astronomique. (177-268).

Nous relevons dans ce Rapport les données suivantes :

Le nombre des membres de la Société est de 635, sensiblement le même que celui de l'année précédente. Les recettes de la Société, cotisations ou rentes, ont été de 67 951^{fr}.

Le Tome XLI des Mémoires de la Société, contenant les observations faites pendant les éclipses, est en distribution.

Parmi les membres perdus par la Société et auxquels une Notice nécrologique est consacrée, nous citerons :

Key (*Henry-Cooper*) (1819-1879).

Maclear (*Thomas*) (1794-1879). — Après avoir été médecin et avoir construit chez lui un petit observatoire, il fut, en 1833, nommé directeur de l'Observatoire du Cap de Bonne-Espérance; il a occupé ce poste jusqu'en 1870. Maclear a vérifié le méridien de Lacaille (1840-1847), déterminé la parallaxe de α du Centaure, observé un grand nombre de comètes et poursuivi sans relâche une série d'observations méridiennes qui sont la base du Catalogue du Cap, que M. Stone s'occupe aujourd'hui de publier.

Lamont (*Jean de*) (1805-1879). — Entré à l'Observatoire de Munich en 1828, avec le titre d'assistant, il devint directeur de l'établissement en 1835, et il y est

mort en août 1879. Lamont laisse un très grand nombre de Mémoires spéciaux et 34000 observations d'étoiles rassemblées dans dix Catalogues.

Dans la série des Rapports sur les travaux des Observatoires anglais ou étrangers, je relève les renseignements qui suivent :

Greenwich. — Les observations méridiennes ont été régulièrement poursuivies. M. Lynn a discuté les observations de la Lune faites à l'altazimut de 1864 à 1878. Le grand équatorial a été modifié, dans le but de le rendre plus propre aux travaux de Spectroscopie.

Observatoire de Radcliffe (*Oxford*). — Les instruments ont été réparés sous la direction de M. Stone.

Observatoire de l'Université d'Oxford. — M. Pritchard a continué les observations de l'amas des Pléiades et commencé l'étude de l'amas 39 de Messier dans la constellation du Cygne.

Observatoire de Dunsink. — Les recherches sur la parallaxe de 61 du Cygne, de 1618 Groombridge et de l'étoile 249 de Schjellerup ont été continuées.

Observatoire de M. Common, à Faling. — Un télescope de 36 pouces anglais de diamètre a été monté.

Observatoire de M. Huggins, à Upper-Tulse-Hill. — On a obtenu des photographies des spectres de Sirius, Véga, Rigel, α du Cygne, α de la Vierge, α de la Grande Ourse, α de l'Aigle, Arcturus, β Pégase, Betelgeuse, la Chèvre, α d'Hercule et α Pégase.

Observatoire du comte de Rosse, à Birr-Castle. — Le Catalogue des nébuleuses observées de 1848 à 1878 avec les télescopes de 3 et de 6 pieds a été publié en partie.

Observatoire du Cap. — Le Catalogue de 12 400 étoiles comprises entre 30° de déclinaison sud et le pôle austral est prêt pour l'impression. M. D. Gill a été nommé directeur de l'Observatoire en mai 1879.

Parmi les Notices relatives aux progrès de l'Astronomie, je signalerai :

1° Une Analyse des recherches de M. G.-H. Darwin sur l'histoire du système solaire;

2° Une Note sur l'*Uranometria Argentina*, du Dr Gould; cet Ouvrage a été spécialement analysé dans le *Bulletin*.

Gasparis (*A. de*). — Sur la variation du demi-grand axe des orbites planétaires. (269-270).

Hall (*A.*). — Observations des satellites de Mars, faites en 1879 à l'Observatoire de Washington. (271-283).

	h m s
La révolution de Phobos est de...........	7.39.13,94
La révolution de Deimos est de...........	30.17.54,38

Holden (*E.-S.*). — Observations de Mimas et occultation de Rhéa, observées, en 1879, avec l'équatorial de 26 pouces de Washington. (283-285).

Gledhill (*J.*). — Observations des satellites de Saturne, faites, en 1879, à l'Observatoire de M. E. Crossley, à Halifax. (285-286).

Gledhill (*J.*). — Observations des phénomènes des satellites de Jupiter, faites, en 1879, à l'Observatoire de M. E. Crossley, à Halifax. (287-292).

Pritchard (*C.*) et *Plummer* (*W.*). — Observations du satellite extérieur de Mars, faites, en novembre 1879, à l'Observatoire de l'Université d'Oxford. (292).

Wolf (*C.*). — Note sur la nébuleuse des Pléiades. (293).

La nébuleuse n'est pas variable; les différences d'aspect tiennent à l'état du ciel et à l'étendue du champ de la lunette employée.

Vogel (*H.-C.*). — Note sur le spectre de l'étoile rouge, découverte dans le Cygne par M. Baxendell. (294).

Le bleu et le violet sont très faibles; quelques lignes noires existent dans le rouge.

Gwynne (lieutenant *B.*). — Observations de la grande comète australe, 1880, I, faites à Montevideo, du 1er au 8 février 1880. (295).

Morris (*S.-S.-O.*). — Observations de la grande comète australe, 1880, I, faites à Montevideo, du 1er au 7 février. (295-297).

Ellery (*R.-L.-J.*). — Note sur la grande comète australe, 1880, I, d'après son aspect à Melbourne le 1er et le 5 février. (297).

Todd (*C.*). — Observations de la grande comète australe, faites à l'Observatoire d'Adelaïde. (298-299).

Eddie (*L.-A.*). — Observations de la grande comète australe, faites à Graham's Town. (299-300).

Gill (*D.*). — Observations de la grande comète australe, 1880, I, faites à l'Observatoire du Cap. (301-301).

Quelques observations de positions ont pu être faites sur la montagne de la Table, avec un altazimut portatif, entre le 10 et le 15 février 1880.

Neison (*E.*). — Recherches sur la détermination de l'équation personnelle des observateurs de la Lune. (302-307).

Lynn (*W.-T.*). — Note supplémentaire sur les changements survenus dans les erreurs des Tables lunaires de Hansen. (307-308).

Tebbutt (*J.*). — Détermination de la longitude de l'Observatoire de Windsor (N. S. W.) par les culminations lunaires. (308-310).

La longitude de Windsor est $10^h 3^m 21^s,8$ à l'Est de Greenwich.

Airy (*G.-B.*). — Latitude héliographique moyenne des taches solaires de 1874 à 1879, d'après les photographies faites à Greenwich. (311).

	Taches de l'hémisphère nord.		Taches de l'hémisphère sud.	
	Surface moy.	Latitude moy.	Surface moy.	Latitude moy.
		° ′		° ′
1874..................	245	9. 3	326	—12. 9
1875................	125	11.12	127	— 9.30
1876................	43	12.31	84	—10.55
1877................	32	9.10	60	— 9.41
1878................	21	7.13	3	— 7.40
1879................	11	23.54	34	—22.39

Christie (*W.-H.-M.*). — Note sur les erreurs systématiques des distances polaires déterminées à Greenwich. (312-315).

Buckney (*T.*). — Description d'une nouvelle horloge marchant dans une atmosphère à pression constante (315-318).

Sadler (*H.*). — Notes sur le Catalogue de 10300 étoiles doubles ou multiples qui forme le Volume XL des *Mémoires de la Société astronomique*. (318-328).

Copeland (*R.*). — Notes sur le phénomène connu sous le nom de *bandes d'ombre* qui s'observe pendant les éclipses totales. (329-331).

Le phénomène de bandes obscures mobiles, analogues à celles des éclipses totales, a été observé à Dun-Echt à l'instant où le Soleil se couchait derrière une colline voisine. Les bandes sont plus ou moins nettes suivant le calme de l'atmosphère.

Green (*N.-E.*). — Sur quelques changements survenus dans les taches de Mars depuis l'opposition de 1877. (331-332).

La mer de Dawes, invisible en 1877, s'est montrée de nouveau en 1879.

Stone (*E.-J.*). — Sur la valeur de la réfraction moyenne. (333-349).

Une discussion complète des observations de circumpolaires faites à Greenwich montre que les réfractions de Bessel doivent être légèrement diminuées.

Konkoly (*N. de*). — Liste de 400 points radiants déduits des observations d'étoiles filantes, faites en Hongrie de 1871 à 1878. (349-363).

Barker (*D.-W.*). — Étoiles filantes observées en 1879 pendant un voyage de Londres à Melbourne et retour. (364-367).

Airy (*G.-B.*). — Note sur la valeur théorique de l'accélération du moyen mouvement de la Lune en longitude, telle qu'elle résulte d'un changement de l'excentricité de l'orbite terrestre. (368-376).

Common (*A.-A.*). — Note sur la nébuleuse des Pléiades. (376-377).

La nébuleuse se composerait de trois parties distinctes.

Brewin (*T.-D.*). — Mesure de la rotation de Jupiter. (377).

La période de rotation, déduite d'observations faites du 7 août 1879 au 4 février 1880, est de $9^h 55^m 34^s,1$.

Ellery (*R.-L.-J.*). — Observations de la grande comète de l'hémisphère sud, 1880, I, faites à l'Observatoire de Melbourne. (377-378).

Les observations s'étendent du 9 au 17 février.

Russel (*H.-C.*). — Observations de la queue de la grande comète australe, faites à l'Observatoire de Sydney. (379).

Marth et *Lindsay* (lord). — Sur l'éclat relatif de Mars et des étoiles voisines, d'après les observations photométriques faites à Dun-Echt en février et mars 1880. (380).

Airy (*G.-B.*). — Note sur les préparatifs à faire pour l'observation du passage de Vénus le 6 décembre 1882. (381-385).

Le directeur de l'Observatoire de Greenwich propose :

1° De ne pas employer les procédés photographiques ;

2° D'observer des entrées accélérées dans la colonie du Cap ;

3° D'observer des entrées retardées à Cuba et aux Barbades ;

4° D'observer des sorties accélérées à Cuba, aux Barbades et dans le centre de l'Amérique ;

5° D'obtenir enfin des sorties retardées sur la côte est d'Australie.

M. Airy pose comme règle invariable que l'altitude du Soleil, au moment de l'observation, doit être de 15° au moins.

Campbell (*J.*) et *Neison* (*E.*). — Recherches sur la détermination

de la parallaxe solaire au moyen de l'inégalité parallactique du mouvement de la Lune. (386-411).

Adams (*J.-C.*). — Note sur les recherches de l'Astronome Royal (Airy), relativement à la valeur théorique de l'accélération du moyen mouvement de la Lune. (411-415).

Marth (*A.*) — Éphémérides pour l'observation physique de Jupiter, en 1880-1881. (416-419).

Marth (*A.*). — Recherches sur le mouvement de rotation de Jupiter, d'après les observations faites sur la tache rouge en 1879. (419-429).

La discussion d'un grand nombre d'observations conduit M. Marth à prendre pour durée de rotation de la planète $9^h 55^m 34^s,1$.

Downing (*A.-M.-W.*). — Note sur la possibilité d'une période de dix mois dans la latitude de la Lune. (430-433).

Draper (*H.*). — Note sur une photographie du spectre de Jupiter, qui tend à prouver que la planète a une lumière propre. (433-435).

Johnson (*S.-J.*). — Liste des éclipses solaires centrales visibles dans la Grande-Bretagne, de 1263 à 2200. (436-437).

Tebbutt (*J.*). — Sur la variabilité de 2472 B. A. C. (437).

Copeland (*R.*). — Observations de la comète de Schäberle, 1880, *b*, faites à Dun-Echt en avril et mai 1880. (438).

Hind (*J.-R.*). — Éléments paraboliques de la comète de Schäberle. (439).

Tebbutt (*J.*). — Deuxième Note sur la longitude de Windsor (N. S.W.). (440).

Campbell (*J.*) et *Neison* (*E.*). — Recherches sur la détermination de la parallaxe solaire au moyen de l'inégalité parallactique du mouvement de la Lune (second Mémoire). (441-469).

La valeur de la parallaxe solaire est comprise entre 8",848 et 8",778, suivant que l'on admet ou que l'on n'admet pas une inégalité de quarante-six ans dans le mouvement de la Lune.

Adams (*J.-C.*). — Recherches sur l'accélération séculaire du

moyen mouvement de la Lune, ayant pour cause le changement séculaire de l'excentricité de l'orbite de la Terre, recherches faites en tenant compte des termes de l'ordre de m^4, mais en négligeant l'excentricité et l'inclinaison de l'orbite de la Lune. (472-482).

Adams (J.-C.). — Note sur la constante de la parallaxe lunaire. (482-488).

Marth (A.). — Éphéméride pour la position des satellites de Neptune en 1880 et 1881. (488-490).

Marth (A.). — Addition aux éphémérides pour l'observation physique de Jupiter en 1880-1881. (490-497).

Burnham (S.-W.). — Examen des mesures d'étoiles doubles du Catalogue de Bedford (Catalogue de l'amiral Smyth). (497-532).

Les observations de M. Burnham constituent une révision complète des mesures faites par l'amiral Smyth sur les étoiles doubles, avec compagnons distincts, qui avaient été observées avant la publication du *Cycle of celestial objects*. M. Burnham corrige d'assez nombreuses erreurs du *Bedford Catalogue*.

Knobel (E.-B.). — Remarques sur le Mémoire précédent de M. Burnham. (532-537).

L'auteur ajoute de nouvelles corrections à celles de M. Burnham.

Franks (W.-S.). — Notes sur 2472 B. A. C., dont la variabilité a été signalée par M. Tebbutt. (537).

Safford (T.-H.). — Éléments paraboliques de la comète Schäberle, 1880, *b*. (538).

Bigourdan (M.-G.). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète de Schäberle, 1880, *b*. (538-559).

Wagner (M.-A.). — Note sur l'étoile n° 894 du premier *Seven years Catalogue* de l'Observatoire de Greenwich. (560-561).

Johnson (S.-J.). — Coïncidence des taches solaires et des aurores boréales dans l'ancien temps. (561-563).

M. Johnson trouve une coïncidence entre les apparitions de quelques grandes aurores boréales, signalées dans le *Chronicon Scotorum* et l'*Anglo-saxon Chronicle*, entre les années 670 et 1131, et les dates de maxima des taches solaires, telles qu'elles résultent des travaux de M. R. W.

Lohse (*J.-G.*). — Note sur les indices de réfraction et le pouvoir dispersif de différents verres d'optique. (563-564).

Bosanquet (*R.-H.-M.*) et *Sayce* (*A.-H.*). — L'Astronomie babylonienne (troisième Mémoire). (565-578).

Airy (*G.-B.*). — Addition à un Mémoire intitulé « Recherches sur la valeur théorique de l'accélération du moyen mouvement de la Lune en longitude, produit par le changement de l'excentricité de l'orbite de la Terre ». (578-599).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Note sur la méthode des moindres carrés. (600-614).

Sang (*E.*). — Note sur le calcul de la forme des objectifs astronomiques. (614-619).

Tempel (*W.*). — Note sur la nébuleuse des Pléiades. (622-623).

M. Tempel donne une description et un dessin de la nébuleuse voisine de Mérope.

Gill (*D.*). — Observations de la comète I de 1880 (grande comète australe), faites au Cap de Bonne-Espérance. (623-627).

Wiedemann (*E.*). — Note sur une méthode propre à déterminer la pression sur la surface solaire. (627-628).

M. Wiedemann propose de déduire cette pression du diamètre des anneaux de Newton, produits par l'une des lignes brillantes d'une protubérance solaire.

G. R.

THE OBSERVATORY, A MONTHLY REVIEW OF ASTRONOMY, edited by W.-H.-M. Christie. — Londres, in-8° (1).

Tome III; avril 1879-décembre 1880.

RÉUNION DE LA SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE de Londres le 9 avril 1879. (1-10).

Discussion entre lord Lindsay et M. Common sur les avantages comparés des lunettes et des télescopes et sur la manière de monter et d'argenter les miroirs.

---

(1) Voir *Bulletin*, III_1, 78.

* *Schmidt* (*J.-F.-J.*). — Carte de la Lune. (10-17). [J. Birmingham].

Birt (*R.-W.*). — Note sur un glissement de terrain dans Platon. (17-20).

Il s'agit d'un glissement de terrain visible à l'extrémité est du cratère de Platon et dont l'apparence aurait quelque peu changé depuis qu'il a été décrit pour la première fois en 1866, par M. T.-W. Webb.

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les météores de mai. (21-22).

Chambers (*G.-F.*). — Lettre relative à la diffamation de l'amiral Smyth par M. Sadler (23-24).

L'auteur critique énergiquement M. Sadler et la conduite du Bureau de la Société Astronomique; il pense que les Membres de la Société doivent intervenir.

D'Abbadie (*A.*). — Note sur les observations d'étoiles doubles faites à Poulkova. (24-25).

Tebbutt (*J.*). — Remarques sur la conjonction de Mars et de Saturne qui sera observée le 30 juin 1879. (26).

Plummer (*J.-I.*). — Lettre sur les conditions de visibilité de Mercure projeté sur la couronne solaire. (27-28).

Le professeur Langley a observé le phénomène par le ciel très pur des montagnes; il a été vu à Orwell Park par un léger brouillard.

* *Lœwy* (*M.*) et *Stephan* (*E.*). — Détermination des différences de longitude de Paris, Marseille et Alger. (28).

* *Smyth* (*Piazzi*). — Sur l'illumination des tubes de Geissler dans le sens de leur longueur. (29).

Schulze. — Éphéméride de la comète périodique de Brorsen en juin 1879. (30).

Memoranda astronomiques pour juin 1879. (31-32).

Réunion de la Société Astronomique de Londres le 9 mai 1879. (33-46).

Le Conseil de la Société Astronomique propose une motion de blâme contre M. Sadler pour ses attaques injustes et diffamatoires à la mémoire de l'amiral Smyth; cette motion est adoptée après une vive discussion à laquelle prennent part MM. Chambers, Airy, Ranyard et Pritchard.

La séance continue par les lectures reproduites dans les *Monthly Notices*.

Draper (*J.-C.*). — Sur les lignes noires de l'oxygène, observées dans la partie du spectre solaire moins réfrangible que G. (46-50).

Les conclusions de M. Draper sont les suivantes :

1° La région du spectre solaire comprise entre 4317 et 4319 de longueur d'onde, et considérée comme lignes brillantes de l'oxygène, n'est pas aussi brillante que les autres régions lumineuses immédiatement voisines.

2° Le spectre solaire montre quelques faibles lignes noires dans la région entre 4317 et 4319 de longueur d'onde.

3° L'oxygène est la substance qui peut produire des lignes noires dans cette région; on doit, par conséquent, attribuer leur présence à l'action de cet élément.

Sawyer (*E.-F.*). — Observations de *Mira Ceti* faites à Cambridge (U. S.) pendant son maximum de 1878. (50-52).

L'accroissement de lumière a été très rapide; l'étoile a passé de la 5e à la 3e grandeur en huit jours.

Corder (*H.*). — Phénomènes météorologiques observés de janvier à mai 1879. (52-53).

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en juin. (53-54).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les météores de juin. (55-56).

Young (*C.-A.*). — Spectre de la comète de Brorsen. (56-57).

Le spectre se compose des trois bandes du carbone ayant pour longueurs d'onde 468, 517 et 558.

Airy (*G.-B.*). — Lettre sur la méthode des moindres carrés. (57-59).

L'Astronome Royal prend la défense de la méthode des moindres carrés contre Le Verrier, qui l'avait attaquée devant l'Académie des Sciences de Paris. La Lettre est datée du 5 février 1875.

Heaven (*C.*). — Lettre relative à la diffamation de l'amiral Smyth, par M. Sadler. (59-60).

* *Niesten*. — Recherches sur la couleur des étoiles doubles. (60-61).

* *Observatoire de Washington*. — Observations de 1875. (61-62).

* *Observatoire de Greenwich*. — Observations de 1876. (62-63).

Memoranda astronomiques pour juillet 1879. (63-64).

Réunion de la Société Astronomique de Londres, le 13 juin 1879. (65-79).

Importante discussion entre M. Draper et MM. Ranyard, Christie, Gladstone, Huggins et Capron relativement aux photographies du savant physicien américain et à la découverte de la présence de l'oxygène dans le Soleil. Tous les orateurs ont rendu justice aux soins apportés par M. Draper à ses recherches, mais plusieurs d'entre eux, M. Huggins par exemple, ne se sont pas déclarés convaincus.

Darwin (*G.-H.*). — Notes sur la théorie des marées et les évolutions des satellites des planètes. (79-84).

Johnson (*S.-J.*). — Note sur l'occultation d'Antarès le 28 juillet 1879. (84-86).

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en juillet. (86-88).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les météores de juillet. (88-90).

Common (*A.-A.*). — La première comète périodique de Tempel. (90-91).

Ranyard (*A.-C.*). — Qu'est la chromosphère? (92-93).

L'usage a donné le nom de *chromosphère* à la partie de l'atmosphère incandescente du Soleil que l'on peut voir au spectroscope en l'absence d'une éclipse totale.

Dunkin (*E.*). — Notices nécrologiques des astronomes. (94-95).

Observatoire royal de Greenwich. — Rapport annuel sur la période de mai 1878 à mai 1879. (95-98).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Les taches solaires et les protubérances. (98-100).

Memoranda astronomiques pour août 1879. (101-102).

Sawyer (*E.-F.*). — Les météores du 12 au 26 avril 1879. (103-105).

Le point radiant de ces météores, dont la période paraît être de vingt-sept ans, et qui sont en relation avec la comète I de 1861, est la Lyre.

Konkoly (*N. de*). — Observations spectroscopiques de la comète de Brorsen, faites en 1879 à Ó-Gyalla. (105-107).

Le spectre se compose de trois bandes voisines de celles de la flamme bleue du bec de Bunsen.

Arcimis (*A.-T.*). — Conjonction de Mars et de Saturne, observée à Cadix le 30 juin 1879. (107-108).

* *Pritchard.* — *The University....* Observatoire de l'Université d'Oxford. Rapport du professeur Savilien au Comité des visiteurs; année 1878-1879. (108-112).

Le magnétisme terrestre et les taches solaires. (112-114).

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en août. (114-116).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les météores d'août. (116-117).

Maunder (*E.-W.*). — Les lignes brillantes de l'oxygène dans le spectre solaire. (118-120).

Les observations de M. Draper ne paraissent pas prouver que les espaces lumineux qu'il identifie avec les lignes de l'oxygène soient réellement des lignes brillantes.

Dreyer (*J.-L.-E.*). — Note sur le point radiant de la comète I de 1870. (120).

Le point radiant de la Comète est 27°,9 + 48°,4, probablement identique avec le point radiant 32° + 53° signalé par M. Denning.

* *D'Abbadie.* — Instruments à employer en voyage (*Bulletin de la Société de Géographie*. Paris, 1879). (121).

* *Barker* (*G.-F.*). — *Spectroscopic....* Observations spectroscopiques, faites pendant l'éclipse de Soleil de 1879 (*Amer. Journal,* févr. et avril 1879). (122).

Tacchini (*P.*). — L'Observatoire du mont Etna. (123).

Les constructions à élever à la *Casa Inglese*, à une altitude de 3000^{m}, commenceront en 1879. L'Observatoire sera pourvu d'un équatorial de 0^{m},35 d'ouverture. Le ciel de l'Etna est très favorable aux recherches de Spectroscopie.

Küstner. — Éléments paraboliques de la comète de Swift. (124)

Memoranda astronomiques pour septembre 1879. (125-126).

Denning (*W.-F.*). — Dates des chutes de bolides. (127-132).

La chute des bolides se répartit très inégalement entre les divers mois de l'année, ainsi que le montre le Tableau suivant, dressé par M. Greg :

Nombre de bolides dans les divers mois.

Janvier.......	239	Mai...........	163	Septembre....	273
Février.......	174	Juin..........	172	Octobre.......	292
Mars..........	186	Juillet........	287	Novembre....	551
Avril.........	234	Août.........	775	Décembre.....	289

Dans chaque mois, les principales dates de chute sont :

Janvier.....	2	Juillet......	25-30
Février.....	7	Août.......	7-13
Mars.......		Septembre..	1-7
Avril.......	11-12, 19-20	Octobre....	
Mai........		Novembre..	11-15, 19, 27.
Juin		Décembre..	11-12, 21

Sawyer (*E.-F.*). — Nombre moyen des étoiles filantes observées aux différentes époques de l'année. (133-135).

Ledger (*E.*). — Catalogue des observations ou observations supposées du passage de la planète intra-mercurielle ou d'autres corps devant le Soleil. (135-138).

La liste de M. Ledger comprend vingt-quatre observations de cette espèce, faites de 1761 à 1865; elle est donc plus complète que celles de R. Wolf (1859), Carrington (1860) et Le Verrier (1867).

Draper (*J.-W.*). — Sur une nouvelle forme de spectromètre et sur la distribution de la lumière dans le spectre. (138-142).

La méthode de mesure employée par M. Draper consiste à faire disparaître la lumière de la région considérée du spectre à l'aide d'une lumière d'intensité constante, dont la distance à la dernière face du prisme est variable. Les résultats trouvés sont les suivants :

1° Dans le spectre prismatique, l'intensité de la lumière augmente d'une manière continue du violet extrême au rouge. Ce résultat est dû au mode particulier de dispersion d'un prisme.

2° Dans le spectre d'un réseau, l'intensité est constante dans toute la portion visible du spectre.

Une partie de ces résultats est incontestablement due à l'action de l'œil.

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en septembre. (142-144).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les étoiles filantes de septembre. (144-147).

Kirkwood (*D.*). — Note sur le satellite intérieur de Mars. (147-148).

Marcimis (*A.*), *Capron* (*J.-R.*), *Grover* (*C.*) et *Penrose* (*F.-C.*). — Notes sur l'occultation d'Antarès le 28 juin 1879. (148-150).

Capron (*J.-Rand*). — Changements survenus dans une tache solaire du 28 juin au 5 juillet 1879. (150-151).

Hunt (*G.*). — Note sur le diamètre du disque apparent d'une étoile. (151-153).

M. Hunt croit pouvoir déduire, de la formule qui donne le diamètre du premier anneau obscur de diffraction d'une étoile, que le disque des étoiles de toutes les grandeurs doit être le même. L'éditeur fait observer que c'est une erreur.

* *Peckham* (*S.-F.*). — *Fall of a....* Chute d'un bolide le 10 mai 1879, dans l'État d'Iowa (*American Journal*, 1879, july). (153-154).

* *Winnecke.* — Rapport sur les travaux de l'Observatoire de Strasbourg en 1878 (*Vierteljahrsschrift der Astr. Gesellsch.*, 1878). (154).

Notice nécrologique sur Thomas Maclear. (154-155).

Notice nécrologique sur Lamont. (155).

Memoranda astronomiques pour octobre 1879. (155-156).

Konkoly (*N. de*). — Observations spectroscopiques d'étoiles filantes. (157-158).

Les spectres sont continus avec quelques lignes brillantes.

Kirkwood (*D.*). — Notes sur les bolides observés aux États-Unis du 1er avril 1879 au 31 mars 1880. (158-166).

Common (*A.-A.*). — Description de son télescope de 3 pieds d'ouverture. (167-169).

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en octobre. (169-170).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les météores d'octobre. (170-172).

Pujaron (*C.*). — Observation de l'éclipse de Soleil du 18 juillet 1879, faite à l'Observatoire de Cadix. (174).

Pritchett (*C.-W.*). — Observations de la tache rouge de Jupiter faites en 1879 à l'Observatoire de Glasgow (Missouri). (174-178).

Russel (*H.-C.*). — Notes explicatives sur une sorte d'ombre vue sur la Lune le 21 octobre 1878. (178-180).

* *Versammlung.....* — Réunion de la Société Astronomique à Berlin, du 5 au 8 septembre 1879 [M. L. H]. (180-181).

* *Valdo (Léonard).* — *The Fort-Worth....* Rapport sur l'expédition envoyée à Fort-Worth pour l'observation de l'éclipse solaire du 29 juillet 1878. (182-184).

Observatoire de Poulkova. — M. Struve a commandé à Alvan Clark un objectif de 30 pouces anglais de diamètre; le prix est fixé à 160000fr. (185).

Chandler (S.-C.). — Éléments et éphéméride de la comète *d* de 1879 (comète Palisa). (185).

Marth (A.). — Éphéméride des satellites de Mars et de Saturne pour 1879. (185-187).

MEMORANDA astronomiques pour novembre 1879. (187-188).

Downing (A.-M.-W.). — Note sur la détermination de la parallaxe horizontale du Soleil d'après les déclinaisons de Mars, observées à Leide et à Melbourne pendant l'opposition de 1877. (189-190).

La combinaison de ces observations donne

$$\pi = 8'',960 \pm 0'',051.$$

Les observations analogues faites en 1862 ont donné à M. Winnecke 8",96 et à M. Stone 8",94.

Ledger (E.). — Les éclipses des satellites de Mars. (191-193).

Les éclipses du satellite intérieur durent environ cinquante-trois minutes; celle du satellite extérieur quatre-vingt-quatre minutes.

Konkoly (N. de). — Observations spectroscopiques de la comète *d* de 1879 (comète de Palisa). (193-195).

Farquhar (H.). — L'éclat et la distribution des étoiles (Ire Partie). (195-200).

Gledhill (J.). — Étoiles doubles à observer en novembre. (200-201).

Denning (W.-F.). — Notes sur les météores de novembre. (201-204).

Denning (W.-F.). — Le point radiant de la comète I de 1870. (205).

Gledhill (*J.*). — Aspect de Jupiter en septembre 1879. (205).

La tache rouge est toujours visible.

Dennett (*F.*). — Observations de la tache rouge de Jupiter en août, septembre et octobre 1879. (206-207).

* *Green*. — *Observations*.... Observations de Mars, faites à Madère en 1877 (*Memoirs of the R. Astronomical Society*, vol. XLIV). (208-209).

* *Yarnall*. — *Washington Catalogue*.... Catalogue d'étoiles de Washington. 2e édition (1 vol. in-4°; Washington. 1879). (209-210).

* *Hall* (*A.*). — *Motion of*.... Mouvement des satellites de Saturne (*Astronomische Nachrichten*, n° 2263). (210-212).

* *Astronomical Society*. — *Memoirs of*.... Mémoires de la Société Astronomique de Londres, vol. XLIV (1 vol. in-4°; Londres, 1879). (213-215).

Marth (*A.*). — Éphéméride des satellites de Mars et de Saturne en novembre 1879. (216-217).

Memoranda astronomiques pour décembre 1879. (217-218).

Réunion de la Société Astronomique de Londres le 14 novembre 1879. (219-234).

Tisserand (*F.*). — Note sur le mouvement d'Hypérion. (235-236).

Brett (*J.*). — La grosse tache de Jupiter. (236-238).

C'est une description de la tache rouge de Jupiter et une dissertation sur nature probable.

Corder (*H.*). — Notes sur des taches blanches qui se sont montrées sur les bandes de Jupiter du 24 octobre au 11 novembre 1879. (238-239).

Ces taches ont un mouvement propre, rapide par rapport à la tache rouge.

Farquhar (*H.*). — L'éclat et la distribution des étoiles (IIe Partie). (240-245).

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en décembre. (245-246).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les météores de décembre. (246-249).

Backhouse (*T.-W.*). — La tache rouge de Jupiter. (250-251).

Ledger (*E.*). — Note sur les passages d'une planète intra-mercurielle. (251-252).

Haase (*Zeitschrift für Astronomie*) donne des passages plus nombreux que ceux qu'a indiqués M. Ledger à la page 135 du présent Volume de l'*Observatory*; l'auteur pense que les observations se rapportent à des taches solaires.

* *Gould.* — *Uranometria Argentina....* Uranométrie Argentine (1 vol. in-4°; Buenos-Ayres, 1879). (252-254).

* *Vaughan.* — *On the origine....* Leçon sur l'origine des astéroïdes (*Popular Science Monthly*, 1879). (254-256).

* *Nautical Almanac for* 1883. (256-257).

Le *Nautical* pour 1883 renferme des positions de la Lune, calculées d'après les corrections faites par M. Newcomb aux Tables de Hansen.

Marth (*A.*). — Éphéméride des satellites de Mars et de Saturne pour décembre 1879. (257-258).

Réunion de la Société Astronomique de Londres le 12 décembre 1879. (259-270).

Young (*C.-A.*). — Observations des satellites de Mars, faites à Princeton (U. S.) en octobre et novembre 1879. (270-271).

Young (*C.-A.*). — Note sur la ligne *b* du spectre solaire. (271-272).

b_3 et b_4 sont des lignes doubles.

Ledger (*E.*). — Utilisation de l'action des marées. (272-274).

Kirkwood (*D.*). — Les étoiles filantes du 13-14 novembre. (274-275).

Les Léonides ont été très nombreux en 1879; ils avaient aussi été nombreux en 1846. Il paraît donc que l'anneau météorique de novembre renfermerait d'autres amas, à période de trente-trois ans, que celui que la Terre a rencontré en 1833 et 1866.

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en janvier. (275-276).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les météores de janvier. (276-278).

Plummer (*J.-I.*). — Apparence des comètes de 1879. (278-279).

Le noyau de la comète de Palisa est devenu faible et diffus à l'époque du passage de l'astre au périhélie. Ce cas est analogue à celui de la comète d'Encke en 1871-72.

Gledhill (*J.*). — Jupiter en 1869 et 1879. L'ellipse et la tache rouge. (279-282).

Une tache elliptique, très voisine de la bande équatoriale sud, a été observée à Halifax (Observatoire de M. Crossley) de novembre 1869 à février 1870; est-elle identique à la tache rouge actuelle? La Note de M. Gledhill est accompagnée d'un dessin de Jupiter en 1870.

Holden (*A.-P.*). — La grande tache de Jupiter. (282-283).

La tache actuelle paraît en relation avec celle de 1869.

Johnson (*S.*). — Tache de Jupiter en 1792. (283).

Schröter a, en 1792, observé une tache obscure ronde sur l'hémisphère sud de Jupiter.

Pritchard (*C.*). — Note sur le diamètre photographique de la Lune. (283-285).

* *Burnham*. — *The Lick*.... L'Observatoire Lick, sur le mont Hamilton (1 broch. in-4°; Chicago, 1879). (286).

* *Houzeau et Lancaster*. — Bibliographie générale de l'Astronomie (vol. in-8; Bruxelles, 1879...). (287).

Memoranda astronomiques pour janvier 1880. (287-290).

Réunion de la Société Astronomique de Londres le 9 janvier 1880. (291-303).

Discussion entre MM. Huggins, Ranyard et R. Capron sur les spectres photographiques des étoiles.

Clark (*J.-Ed.*). — Notes sur le bolide détonant observé dans le Yorkshire le 24 février 1880 (Ire Partie). (303-309).

* *Crossley* (*E.*), *Gledhill* (*J.*) *et Wilson* (*M.*). — *A Handbook*.... Catalogue d'étoiles doubles à l'usage des amateurs (1 vol.: Londres, 1879) [E. Dunkin]. (309-312).

* *Capron* (*J.-Rand*). — *Auroræ; their characters*.... Les au-

rores; leurs caractères et leurs spectres (1 vol.; Londres, 1879). [H. Pratt]. (312-314).

Common (*A.*). — Photographies de Jupiter. (314).

La Note très courte de M. Common est accompagnée de la reproduction photographique de vues de Jupiter, obtenues le 3 et le 8 septembre 1879 avec son miroir de 36 pouces. La première donne une impression nette de la tache rouge.

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en février. (314-315).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les météores de février. (316).

Tebbutt (*J.*). — Occultations d'étoiles brillantes observées à Windsor (N. S. W.) de 1875 à 1879. (317).

Pritchett (*C.-W.*). — Mouvement de la tache rouge de Jupiter. (317-318).

La tache paraît à l'auteur avoir un mouvement en longitude et un mouvement en latitude.

Dennett (*F.-C.*). — Notes sur quelques taches observées sur Jupiter en 1878 et 1879. (318-320).

Neison (*E.*). — Sur le demi-diamètre de la Lune. (321-323).

Brett (*J.*). — Remarques sur les discussions trop vives des dernières réunions de la Société Astronomique. (323-325).

* *Perrier et Ibañez.* — Jonction géodésique de l'Espagne et de l'Algérie (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris,* t. LXXXIV). (326-327).

* *Todd* (*D.-P.*). — *Solar parallax....* La parallaxe solaire déterminée par la vitesse de la lumière (*American Journal,* 1879, january). (327-328).

Memoranda astronomiques pour février 1880. (329-330).

Réunion de la Société Astronomique de Londres le 13 février 1880. (331-337).

Clark (*J.-Ed.*). — Note sur le bolide détonant observé dans le Yorkshire le 24 février 1880 (IIe Partie). (337-343).

Herschel (*A.-S.*). — Note sur les bolides des 23-24 septembre 1876 et 1879. (343-347).

Sawyer (*E.-F.*). — Les étoiles filantes de décembre qui ont leur point radiant dans les Gémeaux. (347-347).

Oliver (*S.-P.*) — Un monument à élever à Halley. (348-350).

* *Giberne* (Miss *A.*). — *Sun, Moon....* Le Soleil, la Lune et les étoiles; Astronomie pour les enfants (1 vol.; Londres, 1880) [E. Dunkin]. (351-352).

Gledhill (*J.*). — L'étoile double Σ547 est une étoile variable à longue période. (352-353).

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en mars. (353-354).

Denning (*W.-F.*). — Notes météoriques pour mars. (354-355).

Kirkwood (*D.*). — Les étoiles filantes du 13-14 novembre 1879. (355-356).

Denning (*W.-F.*). — Neuf étoiles peuvent être observées dans le trapèze d'Orion avec un miroir de 12 pouces. (356-358).

* *Pickering.* — *Report for....* Rapport sur les travaux de l'Observatoire d'Harvard College en 1879. (359-360).

MEMORANDA astronomiques pour mars 1880. (361-362).

RÉUNION DE LA SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE de Londres le 12 mars 1880. (363-373).

Pratt (*H.*). — Remarques sur la prétendue formation d'un nouveau cratère dans la région nord d'Hyginus, signalée par M. Klein. (373-377).

Des observations nombreuses faites en 1878 et 1879 ont montré à M. Pratt qu'aucun nouveau cratère n'existait dans cette région et qu'on ne pouvait y trouver qu'une très légère dépression, de forme complexe et très difficile à bien voir.

Gledhill (*J.*). — Appel aux amateurs qui possèdent des lunettes de large ouverture. (377-382).

M. Gledhill propose aux astronomes amateurs d'observer une série d'étoiles doubles difficiles à séparer; la plupart sont prises dans les Catalogues de Struve ou de Burnham.

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en avril. (382-383).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les étoiles filantes d'avril. (383-384).

Janisch (*Hudson-R.*). — Notes sur la grande comète de l'hémisphère austral. (385).

Penrose (*F.-C.*). — Courbure dans la trajectoire d'un bolide. (386-387).

Swift (*L.*). — Note sur la rédaction des dépêches astronomiques. (387).

* *Pickering*. — *Annals of*.... Annales de l'Observatoire d'Harvard College. Tome XI [1 vol. in-4°; Cambridge (U. S.), 1879]. (387-390).

Hind et *Finlay*. — Orbite de la grande comète australe. (390).

Les orbites calculées par M. Hind ou par M. Finlay offrent une grande ressemblance avec l'orbite de la grande comète de 1843.

Davidson (*G.*). — Notes sur l'éclipse solaire du 11 janvier 1880. (391).

Les observateurs ont en vain cherché Vulcain.

* *Adams*. — *Cambridge Observations*.... Observations faites à Cambridge de 1861 à 1865. T. XXI (1 vol. in-4°; Cambridge, 1879). (392).

Memoranda astronomiques pour le mois d'avril 1880. (393-394).

Réunion de la Société Astronomique de Londres le 9 avril 1880. (395-408).

Discussion entre M. Chambers et le Président sur l'opportunité de soumettre le Règlement intérieur de la Société à une revision générale. Le conseil a ajourné la proposition; mais M. Chambers se propose de la reproduire.

Burnham (*S.-W.*). — Notes sur quelques étoiles doubles. (408-409).

Kirkwood (*D.*). — La *Cosmogonie* de Laplace. (409-412).

Après un examen de la *Cosmogonie* de Laplace, M. Kirkwood arrive aux conclusions suivantes :

1° L'hypothèse de Laplace n'explique pas l'immense intervalle qui existe entre les orbites des planètes.

2° Dans cette hypothèse, la période nécessaire à la formation d'une planète au

moyen d'un anneau de matière cosmique est plus longue que l'âge probable du système solaire.

3° La théorie de Laplace n'explique pas la formation des satellites.

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en mai. (412-413).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les étoiles filantes de mai. (413-415).

Terby (*F.*). — Remarques sur les taches de Mars et annonce d'un nouveau Mémoire. (416).

Trouvelot (*L.*). — Notes sur les taches brillantes de Vénus. (417-418).

M. Trouvelot annonce une discussion des observations qu'il a faites sur Vénus depuis 1875.

Cance (*J.-L.-M.*). — Note sur la nébuleuse des Pléiades. (418).

Airy (*G.-B.*). — L'accélération séculaire de la Lune. (419-420).

* *Cornu.* — Limite ultra-violette du spectre solaire (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* de Paris, t. LXXXVII et LXXXIX). (420-421).

* *Draper* (*H.*). — *Photographies of....* Photographies du spectre des étoiles (*American Journal*, 1879, december). (421-422).

Gould (*B.-A.*). — Observations de la grande comète de l'hémisphère austral. (422-423).

Notice nécrologique sur Ragoonatha Chary. (423-424).

Ragoonatha Chary était depuis trente-six ans attaché, en qualité d'assistant, à l'Observatoire de Madras; il laisse un très grand nombre d'observations méridiennes. C'était un observateur habile et un calculateur très exercé.

Holetschek (*J.*) et *Zelbr* (*K.*). — Éléments et éphéméride de la comète I de 1880. (424-425).

Memoranda astronomiques pour mai 1880. (425-426).

Réunion de la Société Astronomique de Londres le 14 mai 1880. (427-439).

Forbes (*G.*). — Les comètes et les planètes ultra-neptuniennes. (439-446).

Si l'on range les comètes pour lesquelles des orbites elliptiques ont été calculées d'après l'ordre de leurs distances aphélies, on forme le Tableau suivant :

Tableau des distances aphélies des comètes elliptiques.

Comètes.	Distances aphélies.	Comètes.	Distances aphélies.	Comètes.	Distances aphélies.
Encke	4,1	1852, IV	32,0	1811, II	181,4
Pons	4,8	1812	33,4	1807	285,2
1844, I	5,0	1815	34,0	1858, VI	303,8
1743, I	5,3	1846, IV	34,5	1769	322,8
1766, II	5,5	1847, V	35,0	1840, II	359,3
1819, III	5,5	Halley	35,4	1827, III	377,4
Brorsen	5,6	1862, III	48,6	1846, I	388,2
Lexell	5,7	1683	65,5	1811, I	420,7
1846, III	5,7	1857, IV	74,9	1825, IV	533,6
D'Arrest	5,7	1845, III	78,9	1822, IV	617,0
Faye	6,0	1840, IV	96,7	1680	620,0
Biela	6,2	1843, I	100,0	1851, III	624,0
1783, I	7,8	1846, VII	108,2	1763	754,3
1846, VI	9,4	1861, I	110,3	1849, III	823,6
1858, I	11,0	1793, II	111,0	1830, I	2971,3
1866, I	16,8	1861, II	111,2	1780, I	3209,9
1863, V	27,6	1855, II	124,2	1844, II	4275,6

Les comètes paraissent ainsi former quatre groupes : pour le premier, la distance aphélie est peu supérieure au rayon de l'orbite de Jupiter; pour le deuxième, les distances sont aussi peu supérieures au rayon de l'orbite de Neptune. M. Forbes pense que les distances aphélies des deux autres groupes doivent aussi être peu supérieures aux rayons de deux planètes ultra-neptuniennes encore inconnues. C'est l'action de ces planètes qui aurait jeté les comètes considérées dans notre système solaire. Ce phénomène n'a d'ailleurs pu se produire qu'à une époque où la comète et la planète inconnue se sont trouvées voisines, et le point du maximum de perturbation a dû devenir l'aphélie de la comète. Les positions des périhélies des comètes des troisième et quatrième groupes sont donc voisines des positions occupées, aux dates des aphélies, par les planètes troublantes; il devient alors possible de déterminer approximativement l'orbite de ces corps.

Pour la première planète ultra-neptunienne, la longitude du nœud ascendant est de 250° et l'inclinaison de 53°. L'astre serait aujourd'hui par 11^h40^m d'ascension droite et 87° de distance polaire.

Les comètes du quatrième groupe conduisent à des résultats moins précis.

Le Mémoire de M. G. Forbes sera inséré dans le prochain Volume des *Mémoires de la Société Royale d'Édimbourg*.

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en juin. (447-448).

Denning (*W.-F.*) — Notes sur les étoiles filantes de juillet. (448-449).

Ledger (*E.*). — La tache rouge de Jupiter. (449-450).

Il y aurait un rapport intime entre la tache rouge actuelle et celle observée par lord Rosse en 1873.

Burnham (*S.-W.*). — Découverte d'un compagnon à 6 du Cocher. (451).

Wolf (*C.*). — Note sur la nébuleuse des Pléiades. (451-452).

Liste de trente-six étoiles nouvelles des Pléiades.

Knott (*G.*). — Note sur une étoile de grandeur 13,5 située au voisinage d'Alcyone. (452-453).

Baxendell (*J.*). — Liste de nouvelles étoiles variables. (453-454).

Bredikhine (*Th.*). — Classification des queues des comètes. (454-455).

* *Airy* (*G.-B.*). — *Theory of*.... Théorie des erreurs d'observations. 3[e] édition (1 vol. in-8°; Londres, 1880). (455-456).

Notice nécrologique sur C.-A.-F. Peters. (456).

Martin (*H.*). — Éléments et éphéméride de la comète *b* de 1880 (comète Schäberle). (457).

Memoranda astronomiques pour juin 1880. (457-458).

Réunion de la Société Astronomique de Londres le 1[er] juillet 1880. (459-470).

Discussion entre MM. Pritchard, Neison, de la Rue et Christie sur la valeur des photographies lunaires faites à l'Observatoire de l'Université d'Oxford, au point de vue des mesures propres à déterminer la grandeur de la libration.

Young (*C.-A.*). — Mesures du diamètre équatorial et du diamètre polaire de Mars, faites à l'Observatoire de Princeton (U.-S.). (471-474).

L'aplatissement de Mars $= \frac{1}{234}$. Les mesures ont été faites avec un micromètre à fils.

* *Boss*. — *Declination of*.... Déclinaison des étoiles fixes (1 vol. in-4°; Washington, 1880) [A.-M. Downing]. (474-479).

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en juillet. (479-480).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les étoiles filantes de juillet.

Terby (*F.*) — Remarques sur les taches de Vénus et de Mars. (482-484).

M. Terby signale les principaux dessins où figurent les jonctions entre la mer de Tycho et la mer de Delambre.

Cance (*J.-L.-M.*). — La nébuleuse des Pléiades. (484).

* *Airy* (*G.-B.*). — *Report....* Rapport sur les travaux effectués à Greenwich en 1879-1880. (485-488).

Todd (*D.-P.*). — Observation du passage de Mercure, faite à Washington le 6 mai 1878. (488).

MEMORANDA astronomiques pour le mois de juillet. (489-490).

Smyth (*Piazzi*). — La spectroscopie pratique en 1880. (491-500).

Langley (*S.-P.*). — La Physique solaire (Ire Partie). (501-506).

M. Langley fait l'historique des travaux effectués depuis 1862 par les spectroscopistes et par MM. Abney et Draper au moyen des photographies.

Dennet (*F.-C.*). — Le cratère lunaire Peirce A. (506-508).

Ce cratère est le plus nord et le plus petit de trois cratères situés dans la partie ouest de la mer des Crises; M. Dennet décrit ses variations d'apparence avec les âges de la Lune.

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en août. (508-511).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les étoiles filantes d'août. (511-513).

Abney (*W.-J.-W.*). — Remarques sur une photographie du spectre de Jupiter, par M. Draper. (513-514).

L'intensité particulière de la photographie du spectre du centre du disque tient à ce que la lumière solaire réfléchie par cette région a subi une absorption moindre que celle réfléchie par les bords, et non pas à une lumière propre émise par Jupiter.

Tebbutt (*J.*). — Observations d'étoiles doubles de l'hémisphère austral. (514-515).

* *Pickering.* — *Annals of....* Annales de l'Observatoire d'Harvard College. Tome XI [1 vol. in-4°; Cambridge (U. S.)]. (515-518).

Peters (*C.-H.-F.*). — Observations sur les variations d'éclat de Frigga (77). (518-519).

Les variations d'éclat ne peuvent être expliquées par une rotation de la planète.

* *Dreyer* (*J.-L.-E.*). — *Progress of*.... Les progrès de l'Astronomie en 1879 (*Proceedings Roy. Dublin Soc.*, 1880). (519).

Lohse. — Éphémérides pour l'observation de la tache rouge de Jupiter. (520).

MEMORANDA astronomiques pour le mois d'août 1880. (521-522).

Smyth (*Piazzi*). — La Spectroscopie pratique en 1880 (IIe Partie). 523-529).

Langley (*S.-P.*). — La Physique solaire. IIe Partie. (529-534).

M. Langley analyse les travaux de M. Abney et de M. Cornu sur le spectre solaire, dont l'étendue a été triplée par ces physiciens.

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en septembre. (535-536).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les étoiles filantes de septembre. (536-539).

Kirk (*E.-B.*). — L'étoile double δ du Cygne. (539).

Pratt (*H.*). — Carte du groupe de ε de la Lyre. (540).

Tebbutt (*J.*). — Éléments de la comète I de 1880. (540-541).

Hickley (*J.-G.*). — Observation de la protubérance solaire du 31 juillet 1880. (541-542).

Le spectre de la protubérance était caractérisé par une ligne brillante comprise entre B et C.

Kirk (*F.-B.*). — Spectre de l'aurore boréale. (542-543).

Le spectre de l'aurore du 12 août 1880 était formé de :
1° Une bande très brillante dans le jaune, plus réfrangible que D;
2° Une bande faible et large, voisine de *b* et diffuse du côté du violet;
3° Une bande très distincte vers F;
4° Une ligne très fine vers G.

Airy (*G.-B.*). — Observations des Perséides, faites en août à Greenwich. (543-544).

La proportion des Perséides sur les étoiles filantes sporadiques a augmenté en 1879.

* *Oppolzer* (*Th. von*). — Le milieu planétaire résistant et les grandes comètes de 1843 et de 1880 (*Astronomische Nachrichten*, n°s 2314 et 2319). (543-547).

* *Robinson*. — *Armagh*.... Catalogue d'étoiles d'Armagh (1 vol. in-4°; Dublin, 1880). [J.-L.-E. Dreyer]. (548).

* *Houzeau*. — Uranométrie générale (*Annales de l'Observatoire de Bruxelles*, 2e série, t. I). [J.-L.-E. Dreyer]. (548).

* *Newcomb* (*S.*). — *The recurrence*.... Le cycle des éclipses solaires (*Papers for the use of the American Nautical Almanac*, t. I). (548-550).

* *Airy* (*G.-B.*). — *Greenwich spectroscopic*.... Résultat des observations spectroscopiques faites à Greenwich en 1878 et 1879 (1 vol. in-4°; Londres, 1880). (550-551).

Bigourdan. — Éléments et éphéméride de la comète II de 1880. (552).

MEMORANDA astronomiques pour septembre 1880. (553-554).

Smyth (*Piazzi*). — La Spectroscopie pratique en 1880. (IIIe Partie.) (555-564).

Airy (*G.-B.*). — Sur le voisinage actuel de Jupiter et de la Terre et sur le retour d'un semblable phénomène. (564-565).

Une opposition presque semblable se produira dans douze ans.

Russell (*H.-C.*). — L'éclipse totale de Lune du 22-23 juin 1880. (565-568).

Burnham (*S.-W.*). — L'étoile multiple OΣ 496. (568-569).

Les composantes n'ont pas changé de position depuis les observations de Struve en 1851.

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en octobre. (569-570).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les étoiles filantes d'octobre. (570-573).

Baldwinn (*H.-L.*). — La visibilité de Vénus pendant le jour. (573-574).

Vénus a été vue, à l'œil nu, le 25 juillet à $10^h 20^m$ du matin, alors que sa distance au Soleil n'était que de 3°38'.

Common (*A.-A.*). — Observations de la comète de Faye. (575-576).

La comète a été trouvée le 2 août avec le télescope de 3 pieds.

Richards (*W.-J.-B.*) et *Cooper* (*W.-E.*). — L'aurore boréale du 12 août 1880. (576-577).

Konkoly (*N. de*). — Les étoiles filantes d'août. (577).

Un très beau bolide, plus brillant que Jupiter, observé le 9 août, a donné un spectre continu sur lequel se détachaient les lignes brillantes du sodium et du lithium.

Knott (*G.*). — La couleur de α de la Lyre. (578-579).

Gledhill (*J.*). — Notes sur l'observation de la couleur des étoiles et sur la couleur de δ du Cygne (579-580).

Hunt (*G.*). — Le compagnon de Sirius signalé par Smyth. (580-581).

Il s'agit d'une petite étoile de 13e grandeur, éloignée de Sirius de 1061", et dont l'angle de position est 48° environ.

Plummer (*J.-I.*). — Les météorites et le Soleil. (581-582).

Burnham (*S.-W.*). — Découverte d'un compagnon à 5 de Persée. (582).

La distance est de 5",60 et l'angle de position de 273°,6; le compagnon est faible.

Burnham (*S.-W.*). — L'étoile double 85 de Pégase. (582-583).

Le mouvement orbital est rapide et le mouvement propre considérable.

* *Sande Bakhuyzen* (*E.-F. van de*). — *Bepaling van...* Détermination de l'obliquité de l'écliptique (1 vol. in-8°; Leyde, 1879). [J.-L.-E. Dreyer]. (583).

* *Ball*. — *Speculations on....* Hypothèses sur l'origine des météorites (*Proc. of the R. Irish Academy*, 2e série, t. III). [J.-L.-E. Dreyer]. (583-584).

MEMORANDA astronomiques pour octobre 1880. (584-586).

Huggins (*M.-L.*). — Notice sur la vie et les travaux de W. Lassell. (587-590).

Kirkwood (*D.*). — La grande comète australe de 1880. (590-592).

Dissertation sur l'identité possible de la comète de 1843 avec la grande comète de 1880.

Konkoly (*N. de*). — Observations spectroscopiques de la comète d'Hartwig (comète *d* de 1880). (592-594).

Le spectre est composé d'un spectre continu traversé par quatre bandes brillantes ayant pour longueurs d'onde 5610, 5492, 5163 et 4856. Ces lignes sont voisines de celles de C^2H^2.

Hall (*A.*) — Les progrès de l'Astronomie (Ire Partie). (594-601).

Analyse des progrès apportés à la Mécanique céleste par Lagrange, Laplace, Gauss et Bessel. Observations de W. et O. Struve sur les étoiles filantes.

Gledhill (*J.*). — L'étoile *h* n° 78, voisine du trapèze d'Orion, est-elle variable? (601-603).

Cette étoile, de grandeur 12,5, est difficile à voir; mais les observations de Bond et de Struve ne prouvent point sa variabilité.

Gledhill (*J.*). — Trois objets d'épreuve pour les télescopes de grande ouverture. (604-605).

Ces objets sont η des Poissons, étoile double dont les composantes sont à $1'',02$ de distance, 85 Pégase et β du Scorpion, étoiles triples dont les composantes voisines sont à $0'',7$.

Hunt (*G.*). — Mesures de certaines paires d'étoiles doubles au point de vue de la mesure des équations personnelles. (605-607).

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en novembre. (607-608).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les étoiles filantes de novembre. (608-609).

Backhouse (*T.-W.*). — Échelle étalon du spectre. (609-610).

L'échelle devrait être, non pas les longueurs d'onde, mais le nombre de vibrations en une seconde.

Baxendell (*J.*). — Remarques sur la mesure de la couleur des étoiles. (610-611).

Lynn (*W.-T.*). — La division de l'anneau de Saturne. (611-612).

Vogel (*H.-C.*). — L'aberration chromatique des objectifs. (612-613).

* *Konkoly* (*N. de*). — Annales de l'Observatoire de O'Gyalla. (613).

Burnham (*S.-W.*). — *Report of*.... Rapport de la Commission de l'Observatoire de James Lick sur les observations faites sur le mont Hamilton (1 br. in-4°; Chicago, 1880). (613).

Tebbutt (*J.*). — Visite à l'ancien Observatoire de Paramatta. (614-616).

* *Hartwig* (*E.*). — *Untersuchungen*.... Recherches sur les diamètres de Vénus et de Mars, d'après les observations faites à l'héliomètre (1 br. in-4°; Leipzig, 1879). [J.-L.-E. Dreyer]. (616-618).

* *Burnham* (*S.-W.*). — *Double stars*.... Observations d'étoiles doubles, faites avec l'équatorial de 18^p,5 de Chicago en 1877-1878 (*Memoirs of the R. Astronomical Society*, t. XLIV). [J.-L.-E. Dreyer]. (618-620).

La comète de Hartwig (IV de 1880). (620-621).

Le spectre de la comète est formé de trois bandes de l'hydrogène carboné. Suivant M. Winnecke, la comète est identique à celle de 1506.

Observatoire de Halsted, à Princeton College (New-Jersey). (622).

Le professeur Young a acquis pour lui un objectif de 23 pouces par Clark.

Bigourdan (*G.*). — Éphéméride de la comète de Schäberle (*b* de 1880). (623)

Meyer (*M.-W.*). — Éléments et éphéméride de la comète d'Hartwig (*d* de 1880). (623).

Memoranda astronomiques pour le mois de novembre 1880. (623-626).

Réunion de la Société Astronomique de Londres le 12 novembre 1880. (627-637).

Pratt (*H.*) et *Gledhill* (*J.*). — Le groupe de Σ de la Lyre. (637-640).

La Note contient une Carte très détaillée de ce groupe d'étoiles.

Hall (*A.*). — Les progrès de l'Astronomie. (IIe Partie). (640-645).

Young (*C.-A.*). — Le spectre de la comète de Hartwig. (645-647).

Le spectre de la comète est formé des trois bandes ordinaires, très voisines de celles de l'hydrogène carboné.

Pratt (*H.*). — L'étoile variable *h* n° 78 du Trapèze d'Orion. (647-648).

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en décembre. (648-649).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les étoiles doubles de décembre. (649-651).

Dennet (*F.-C.*). — L'hémisphère nord de Jupiter. (652-654).

Un grand nombre de taches sont visibles sur la planète.

Denning (*W.-F.*). — Les taches de Jupiter en novembre 1880. (654-655).

Dans la bande équatoriale nord, il y a une tache blanche à mouvement propre rapide qui marche vers la tache rouge.

Peters (*C.-H.-F.*). — La planète intra-mercurielle. (656).

* *Auwers*. — *Fundamental Catalogue*.... Catalogue fondamental d'étoiles pour l'observation des zones de l'hémisphère nord (1 vol. in-4°; Leipzig, 1880). [J.-L.-E. Dreyer]. (657-658).

* *Houzeau* (*J.-C.*). — Répertoire des constantes de l'Astronomie (1 vol. in-4°; Bruxelles, 1879). [J.-L.-E. Dreyer]. (659).

L'Observatoire de Cork. — Description abrégée du nouvel Observatoire du Collège Royal de Cork. (659).

* *Ball*. — *Dunsink observations*.... Observations faites à l'Observatoire de Dunsink en 1871-1872 (IIIe Partie) (1 vol. in-4°; Dublin, 1879). [J.-L.-E. Drey[illegible]

* *Oppolzer* (*Th. v.*). — *Lehrbuch*.... Traité du calcul des orbites (IIe Partie) (1 vol. in-8°; Leipzig, 1879). [J.-L.-E. Dreyer]. (660).

* *Pritchard.* — *Annual Report*.... Rapport annuel sur les travaux de l'Observatoire d'Oxford (1 br. in-8°; Oxford, 1880).

Zelbr (*K.*) et *Hepperger* (*J.*). — Éléments de la comète *e* de 1880 (comète de Swift). (662-663).

La comète est identique avec la comète III de 1869; la période est donc de onze ans environ.

Winnecke. — La comète *d* de 1880 (comète de Hartwig). (663)

La comète est identique avec celles de 1382, 1444, 1506 et 1569; sa période serait ainsi de soixante-deux ans un tiers.

MEMORANDA astronomiques pour le mois de décembre 1880. (665-666). G. R.

ARCHIV FOR MATHEMATIK OG NATURVIDENSKAB. Udgivet af Sophus LIE, Worm MÜLLER og G.-O. SARS. Kristiania (1).

Tome III; 1879.

Sexe (*S.-A.*). — Comment on évite les quantités imaginaires. (145-166).

L'auteur remplace l'opération impossible de l'extraction de la racine carrée d'une quantité négative $-k^2$ par l'opération, toujours possible, de la décomposition de la quantité $\pm k^2$ en deux facteurs, $+k$ et $\pm k$, de même valeur numérique. Il parvient par ce moyen à établir, sans le secours des imaginaires, plusieurs propositions que l'on démontre d'habitude à l'aide de ces symboles.

Lie (*S.*). — Théorie des groupes de transformations. V. (232-2 all.).

Dans un travail précédent, l'auteur a déterminé, par des calculs assez compliqués, tous les groupes de transformations de contact d'un plan. Dans le présent Mémoire, cette détermination est effectuée d'une manière beaucoup plus simple. On trouve qu'il n'existe que trois groupes de transformations de contact qui ne peuvent, par aucun choix possible de coordonnées, être ramenés à des groupes de transformations de points.

---

(1) Voir *Bulletin*, III$_2$, 185.

Lie (S.). — Détermination de toutes les surfaces intégrales algébriques de l'équation différentielle $s = 0$ inscrites dans une développable algébrique. (334-344; all.).

Les surfaces intégrales de l'équation $s = 0$ ont des équations de la forme

$$z = F(x) + \Phi(y). \tag{1}$$

Pour qu'une telle surface contienne une courbe donnée (x, y, z), et qu'elle ait le long de cette courbe des plans tangents donnés, dont les coefficients de direction soient X, Y, Z, elle deva être représentée par l'équation

$$z = -\int \frac{X}{Z}\,dx - \int \frac{Y}{Z}\,dy, \tag{2}$$

x et y étant considérées, après l'intégration, comme variables indépendantes. Si x, y, z, X, Y, Z sont des fonctions *algébriques* données d'une variable auxiliaire, la surface (2) sera généralement *transcendante;* ce qui veut dire que la surface (1) qui touche une développable donnée suivant une courbe algébrique choisie arbitrairement est en général transcendante. Dans le présent travail, l'auteur fait voir qu'il est toujours possible d'inscrire dans une développable algébrique quelconque ∞^∞ surfaces algébriques (1), et en même temps que toutes ces surfaces sont déterminées par une construction remarquable. Des théorèmes semblables ont lieu toutes les fois qu'il s'agit, en général, d'une équation quelconque aux dérivées partielles du second ordre, dont les surfaces intégrales sont représentées par des équations de la forme

$$x = At + A_1\tau, \quad y = Bt + B_1\tau, \quad z = Ct + C_1\tau.$$

Cette classe comprend entre autres l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima.

Lie (S.). — Sur la théorie des surfaces de courbure constante. (I, 345-354; II, 355-366; all.).

Pour déterminer les sections principales et les lignes de courbure d'une surface quelconque de courbure constante, l'auteur présente d'abord les considérations suivantes :

Soit proposé d'intégrer les trois équations aux différentielles ordinaires du premier ordre

$$X_1\,dy - Y_1\,dx = 0, \quad X_2\,dy - Y_2\,dx = 0, \quad X_3\,dy - Y_3\,dx = 0, \tag{1}$$

dont les intégrales, inconnues d'ailleurs, peuvent se mettre sous la forme

$$u, \; v, \; f(u) + \varphi(v).$$

Alors nos équations admettront des multiplicateurs eulériens M_1, M_2, M_3, satisfaisant à une relation de la forme

$$M_1(X_1\,dy - Y_1\,dx) + M_2(X_2\,dy - Y_2\,dx) + M_3(X_3\,dy - Y_3\,dx) = 0.$$

De là résulte que l'on a

$$\frac{M_1X_1 + M_2X_2}{X_3} = \frac{M_1Y_1 + M_2Y_2}{Y_3} = -M_3. \tag{2}$$

ou

(3) $$M_2 = \frac{Y_1X_3 - Y_3X_1}{Y_3X_2 - Y_2X_3} M_1 = \varphi(x, y) M_1,$$

φ désignant une fonction connue de x et de y. Portons cette valeur dans l'équation

$$X_2 \frac{d \log M_2}{dx} + Y_2 \frac{d \log M_2}{dy} = -\frac{dX_2}{dx} - \frac{dY_2}{dy},$$

ce qui conduit à la relation

$$X_2 \frac{d \log M_1}{dx} + Y_2 \frac{d \log M_1}{dy} = -\frac{dX_2}{dx} - \frac{dY_2}{dy} - X_2 \frac{d \log \varphi}{dx} - Y_2 \frac{d \log \varphi}{dy},$$

à laquelle nous joindrons l'équation connue

$$X_1 \frac{d \log M_1}{dx} + Y_1 \frac{d \log M_1}{dy} = -\frac{dX_1}{dx} - \frac{dY_1}{dy}.$$

Nous obtenons ainsi d'abord M_1 par une quadrature, puis M_2 et M_3 au moyen de (2) et de (3). L'intégration de l'équation (1) n'exige donc que deux quadratures consécutives.

Mais on sait maintenant que les équations finies des sections principales et des lignes de courbure d'une surface quelconque de courbure constante peuvent se ramener à la forme

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}, \quad u \pm v = \text{const.}$$

Par suite, la détermination de ces courbes n'exige que deux quadratures successives, dont l'une peut même être évitée.

Sur les surfaces de courbure *moyenne* constante, les lignes de courbure sont des courbes isothermes. En conséquence, sur ces surfaces, les lignes de courbure, ainsi que les lignes géodésiques dont la longueur est égale à zéro, sont déterminées par une quadrature. Cette intégration se rattache d'ailleurs de la manière la plus étroite avec celle que nous avons effectuée tout à l'heure. En effet, par un déplacement convenable, une surface de courbure moyenne constante se change en une surface de courbure constante, et en même temps les lignes de courbure deviennent des lignes de courbure; les lignes géodésiques de longueur nulle deviennent des sections principales.

Cette théorie, développée dans la première Note, nous paraît être nouvelle, tandis que les théorèmes de la seconde Note ont été déjà donnés par Dini (¹).

Lie (*S.*). — Nouvelles recherches sur les surfaces minima. (477-506; all.).

Si l'on applique à une surface minimum un mouvement ou une transformation de similitude quelconque, la surface transformée est encore une surface minimum. L'équation aux dérivées partielles des surfaces minima est, par conséquent, transformée en elle-même par les tranformations appelées tout à l'heure *transformations* ∞^7 *fois linéaires*. Les seules équations aux dérivées partielles du second ordre qui admettent toutes ces transformations sont évidemment celles

(¹) *Annali di Matem.*, 2ᵉ série, t. IV, p. 174-208.

dont les surfaces intégrales sont caractérisées par cette propriété que leurs rayons de courbure sont dans un rapport constant.

Si l'on demande toutes les surfaces minima qui, par un nombre ∞^2 ou plus grand encore de transformations linéaires, sont transformées de nouveau en des surfaces minima, on trouve, comme l'auteur l'a déjà indiqué en 1870, la seule surface minimum découverte pour la première fois par Scherk,

$$e^{2y}\cos(\rho x - rz) + \cos(\rho x + rz) = 0,$$

avec ses dégénérescences, parmi lesquelles se trouve l'hélicoïde à génératrice rectiligne.

On est conduit à cette surface minimum en cherchant toutes les surfaces minima engendrées par le mouvement de translation d'une courbe dont la longueur d'arc est différente de zéro. La surface de Scherk peut être engendrée d'une infinité de manières par le mouvement de translation d'une courbe, et, en particulier, de *six* manières différentes par le mouvement de translation d'une courbe plane.

Lie (*S.*). — Sur les surfaces dont les rayons de courbure ont entre eux une relation. (507-512; all.).

Voir *Bulletin*, IV_2, p. 300-304.

Tome V; 1880.

Lie (*S.*). — Sur la théorie des surfaces de courbure constante. III. (282-306; all.).

Combinons les quatre équations

$$(1)\qquad \begin{cases} (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = a^2, \\ p\,(x-x_1) + q\,(y-y_1) - (z-z_1) = 0, \\ p_1(x-x_1) + q_1(y-y_1) - (z-z_1) = 0, \\ pp_1 + qq_1 + 1 = 0 \end{cases}$$

avec les équations

$$(2)\qquad z = f(x,y),\quad p = \frac{\partial f}{\partial x},\quad q = \frac{\partial f}{\partial y};$$

concevons qu'entre ces équations on ait éliminé x, y, z, p, q et que l'on se propose de déterminer, au moyen des deux équations résultantes, les quantités p_1 et q_1 en fonction de x_1, y_1, z_1, de telle manière que l'équation

$$(3)\qquad dz_1 - p_1\,dx_1 - q_1\,dy_1 = 0$$

soit intégrable. On trouve que, pour cela, il faut et il suffit que $z = f$ satisfasse à l'équation aux dérivées partielles

$$(4)\qquad s^2 - rt = \frac{(1+p^2+q^2)^2}{a^2}$$

et que, par suite, la surface $z = f$ ait une courbure constante. Les surfaces, en

nombre simplement infini,

$$z_1 = f_1(x_1, y_1, a),$$

obtenues par l'intégration de (3), ont alors aussi une courbure constante. D'après Bianchi, l'intégration de (3) peut toujours s'effectuer par une quadrature, lorsque les lignes géodésiques de la surface de courbure constante proposée $z = f$ ont été déterminées, et, suivant une remarque de l'auteur, on peut ensuite obtenir également par une quadrature les lignes géodésiques des surfaces $z_1 = f_1(x_1, y_1, a)$. En conséquence, la transformation (1) peut être appliquée de nouveau aux surfaces $z_1 = f_1(x_1, y_1, a)$, ce qui donne ∞^2 surfaces de courbure constante $z_2 = f_2(x_2, y_2, a, b)$, et ainsi de suite.

Ici se pose l'intéressante question de savoir combien de surfaces de courbure constante *différentes* pourront, de cette manière, être déduites d'une *seule* surface de cette espèce $z = f$ en répétant *à l'infini* la transformation (1).

Par des calculs assez longs, on démontre que l'ensemble des surfaces dérivées ne satisfait jamais à aucune équation aux dérivées partielles du premier, du deuxième, du troisième ou du quatrième ordre, autre que l'équation (4).

Geelmuyden (*H.*). — Le mouvement conique du pendule. (307-327).

L'auteur développe la théorie du pendule conique, et indique pour les formules trouvées un mode convenable de calcul numérique.

Lie (*S.*). — Sur la théorie des surfaces de courbure constante. IV. (328-358; all.).

Ce Mémoire donne la solution du difficile problème posé dans le travail précédent. L'auteur démontre que l'ensemble des surfaces déterminées par des quadratures successives ne satisfait à aucune autre équation aux dérivées partielles que l'équation obtenue

$$s^2 - rt = \frac{(1 + p^2 + q^2)^4}{a^2}. \tag{1}$$

L'ensemble des surfaces dérivées F forme donc ce qu'Ampère et ses successeurs, par exemple Imschenetsky, ont appelé une *intégrale générale* de l'équation (1). Il faut toutefois remarquer ici que cette définition n'est pas exacte. En effet, prenons, par exemple, toutes les surfaces de courbure constante inscrites à une même développable. L'ensemble de ces surfaces ne satisfera alors à aucune équation aux dérivées partielles autre que (1), et par suite, d'après la définition en question, elles formeront une *intégrale générale*. Mais il est évident qu'il existe des surfaces de courbure constante qui ne sont ni des surfaces inscrites dans la développable considérée ni des intégrales singulières de (1).

Ce Mémoire montre donc comment, étant donnée une surface de courbure constante dont les lignes géodésiques sont connues, on peut en déduire, *par des quadratures successives*, un nombre ∞^∞ d'autres surfaces de même nature. Sur toutes ces surfaces on saura déterminer non seulement les lignes de courbure et les sections principales, mais encore les lignes géodésiques.

En combinant ces résultats avec les théories connues, on reconnaît, entre autres conséquences, que, par des quadratures successives, on peut déterminer ∞^∞ surfaces de courbure moyenne constante, et, pareillement, ∞^∞ surfaces dont les rayons de courbure ont une différence constante.

Lie (*S.*). — Sur la théorie des surfaces de courbure constante. V. (358-381).

Pour chercher si l'équation

$$(1) \qquad s^2 - rt = \frac{(1+p^2+q^2)^2}{a^2}$$

peut s'intégrer par la belle méthode d'intégration de M. Darboux, il faut se demander s'il existe des équations aux dérivées partielles qui aient ∞^∞ surfaces intégrales communes avec l'équation (1). Depuis longtemps on connaît deux équations de cette nature : d'abord l'équation

$$1 + p^2 + q^2 = 0,$$

et en second lieu l'équation du second ordre considérée par Monge et par J.-A. Serret, et dont les surfaces intégrales sont des surfaces réglées, contenant le cercle de la sphère. L'auteur démontre, par des calculs assez compliqués, qu'il n'existe pas d'autre équation aux dérivées partielles ayant ∞^∞ surfaces intégrales communes avec (1).

Ainsi l'équation (1) ne peut s'intégrer par la méthode de M. Darboux, d'où il résulte dès lors que l'intégrale de l'équation (1) n'appartient pas à la première classe d'Ampère.

S. L.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (1).

Tome XCII; 1881.

N° 1; 3 janvier.

Faye. — Recherches de M. Fournier sur la baisse du baromètre dans les cyclones. (22).

Baillaud. — Sur les observations des satellites de Jupiter faites à l'Observatoire de Toulouse. (25).

Rouget (*C.*). — Sur un procédé d'observation astronomique à l'usage des voyageurs, les dispensant de la mesure des angles pour la détermination de la latitude et du temps sidéral. (27).

Darboux (*G.*). — Détermination des lignes de courbure de toutes les surfaces de quatrième classe, corrélatives des cyclides qui ont le cercle de l'infini pour ligne double. (29).

(1) Voir *Bulletin*, IV_2, 13.

Il résulte facilement de propositions établies par l'auteur dans son Ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* qu'on peut effectuer cette détermination. Il montre ici comment on y arrive par le calcul : l'équation tangentielle d'une telle surface étant mise sous la forme

$$(p+\delta)^2 = au^2 + bv^2 + cw^2 + 2a'u + 2b'v + 2c'w,$$

où l'on suppose

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1,$$

et où

$$ux + vy + wz + p = 0$$

est l'équation générale d'un plan, l'équation finie des lignes de courbure peut s'écrire

$$\sum \frac{au^2 + 2a'u}{a' + \lambda} = \sum \frac{(a'v - b'u)^2}{(a+\lambda)(b+\lambda)},$$

λ étant une constante arbitraire; rattachant ensuite ces résultats à ceux qu'a obtenus M. Laguerre (*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. II, p. 145), M. Darboux énonce le théorème suivant :

« La surface de quatrième classe corrélative de la surface à conique double et ayant le cercle de l'infini comme ligne double peut être considérée de quatre manières différentes comme une anticaustique par réfraction relative à des rayons parallèles tombant sur une surface du second degré. Les surfaces du second degré correspondant aux quatre modes de génération sont homofocales; elles passent par les quatre coniques doubles de la surface de quatrième classe, et, dans chaque classe de génération, les rayons lumineux sont normaux au plan de la conique double correspondante.

La surface de quatrième classe qui vient d'être définie peut être considérée de quatre manières différentes comme l'enveloppe des sphères ayant leur centre sur une surface du second degré et coupant un plan fixe sous un angle constant.

Baille. — Mesure de la force électromotrice des piles. (32).

Gouy. — Sur la vitesse de la lumière, réponse à M. Cornu. (34)

Crova. — Étude sur les spectromètres. (36).

Dunand. — Sur un procédé pour faire reproduire la parole au condensateurs électriques et en particulier au condensate chantant. (37).

N° 2; 10 janvier.

Cornu (A.). — Sur les conditions relatives à l'expression th rique de la vitesse de la lumière. (52).

Appell. — Sur une classe d'équations différentielles linéaires

les coefficients sont des fonctions algébriques de la variable indépendante. (61).

Complément à la Note du 13 décembre 1880; les conclusions de cette Note s'étendent, sous certaines conditions, aux cas où les coefficients de l'équation différentielle deviennent infinis pour les points critiques de la fonction algébrique.

Rouget (*C.*). — Sur un procédé d'observation astronomique à l'usage des voyageurs, les dispensant de la mesure des angles pour la détermination de la longitude. (69).

Laguerre. — Sur la transformation par directions réciproques. (71).

Une surface S étant donnée partage l'espace en deux régions, et l'on peut fixer arbitrairement celle de ces régions que l'on regarde comme extérieure à la surface; M. Laguerre désigne sous le nom de *semi-surface* une surface ainsi définie. Pour que deux surfaces soient tangentes en un point, il ne suffit pas qu'elles aient même plan tangent, il faut encore que les régions extérieures se correspondent. A un plan, à une sphère, correspondent deux demi-plans opposés, deux demi-sphères opposées; mais si l'on a affaire à une surface algébrique quelconque pour laquelle on a fixé arbitrairement la région extérieure, la semi-surface ainsi obtenue ne forme généralement un être géométrique que si on lui adjoint la semi-surface opposée; elle doit être considérée comme une semi-surface composée de deux feuillets superposés et opposés entre eux, qui formeraient les deux nappes de l'enveloppe d'une sphère de rayon infiniment petit dont le centre décrit la surface. Une quadrique, par exemple, doit être regardée comme une semi-quadrique de quatrième classe. Ceci posé, la transformation par directions réciproques est certainement définie par les conditions suivantes :

Deux semi-plans réciproques se coupent sur un plan fixe dit *fondamental;* deux couples de semi-plans réciproques forment un système de quatre semi-plans tangents à un semi-cône de révolution. La transformation est déterminée quand on se donne le plan fondamental et deux semi-plans réciproques.

Les lignes de courbure d'une semi-surface se conservent dans cette transformation.

La transformée d'une semi-surface S est une anticaustique. Si, en effet, de chaque point M de S on abaisse une perpendiculaire MP sur le plan fondamental et qu'on prenne sur MP un point M' tel que $\frac{M'P}{MP}$ soit constant, le point M' décrit une surface S'; si, l'indice de réfraction étant convenablement choisi, les rayons perpendiculaires au plan fondamental se réfractent sur S', la réciproque de S est une des catacaustiques de S', et l'on obtiendra toutes ces catacaustiques en déplaçant le plan fondamental parallèlement à lui-même.

Ainsi, on saura déterminer les lignes de courbure des anticaustiques de S' si l'on sait les déterminer pour la semi-surface S; en particulier, on peut obtenir les lignes de courbure des anticaustiques des surfaces de second ordre.

M. Laguerre rapproche ces résultats de ceux que M. Darboux avait précédemment communiqués.

Croullebois. — Sur la grandeur et les variations des images de Purkinje. (73).

Arsonval (D'). — Thermo-régulateur pour les hautes températures. (76).

N° 3; 17 janvier.

Bigourdan. — Observations de la comète f 1880 (Pechüle), faites à l'Observatoire de Paris. (117).

Darboux (G.). — Sur le déplacement d'une figure invariable. (118).

Considérons un cylindre de révolution (c); il est clair qu'on peut le faire rouler intérieurement sur un cylindre de révolution (c') de rayon double, tout en le faisant glisser d'une quantité quelconque parallèlement aux génératrices rectilignes de (c'); si l'on assujettit un point de (c) à décrire une droite, qui rencontrera nécessairement l'axe du cylindre (c'), le mouvement du cylindre (c) sera complètement défini et tout point invariablement lié à ce cylindre décrira une conique.

Ce mouvement (en excluant le cas d'un déplacement parallèle à un plan fixe) est le seul dans lequel tous les points de la figure mobile puissent décrire des courbes planes.

Il n'existe pas dans l'espace de mouvement dans lequel tous les points de la figure mobile décrivent des surfaces du second degré, mais il existe un mouvement dans lequel ils décrivent tous des surfaces de Steiner. Dix points particuliers de la figure mobile décrivent des plans. Dans des cas particuliers, il peut arriver que les points d'une droite, ou même les points de deux droites décrivent des ellipsoïdes : dans ce dernier cas, il existe un tétraèdre ayant au plus deux arêtes réelles, tel que tout point, en dehors des faces, décrit une surface de Steiner; tout point sur une face en dehors des arêtes décrit une surface réglée du troisième ordre. Tout point sur une arête décrit une surface du second ordre ou un plan.

André (D.). — Intégration sous forme finie d'une nouvelle espèce d'équations différentielles linéaires à coefficients variables. (121).

Soient Y une fonction de la seule variable x, soient Y_0, $Y_0^{(1)}$, $Y_0^{(2)}$, ... les valeurs pour $x = 0$ de cette fonction et de ses dérivées successives, n un entier quelconque non négatif, p un nombre non entier; soit enfin $f(n)$ un polynôme quelconque, entier par rapport à n et à des exponentielles de la forme α^n.

Posant

$$F(n) = \frac{1}{p(p+1)\ldots(p+n-1)}\,\frac{1}{f(n)},$$

les équations intégrées par l'auteur sont celles qui, par une suite de différentiations, conduisent, pour $x = 0$, à une équation de la forme

$$A_0 F(n) Y_0^{(n)} + A_1 F(n-1) Y_0^{(n-1)} + \ldots + A_k F(n-k) Y_0^{(n-k)} = 0.$$

subsistant pour toutes les valeurs de n supérieures à un entier déterminé et les coefficients A et l'indice k étant indépendants de n.

L'intégrale se compose uniquement de fonctions algébriques rationnelles et d'expressions irrationnelles de la forme $(1-ax)^p$.

Mathieu (*É.*). — Sur la théorie des plaques vibrantes. (123).

L'auteur confirme les résultats de M. Kirchhoff, qu'il avait autrefois critiqués.

Melon (*A.*). — Sur les combinaisons complètes : nombre des combinaisons complètes de m lettres n à n. (125).

Thollon. — Minimum du pouvoir de résolution d'un prisme. (128).

Mercadier. — Sur la production de signaux intermittents à l'aide de la lumière électrique. (131).

N° 4; 24 janvier.

Tisserand (*F.*). — Sur le développement périodique d'une fonction quelconque des rayons vecteurs de deux planètes. (134).

L'auteur a donné précédemment (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCI, p. 897) le développement, suivant les cosinus des multiples de l'anomalie moyenne, d'une fonction quelconque du rayon vecteur r d'une planète : il donne maintenant l'expression explicite du développement de $f(r,r')$, r et r' étant les rayons vecteurs de deux planètes, quand on y remplace r et r' par leurs développements périodiques, tels qu'ils résultent du mouvement elliptique.

Resal. — Sur la théorie de la chaleur. (157).

Bigourdan. — Éléments et éphémérides de la comète f 1880 (Pechüle). (172).

Draper (*H.*). — Présentation d'une épreuve photographique de la nébuleuse d'Orion. (173).

Pepin. — Sur les diviseurs de certaines fonctions homogènes du troisième ordre à deux variables. (173).

Le P. Pepin donne des types de formes cubiques binaires pour lesquelles les diviseurs se distinguent des non-diviseurs par leurs formes linéaires : ces formes cubiques sont des fonctions linéaires des deux formes plus simples

$$X = x(x^2 - 9y^2), \quad Y = y(x^2 - y^2).$$

Casorati. — Sur la distinction des intégrales des équations différentielles linéaires en sous-groupes.

Cette distinction a été faite pour la première fois par M. Hamburger (*Journal de Borchardt*, t. LXXVI), en appliquant un procédé dû à M. Jordan. M. Stickelberger vient de reprendre la même question d'une autre manière, en se fondant sur une formule due à M. Weierstrass (*Monatsberichte der Berliner Akademie*, 1868), relative aux diviseurs du déterminant qui constitue le premier membre de l'équation fondamentale de M. Fuchs et des mineurs de ce déterminant; dans cette Communication et dans une Communication postérieure, M. Casorati montre comment, sans changer le procédé de M. Jordan, on peut arriver aux résultats simples et précis obtenus par M. Stickelberger.

Farkas. — Sur le développement des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce en séries entières récurrentes (181).

Lippmann. — Sur le choix de l'unité de force dans les mesures électriques absolues. (183).

N° 5; 31 janvier.

Gyldén (H.). — Sur un mode de représentation des fonctions. (213).

L'auteur montre comment on peut passer du développement

$$F(x) = \Sigma(a_r \cos rx + b_r \sin rx)$$

au développement

$$F(x) = \sum A_p \cos p \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} + B_p \sin p \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}.$$

Hennessy. — Sur la figure des planètes. (225).

Jordan (C.). — Sur la série de Fourier. (228).

La démonstration de Dirichlet repose sur les deux propositions

$$\lim_{p=0} \int_a^b F(x) \frac{\sin px}{x} = 0 \qquad (0 < a < b < \pi)$$
$$= F(+0) \qquad (a = 0, 0 < b < \pi).$$

La première proposition subsiste pourvu que $F(x)$ soit intégrable de a à b.

La démonstration de la seconde suppose simplement qu'il existe, aux environs du point $x = 0$, un intervalle fini (de 0 à ε) dans lequel $F(x)$ soit constamment non croissante ou non décroissante.

Le théorème subsistera donc toutes les fois que $F(x)$ pourra être représenté de 0 à ε par $f(x) - \varphi(x)$, $f(x)$ et $\varphi(x)$ étant deux fonctions finies et non décroissantes.

Soient $x_1, \ldots, x_n$ une série de valeurs de x comprise entre 0 et ε; $y_1, \ldots, y_n$ les valeurs correspondantes de $f(x)$; les points $x_1, y_1; \ldots; x_n, y_n$ forment un polygone.

Considérons les différences

$$y_2 - y_1,\ y_3 - y_2,\ \ldots,\ y_n - y_{n-1},$$

et appelons *oscillation positive* du polygone la somme des termes positifs de cette série, *oscillation négative* la somme des termes négatifs, *oscillation totale* la somme des valeurs absolues des oscillations positive et négative. Deux cas peuvent se présenter :

1° Le polygone pourra être choisi de façon que ces oscillations dépassent toute limite;

2° De quelque façon que le polygone soit choisi, ses oscillations ne pourront surpasser certaines limites fixes P_ε et N_ε; dans ce cas, la fonction est à oscillation finie, et l'on verra aisément que l'on a

$$F(x) = F(o) + P_x - N_x;$$

or $F(o) + P_x$ et N_x étant des fonctions finies et non décroissantes de o à ε, la démonstration de Dirichlet s'appliquera à la fonction $F(x)$.

Laguerre. — Sur une extension de la règle des signes de Descartes. (230).

Soit $F(x)$ un polynôme entier ou une série indéfinie ordonnée suivant les puissances croissantes de x, $F(x)$ étant d'ailleurs assujetti à la condition que ses coefficients soient tous positifs : soient α, β, γ, ... des nombres positifs rangés par ordre décroissant de grandeur; le nombre des racines positives de l'équation

$$AF(\alpha x) + BF(\beta x) + CF(\gamma x) + \ldots = o$$

est au plus égal au nombre des variations de la suite

$$A,\ B,\ C,\ \ldots$$

ou de la suite

$$A,\ A + B,\ A + B + C,\ \ldots.$$

Ribaucour. — Sur un système cyclique particulier. (234).

L'auteur montre comment des propositions anciennement énoncées par lui donnent immédiatement l'intégrale des lignes de courbure d'une surface anticaustique par réfraction d'une quadrique, les rayons incidents étant parallèles entre eux et conduisant au mode de transformation récemment indiqué par M. Laguerre.

Dillner (G.). — Sur la quadrature dont dépend la solution d'une classe étendue d'équations différentielles linéaires à coefficients rationnels. (235).

Casorati. — Sur la distinction des intégrales des équations différentielles linéaires en sous-groupes. (238).

Paige (Le). — Sur l'invariant du dix-huitième ordre des formes binaires du cinquième degré. (241).

N° 6; 7 février.

Janssen (*J.*). — Sur les photographies des nébuleuses. (261).

Bouquet de la Grye. — Étude des actions du Soleil et de la Lune dans quelques phénomènes terrestres. (281).

Baillaud. — Observation des Perséides à l'Observatoire de Toulouse en 1880. (284).

Darboux (*G.*). — Sur les modes de transformation qui conservent les lignes de courbure. (286).

L'auteur montre comment un mode de transformation qui conserve les lignes de courbure indiqué par M. Ribaucour et par lui-même (*Sur une seule classe remarquable*, etc., p. 254-255) se ramène, conformément à un théorème général de M. S. Lie, à une suite de dilatations et d'inversions. On entend par dilatation le passage d'une surface à une surface parallèle.

Dillner (*G.*). — Sur les équations différentielles linéaires simultanées, à coefficients rationnels, dont la solution dépend de la quadrature d'un même produit algébrique irrationnel. (289).

Dillner (*G.*). — Sur une propriété que possède le produit des k intégrales de k équations différentielles linéaires, à coefficients rationnels, dont la solution dépend de la quadrature, respectivement, de k fonctions rationnelles de la variable indépendante et d'une même irrationnalité algébrique. (290).

Matthiessen (*L.*). — Le problème des restes dans l'Ouvrage chinois *Swan-king*, de Sun-tsze, et dans l'Ouvrage *Ta-yen-lei-schu*, de Yih-hing. (291).

Gripon. — Sur un phénomène particulier de résonance. (294).

Croullebois. — Sur la double réfraction elliptique et les trois systèmes de franges. (297).

N° 7; 14 février.

Brioschi. — Théorèmes relatifs à l'équation de Lamé. (325).

L'auteur étudie les relations qui existent entre les éléments de deux solutions, de formes très différentes, données par M. Hermite, et indique un procédé simple pour la détermination de ces éléments.

Plantamour. — Sur les mouvements périodiques du sol. (329).

Colladon. — Sur le tremblement de terre qui a été observé en Suisse le 27 janvier 1881. (330).

Poincaré. — Sur les fonctions fuchsiennes. (333).

M. Poincaré établit l'existence d'une classe très étendue de fonctions analytiques analogues aux fonctions elliptiques et permettant d'intégrer diverses équations différentielles linéaires à coefficients algébriques : il leur donne le nom de fonctions *fuchsiennes* en l'honneur de M. Fuchs.

L'auteur appelle *cercle fondamental* le cercle de rayon égal à l'unité ayant l'origine pour centre, *groupe hyperbolique* le groupe des opérations qui consistent à changer z en $\frac{az+b}{cz+d}$ et qui n'altèrent pas le cercle fondamental, *groupe discontinu* tout groupe qui ne contient pas d'opération changeant z en une quantité infiniment voisine, *groupe fuchsien* tout groupe discontinu contenu dans le groupe hyperbolique.

Une fonction *fuchsienne* est une fonction uniforme de z, qui n'est pas altérée par les opérations d'un groupe fuchsien.

M. Poincaré a formé tous les groupes fuchsiens. Il appelle fonction *thétafuchsienne* toute fonction $\Theta(z)$ uniforme en z et telle que, pour une infinité de valeurs de a, b, c, d remplissant la condition

$$ad - bc = 1,$$

on ait

$$\Theta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \Theta(z)\,(cz+d)^{2m}.$$

Il existe une infinité de fonctions thétafuchsiennes.

Dans le cas où tous les points du cercle fondamental sont des points singuliers essentiels de $\Theta(z)$, il existe en réalité deux fonctions qui correspondent l'une à l'intérieur, l'autre à l'extérieur du cercle, et telles que l'on ne puisse passer de l'une à l'autre par continuité.

Quet. — Sur les lois qui régissent les périodes et les coefficients d'intensité, dans l'un des principaux groupes des forces électromotrices élémentaires dues à l'induction solaire, et sur la possibilité de faire servir l'aiguille aimantée à mesurer la vitesse avec laquelle le Soleil tourne autour de son axe. (336).

N° 8; 21 février.

Mouchez. — Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Greenwich (transmises par l'astronome royal, M. Airy) et à l'Observatoire de Paris pendant le quatrième trimestre de l'année 1880. (373).

Faye. — Sur la parallaxe du Soleil. (375).

Poincaré. — Sur les fonctions fuchsiennes. (393).

Le quotient de deux fonctions thétafuchsiennes correspondant à un même groupe fuchsien et à une même valeur du nombre entier m est une fonction fuchsienne $F(z)$; pour une infinité de valeurs de a, b, c, d, on a

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = F(z).$$

Entre deux fonctions fuchsiennes ayant même groupe et n'ayant d'autre point singulier essentiel que ceux qui sont une conséquence de leur définition, il y a une relation algébrique.

Toute fonction fuchsienne $F(z)$ permet d'intégrer une équation linéaire à coefficients algébriques de la manière suivante. Si l'on pose

$$x = F(z), \quad y_1 = \sqrt{\frac{dF}{dz}}, \quad y_2 = z\sqrt{\frac{dF}{dz}},$$

y_1, y_2 satisfont à l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction algébrique de x. M. Poincaré traite un exemple; il introduit ensuite la notion des fonctions zétafuchsiennes.

Picard (E.). — Sur une classe d'intégrales abéliennes et sur certaines équations différentielles. (398).

Étant donnée une relation algébrique de genre p,

$$f(x,y) = 0,$$

M. Picard considère une intégrale abélienne de première espèce correspondante

$$\int \frac{F(x,y)}{f'_y(x,y)}\,dy,$$

dont les périodes se réduisent à deux; il montre alors que l'équation aux différentielles totales

$$\frac{F(x_1,y_1)\,dx_1}{f'_{y_1}(x_1,y_1)} + \frac{F(x_2,y_2)\,dx_2}{f'_{y_2}(x_2,y_2)} + \ldots + \frac{F(x_p,y_p)}{f'_{y_p}(x_p,y_p)}\,dx_p = 0$$

a son intégrale générale algébrique.

Traitant ensuite plus particulièrement le cas où la relation est du premier genre, c'est-à-dire où l'on a

$$y^2 = x(1-x)(1-k^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x) = R(x),$$

il cherche comment doivent être choisis k, λ, μ pour que l'on puisse trouver un polynôme $f(x)$ du premier degré, de manière que l'équation

$$\frac{f(x_1)\,dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{f(x_2)\,dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = 0$$

ait ses intégrales algébriques, et résout complètement la question, tant dans cette Communication que dans une Communication postérieure (p. 306); là il met en évidence que, à un degré donné d'une relation algébrique devant fournir une intégrale de l'équation (1), correspondra nécessairement une relation algébrique entre k, λ, μ, relation qui constitue une espèce nouvelle d'équations modulaires.

Ardank-Abakanowicz. — Sur un intégrateur, instrument servant à l'intégration graphique (402).

Vitz. — Du pouvoir refroidissant des gaz et des vapeurs. (405).

Terquem. — Sur les surfaces de révolution limitant les liquides dénués de pesanteur. (407).

Mercadier. — Sur la radiophonie. (409).

N° 9; 28 février.

Darboux (G.). — Sur une nouvelle définition de la surface des ondes. (446).

Cette surface est un cas particulier de la surface suivante.

On considère dans l'espace trois cercles quelconques (A), (B), (C) et un point quelconque O. On cherche le lieu (Σ) des points M jouissant de cette propriété: les sphères passant par les trois cercles fixes (A), (B), (C) et par un point quelconque M du lieu vont se couper en un second point P tel que l'angle MPO soit droit.

Ce lieu est une surface que l'on peut construire par points en employant seulement la règle et le compas.

Appelons *centre radical* de deux cercles le centre radical de toutes les sphères passant par les deux cercles, il existera un cercle (K) rencontrant les trois cercles (A), (B), (C) chacun en deux points, et dont le plan contient les trois centres radicaux de ces cercles pris deux à deux.

La surface (Σ) contient le cercle (K); elle contient aussi trois cercles situés sur les sphères passant par le cercle K et les cercles (A), (B), (C).

La surface (Σ), en général du cinquième ordre, se réduit au quatrième : 1° si les plans des cercles (A), (B), (C) se coupent suivant une droite; 2° si le point o est le point d'intersection des trois plans (A), (B), (C); dans ce cas, elle contient seize coniques.

M. Darboux communique en outre la proposition suivante : Si trois points d'une droite invariable décrivent trois plans rectangulaires, elle demeure constamment normale à une surface fixe dont les lignes de courbure sont algébriques. Cette surface est une variété des surfaces de quatrième classe, considérées par l'auteur dans une Communication précédente.

Franklin (J.). — Sur le développement du produit infini $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots$ (448).

Mercadier. — Sur la radiophonie. (450).

Hurion. — Application des franges de Talbot à la détermination des indices de réfraction des liquides. (452).

N° 10; 7 mars.

Puiseux (V.). — Sur les observations de contact faites pendant le passage de Vénus du 8 décembre 1874. (481).

Janssen. — Note sur la photographie de la lumière cendrée de la Lune. (496).

Tacchini. — Observations des taches, des facules et des protubérances solaires, faites à l'Observatoire du Collège Romain pendant le dernier trimestre 1880. (502).

Trépied. — Observations de la Lune et observations des satellites de Jupiter faites à l'Observatoire d'Alger pendant les mois d'octobre, novembre et décembre 1880. (504).

Mouchez. — Remarques à propos des observations communiquées par M. Trépied sur la transformation de l'Observatoire d'Alger en un observatoire astronomique. (506).

Picard (E.). — Sur l'intégration algébrique d'une équation analogue à l'équation d'Euler. (506).

Schering. — La formule d'interpolation de M. Hermite, exprimée algébriquement. (510).

Il s'agit de ce problème :

Trouver une formule $F(x)$ uniforme, qui soit développable en séries de puissances de $x - a_\sigma$ pour $\sigma = 1, 2, 3, \ldots, t$ avec des exposants entiers croissants, et qui contienne dans chacune de ces séries les premiers termes donnés, savoir les termes

$$\sum_{\mu=-m_\sigma}^{\mu=-n_\sigma} A_{\sigma,\mu}(x - a_\sigma)^\mu \quad \text{pour} \quad \sigma = 1, 2, 3, \ldots, t,$$

où les $A_{\sigma,\mu}$ soient des valeurs données arbitrairement, où les $a_1, a_2, \ldots, a_t$ soient des valeurs données différentes entre elles, et où les m_σ, n_σ soient des nombres entiers positifs, négatifs ou nuls, soumis seulement à la condition que le nombre $1 + n_\sigma + m_\sigma$ dans chacune des expressions précédentes ne soit pas moindre que l'unité.

Boussinesq. — Sur une raison générale propre à justifier synthétiquement l'emploi des divers développements de fonctions arbitraires usités en Physique mathématique. (513).

Abdank-Abakanowicz. — Sur un intégrateur. (515).

Croullebois. — Sur la double réfraction circulaire et la production normale des trois systèmes de franges des rayons circulaires. (519).

Fievez. — Sur l'élargissement des raies de l'hydrogène. (521).

Trève. — Sur quelques phénomènes d'optique et de vision. (522).

N° 11; 14 mars.

SÉANCE PUBLIQUE ANNUELLE.

Rapport sur le grand prix des Sciences mathématiques (année 1880). Commissaires : MM. Bertrand, Bonnet, Puiseux, Bouquet, Hermite rapporteur. (551).

L'Académie avait proposé pour sujet d'un grand prix des Sciences mathématiques à décerner en 1880 la question suivante :

Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante.

Six Mémoires ont été envoyés au Concours. Quatre d'entre eux, inscrits sous les nos 1, 2, 3, 5, témoignent chez leurs auteurs d'une science étendue et d'un esprit ingénieux. Nous allons en rendre compte succinctement.

Dans les travaux dont la théorie générale des équations différentielles linéaires a été récemment l'objet, on a eu principalement en vue d'obtenir l'intégrale dans les cas où elle peut s'exprimer par des fonctions uniformes de la variable. Les belles découvertes de M. Fuchs, qui ont joué le principal rôle dans ces recherches, servent également de base pour l'étude plus profonde et plus difficile entreprise par l'auteur du Mémoire n° 1, portant pour épigraphe : *C'est ici un livre de bonne foi, lecteur.* Il part de ce fait que la transformée d'une équation différentielle linéaire obtenue en substituant à la variable indépendante une fonction quelconque d'une nouvelle variable est une équation linéaire de même ordre, et qu'il en est de même si l'on multiplie l'inconnue par une seconde fonction arbitraire de cette nouvelle variable. Cela étant, l'auteur se propose de déterminer ces deux fonctions, de manière que l'équation transformée soit à coefficients constants, ou bien soit intégrable au moyen de fonctions uniformes, simplement rationnelles ou doublement périodiques. Ces questions sont, comme on voit, aussi importantes que difficiles ; la solution complète et générale qui est exposée dans le Mémoire montre un talent mathématique de l'ordre le plus élevé. Rien n'est plus intéressant que de voir s'introduire dans cette recherche de Calcul intégral les notions algébriques d'invariants qui ont pris naissance dans la théorie des

formes, et ces nouvelles combinaisons faire apparaître les éléments cachés dont dépend, sous ses diverses formes analytiques, l'intégration d'une équation donnée. C'est à M. Laguerre qu'est due l'idée ingénieuse et profonde des invariants et covariants des équations différentielles linéaires; il en a tiré pour les équations du troisième et du quatrième ordre plusieurs beaux théorèmes, et M. Brioschi s'est aussi occupé du même sujet; mais l'auteur du Mémoire que nous analysons en a encore mieux fait ressortir toute l'importance. Il y joint une considération qui joue également dans ses recherches un rôle essentiel: c'est celle du genre d'une équation algébrique entre deux variables, introduite en Analyse par Riemann, et qui est si souvent employée dans les travaux de notre époque. Des applications exposées avec tous les détails nécessaires offrent un grand nombre de résultats entièrement nouveaux et du plus haut intérêt. Nous nous bornons à citer comme particulièrement remarquables des équations du troisième et du quatrième ordre contenant un paramètre arbitraire, puis d'autres d'ordre impair se rattachant à la division de l'argument dans les fonctions elliptiques, dont la solution, qui n'est pas une fonction uniforme, est obtenue par ces transcendantes. Nous jugeons que ce Mémoire a ajouté à la théorie des équations différentielles linéaires des méthodes générales et des résultats d'une haute importance et qu'il est digne du grand prix des Sciences mathématiques.

....

Dans le Mémoire n° 5, qui porte l'épigraphe suivante : *Non inultus premor,* l'auteur traite successivement deux questions entièrement différentes, dont il fait l'étude approfondie avec un talent dont la Commission a été extrêmement frappée. La seconde question, qui reçoit les développements les plus étendus, concerne de belles et importantes recherches de M. Fuchs, dont nous indiquerons en quelques mots l'objet. M. Fuchs s'est proposé de déterminer dans quelles conditions on définit une fonction uniforme en égalant à une indéterminée le quotient des intégrales d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Les résultats si remarquables du savant géomètre présentaient dans certains cas des lacunes que l'auteur a reconnues et signalées en complétant ainsi une théorie analytique extrêmement intéressante. Cette théorie lui a suggéré l'origine de transcendantes comprenant en particulier les fonctions elliptiques et qui permettent d'obtenir, dans des cas très généraux, la solution des équations linéaires du second ordre. C'est là une voie féconde que l'auteur n'a point parcourue en entier, mais qui témoigne d'un esprit inventif et profond. La Commission ne peut que l'engager à poursuivre ses recherches, en signalant à l'Académie le beau talent dont il a fait preuve.

....

M. Halphen est l'auteur du Mémoire n° 1, couronné par l'Académie ; M. Poincaré est l'auteur du Mémoire n° 5, auquel l'Académie accorde une mention très honorable, ainsi qu'au Mémoire n° 3.

Le prix Poncelet est décerné à M. Léauté, et le prix Lalande à M. Stone.

Le Concours, sur cette question : *Étude de l'élasticité d'un ou de plusieurs corps cristallisés au double point de vue expérimental et théorique,* est prorogé jusqu'à l'année 1882.

N° 12; 21 mars.

Tisserand. — Sur la détermination des masses de Mercure, de Vénus, de la Terre et de la parallaxe solaire. (653).

Tisserand et *Bigourdan*. — Observations de la comète Faye, faites à l'Observatoire de Paris. (660).

Darboux. — Sur la surface à seize points singuliers et les fonctions Θ à deux variables. (685).

M. Cayley a signalé les rapports que présente la théorie de la surface de M. Kummer avec celle des fonctions à quatre périodes; M. Borchardt et M. Weber ont complété les résultats de M. Cayley. Antérieurement, M. Klein avait montré que les coordonnées d'un point quelconque de la surface peuvent s'exprimer en fonction rationnelle et homogène de six radicaux tels que $\sqrt{(a_k - \rho)(a_k - \rho_1)}$, ou de six fonctions Θ doubles à caractéristique impaire. M. Darboux indique comment on peut trouver effectivement ces expressions des coordonnées et relie à ce mode de représentation celui qui avait été indiqué par M. Cayley : il donne ensuite divers résultats géométriques.

Il existe trente systèmes de quadriques admettant pour enveloppe la surface de Kummer. Les surfaces de chaque système passent par huit points singuliers et sont tangentes à huit plans singuliers. A chacun d'eux correspondent quatre équations irrationnelles de la surface. A chaque système on peut associer un autre système composé de surfaces ne passant pas par les points singuliers communs aux surfaces du premier système.

Deux surfaces appartenant à des systèmes associés se coupent suivant quatre droites. Les surfaces de deux systèmes associés tangentes en un même point M de la surface lui sont inscrites suivant des courbes dont les tangentes en M sont des tangentes conjuguées.

Appliquant enfin cette proposition à la surface des ondes, M. Darboux indique une construction du plan tangent au moyen de la règle seule.

Le Paige (*C.*). — Sur le déterminant fonctionnel d'un nombre quelconque de formes binaires. (688).

Le déterminant fonctionnel de $2k+1$ formes dont le degré est supérieur à $2k$ est une fonction linéaire de ces formes, fonction dont les coefficients sont des sommes de produits de covariants linéo-linéaires de ces mêmes formes prises deux à deux.

Le déterminant fonctionnel de $2k$ formes binaires, dont le degré est supérieur à $2k-1$, est une fonction quadratique de ces formes, fonction dont les coefficients sont des sommes de produits de covariants linéo-linéaires des formes prises deux à deux et de covariants de second ordre des formes prises isolément.

Picard (*E.*). — Sur la décomposition en facteurs primaires des fonctions uniformes ayant une ligne de points singuliers essentiels. (690).

Soit $G(z)$ une fonction uniforme et continue dans tout le plan, sauf sur un cercle de rayon R, où elle peut admettre une infinité de rayons essentiels.

Soient $A_1, A_2, A_3, \ldots$ une suite de quantités telles que, en posant

$$A_n = \rho_n e^{i\alpha_n},$$

on ait

$$|\rho_n - R| \geq |\rho_{n+1} - R|,$$

$$\lim_{n=\infty} \rho_n = R.$$

On peut former une fonction $G(z)$, de la nature indiquée, ayant les quantités $A_1, A_2, A_3, \ldots$ pour zéros.

Posant

$$B_n = R e^{i\alpha_n},$$

on pourra prendre dans le cas le plus général

$$G(z) = \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{z - A_n}{z - B_n} e^{F_n(z)},$$

où

$$F_n(z) = \frac{A_n - B_n}{z - B_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{A_n - B_n}{z - B_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{A_n - B_n}{z - B_n}\right)^{n-1}.$$

A chaque racine A_n on fait correspondre un point B_n du cercle, le mode de correspondance pourrait être autre que celui qui a été choisi.

Picard et *Appell.* — Sur certaines équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles. (692).

Soient les équations

$$r = a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z,$$
$$t = b_1 s + b_2 p + b_3 q + b_4 z,$$

de la forme considérée par M. Appell (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. XC, p. 128, 293). Les coefficients a_i et b_i sont supposés des fonctions uniformes des deux variables x et y à quatre faces de périodes conjuguées α_i et β_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Supposant qu'on ait constaté que l'intégrale générale z de ces équations soit une fonction uniforme de x et de y n'admettant pas de point singulier essentiel à distance finie, les auteurs montrent qu'on peut obtenir une fonction intégrale $\Phi(x, y)$ telle que l'on ait

$$\Phi(x + \alpha_i, y + \beta_i) = \mu_i \Phi(x, y) \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Supposant ensuite que les quantités α_i, β_i soient les périodes normales d'intégrales abéliennes normales de première espèce relatives à une courbe algébrique du genre 2, ils montrent que l'intégrale peut s'exprimer au moyen des fonctions Θ.

Si l'on a $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$, l'expression de l'intégrale $\Phi(x, y)$ s'obtiendra au moyen de fonctions Θ d'une seule variable.

Lecornu (*L.*). — Sur les polygones générateurs d'une relation entre plusieurs variables imaginaires. (693).

Soit $f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$ une telle relation : il s'agit du polygone dont les sommets ont pour affixes des n variables; l'auteur étudie spécialement les déplacements d'un tel polygone sans déformation et les déplacements avec déformation qui le laissent semblable à lui-même.

André (*D.*). — Solution d'un problème général sur les séries. (697).

Étant donnée une série convergente

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots,$$

on multiplie tous les termes par les termes de même rang d'une série récurrente proprement dite

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots;$$

on suppose que la série obtenue

$$u_0 v_0 + u_1 v_1 x + u_2 v_2 x^2 + \ldots$$

soit convergente, et l'on demande d'exprimer la somme de cette dernière série en fonction de la somme de la série primitive.

Poincaré (*H.*). — Sur les équations différentielles linéaires à intégrales algébriques. (698).

M. Jordan a donné une méthode générale pour déterminer les groupes de substitutions linéaires qui ne se composent que d'un nombre fini de substitutions, mais, sans insister sur la formation des équations différentielles linéaires (à intégrales algébriques) qui leur correspondent; c'est ce point que traite M. Poincaré dans le cas du troisième ordre.

A chacun des groupes de M. Jordan correspondent une infinité d'équations linéaires du troisième ordre. Dans chacune, les coefficients sont rationnels par rapport à la variable indépendante x et à un paramètre arbitraire y. Si l'on considère les trois intégrales z'_1, z'_2, z'_3 comme fonction de x et de y, ce seront des fonctions algébriques de ces variables, et elles satisferont non seulement à l'équation proposée, mais à une infinité d'équations aux dérivées partielles à coefficients rationnels.

Langley. — Sur la distribution de l'énergie dans le spectre solaire normal. (701).

Gouy. — Sur un appareil synthétique reproduisant le phénomène de la double réfraction circulaire. (703).

Mercadier. — Sur la radiophonie produite à l'aide du sélénium. (705).

Crova. — Expériences faites dans les usines du Creusot pour la mesure optique des hautes températures. (707).

Le Roux. — Sur la force électromotrice de l'arc voltaïque. (709).

Laurent. — Sur les miroirs magiques en verre argenté. (712).

Neyreneuf. — Sur l'écoulement des gaz. (713).

N° 13; 28 mars.

Poincaré (*H.*). — Sur la représentation des nombres par les formes. (777).

L'auteur montre comment le problème de la représentation d'un nombre entier quelconque, soit pour une forme binaire d'ordre quelconque, soit pour une forme décomposable en facteurs linéaires, peut être résolu : 1° en résolvant une congruence; 2° en rècherchant par la méthode de M. Hermite si deux formes décomposables en facteurs linéaires sont équivalentes.

Halphen. — Sur une classe d'équations différentielles linéaires. (779).

L'auteur montre comment on peut intégrer les équations dont les premiers membres sont de la forme suivante :

$$\mathrm{B}\mathrm{Q}^{h}\mathrm{P}^{n-h}\frac{d^{n}(\mathrm{P}^{n}\mathrm{Q}^{n-h}y)}{dx^{n}}+\mathrm{C}\mathrm{Q}^{k}\mathrm{P}^{p-k}\frac{d^{p}(\mathrm{P}^{p}\mathrm{Q}^{n-k}y)}{dx^{p}}+\ldots,$$

où $\mathrm{P} = ax + b$, $\mathrm{Q} = a'x + b'$, et où $\mathrm{B}, e, \ldots; h, k \ldots$, sont constants.

Charve (*L.*). — De la réduction des formes quadratiques quaternaires. (782).

L'auteur, pour une telle forme supposée positive, propose des conditions de réduction telles que la définition de la forme réduite conduise à *une* et à *une seule* des formes équivalentes à la proposée.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von C.-W. BORCHARDT.

Tome LXXXVIII; 1880.

Sylvester (*J.-J.*). — Sur l'entrelacement d'une fonction par rapport à une autre. (1-3).

Sylvester (*J.-J.*). — Preuve instantanée, d'après la méthode de Fourier, de la réalité des racines de l'équation séculaire. (4-5).

Sylvester (*J.-J.*). — Sur un déterminant symétrique qui comprend comme cas particulier la première partie de l'équation séculaire. (6-9).

Hermite (*Ch.*). — Sur une extension donnée à la théorie des frac-

tions continues par M. Tchebychef. Extrait d'une Lettre à M. Borchardt. (10-15).

M. Tchebychef a découvert la proposition qu'il existe une infinité de systèmes de nombres entiers x et y tels que la fonction linéaire $x - ay - b$, où a et b sont deux constantes quelconques, soit plus petite en valeur absolue que $\frac{1}{2y}$. De plus, appliquant cette même conception à l'Algèbre, il considère l'expression $X - UY - V$, où U et V sont deux fonctions quelconques d'une variable x, et il détermine des polynômes entiers par rapport à cette variable X et Y, tels qu'en ordonnant suivant les puissances décroissantes le degré soit le nombre négatif le plus grand possible en valeur absolue. C'est sur cet objet que roulent les remarques de M. Hermite. Comme conséquence de sa manière d'approfondir la question, la limitation précédemment obtenue

$$x - ay - b < \frac{1}{2y}$$

se trouve remplacée par celle-ci,

$$x - ay - b < \sqrt{\frac{2}{27}}\,\frac{1}{y},$$

où le coefficient numérique $\sqrt{\frac{2}{27}}$ est sensiblement plus petit que $\frac{1}{2}$.

Netto (*E.*). — Démonstration de l'existence de racines d'équations algébriques. (16-21).

La démonstration repose sur ce théorème, généralisation d'un théorème de Cauchy : « Soit p^r la puissance la plus élevée du nombre premier p qui divise $n!$; cela posé, on peut établir une suite de groupes de n éléments, $1, G_1, G_2, \ldots, G_\lambda, G_{\lambda+1}, \ldots, G_r$, qui sont respectivement des ordres $1, p, p^2, \ldots, p^\lambda, p^{\lambda+1}, \ldots, p^r$, et tels que chaque groupe G_λ ($\lambda < r$) soit contenu dans celui qui le suit et permutable avec ses substitutions.

Röthig (*O.*). — Sur les surfaces définies par le théorème de Malus. (22-34).

Suite du Mémoire, t. LXXXIV, p. 231-237 (*Bulletin*, III_2, 112).

Laguerre. — Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme. (35-48).

Le Mémoire se rattache au travail de Jacobi sur le développement suivant les puissances croissantes d'un polynôme entier (t. 53, p. 103, du *Journal*). Après des considérations préliminaires (I), l'auteur traite (II) du développement de e^{zx} suivant les puissances d'un polynôme $F(z)$ et ramène la solution au calcul de certaines fonctions qui se déterminent par voie récurrente et qui satisfont à une équation différentielle, qui s'obtient facilement. L'intégration de cette équation différentielle linéaire du $m^{\text{ième}}$ ordre fait l'objet du § III. Après cela, M. Laguerre développe (IV) e^{zx} suivant les puissances de $z(z-1)$, et (V) $f(t+xz)$ suivant les puissances de la même grandeur, enfin (VI) $\log(1+xz)$ de même.

Sylvester (*J.-J.*). — Sur les déterminants composés. (49-67).

Au lieu d'entrer dans le détail de ce Mémoire, nous citerons quelques mots de M. Borchardt du tome 89 du *Journal* (p. 82).

« Dans une correspondance qui vient d'avoir lieu entre M. Sylvester et moi, M. Sylvester m'a autorisé à retirer en son nom le théorème sur les déterminants composés qu'il a énoncé, p. 56 et p. 58 du Vol. 88 de ce *Journal*.... Lorsque l'éminent géomètre qui a enrichi de si belles découvertes la théorie des déterminants et l'algèbre des fonctions entières en général, et dont les contributions forment un ornement si précieux de ce *Journal*, reviendra sur sa théorie des déterminants composés et qu'il voudra bien destiner pour mon *Journal* la rectification dont sa formule générale est susceptible, il nous fera connaître, on peut en être sûr, un progrès nouveau que cette branche de l'Algèbre devra à son initiative. »

Hazzidakis (*J.-N.*). — Sur quelques propriétés des surfaces à mesure constante de courbure. (68-73).

1° Les quadrilatères formés par les lignes asymptotiques ont des côtés opposés d'égale longueur, et leur aire est proportionnelle à l'excès de la somme des quatre angles sur 360°.

2° L'intégration de l'équation différentielle partielle des surfaces en question se ramène à l'intégration de l'équation différentielle $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v} = \sin \lambda$, où $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ sont les lignes asymptotiques et λ leur angle.

3° Qu'on exprime les coordonnées x, y, z d'une telle surface par les variables géodésiques u, v, et qu'on forme les déterminants de Gauss désignés par D, D', D''; les équations

$$\begin{aligned} dx' &= (1+u^2+v^2)^2(\mathrm{D}\,du + \mathrm{D}'dv),\\ dy' &= (1+u^2+v^2)^2(\mathrm{D}'du + \mathrm{D}''dv),\\ dz' &= (1+u^2+v^2)^2[(\mathrm{D}u + \mathrm{D}'v)\,du + (\mathrm{D}'u + \mathrm{D}''v)\,dv] \end{aligned}$$

définissent encore une surface à mesure constante de courbure.

Cayley (*A.*). — Sur l'addition des fonctions ϑ doubles. (74-81).

Weber (*H.*). — Observations relatives au Mémoire *Ueber die abelschen Functionen vom Geschlecht* 3. (Extrait d'une Lettre à M. Borchardt.) (82-84).

Stern (*M.*). — Sur la théorie des nombres de Bernoulli. (85-95).

Soit

$$\tang x = \mathrm{T}_1 x + \frac{\mathrm{T}_2}{1.2.3}x^3 + \ldots.$$

On sait qu'on a

$$\mathrm{T}_{2\nu-1} = 2^{2\nu-1}(2^{2\nu}-1)\frac{\mathrm{B}_\nu}{\nu},$$

où B_ν est le $\nu^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli. M. Stern montre que, à l'exception de $\mathrm{T}_1 = 1$, les coefficients tangentiels T se terminent en 2 ou en 6, à mesure qu'ils

sont contenus dans la forme T_{4m+3} ou T_{4m+1}, et que cette proposition est le cas le plus simple d'un théorème plus général.

Frobenius (*G.*). — Théorie des formes linéaires à coefficients entiers (suite du Mémoire, t. 86 du *Journal*, *Bulletin*, IV_4). (96-116).

« Après avoir traité la théorie de l'équivalence des formes bilinéaires dans la première Partie de ce travail, je passe à la réponse à cette question : « Quelles » conditions sont nécessaires et suffisantes pour qu'une forme soit contenue sous » une autre? » Pour point de départ, je prends la théorie d'une forme contenue relativement dans une autre par rapport à un module, théorie que j'applique aux congruences linéaires et à laquelle je ramène la théorie d'une forme qui est contenue sous une autre d'une manière absolue.

» Désignons par k un nombre entier positif, et supposons que la forme bilinéaire

$$A = \Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$$

des $m+n$ variables $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ se change, par les substitutions linéaires

$$(1) \qquad x_\alpha \equiv \sum_\gamma p_{\gamma\alpha} x'_\gamma, \quad y_\beta \equiv \sum_\delta q_{\beta\delta} y'_\delta \quad (\text{mod.}\, k),$$

en $B = \Sigma b_{\gamma\delta} x'_\gamma y'_\delta$. La forme B sera dite *contenue dans* A (mod. k). Le nombre des nouvelles variables peut être égal, supérieur ou inférieur au nombre des variables primitives. Si B est contenue dans A (mod. k) et C sous B, C est aussi contenue dans A. Si B est contenue dans A (mod. k) et si h est un diviseur de k, B sera contenue dans A (mod. h). Deux formes qui se contiennent l'une l'autre sont appelées *équivalentes* (mod. k). Deux formes équivalentes à une troisième le sont aussi l'une à l'autre. L'ensemble des formes qui sont équivalentes à une forme individuelle se nomme une *classe* de formes. Si B est contenue dans A, toute forme équivalente à B est aussi contenue dans toute forme équivalente à A, ou bien la classe de formes représentée par B est contenue dans celle représentée par A.

» Si A est équivalente à B, et que A se change en B par les substitutions (1) et B en A par les substitutions

$$(2) \qquad x'_\gamma \equiv \sum_\alpha r_{\alpha\gamma} x_\alpha, \quad y'_\delta \equiv \sum_\beta s_{\delta\beta} y_\beta \quad (\text{mod.}\, k),$$

cela étant, les congruences (2) peuvent ne pas être les solutions des congruences (2). Je n'ai nommé (§ 11) équivalentes deux formes A et B que quand le nombre des variables x'_γ (y'_δ) est lui aussi m (n), c'est-à-dire quand les deux formes sont considérées comme dépendantes du même nombre de variables, de plus que les déterminants de $n^{\text{ième}}$ et $m^{\text{ième}}$ degré $|p_{\gamma\alpha}|$ et $|q_{\beta\delta}|$ sont premiers avec k, et que les congruences (2) sont les solutions des congruences (1). Je vais montrer que cette définition restreinte coïncide complètement avec la définition plus étendue que je viens de donner. »

§ 14. La réduction des formes bilinéaires. — § 15. Le rang d'une forme bilinéaire par rapport à un module. — § 16. Le nombre des restes d'un système de

formes linéaires par rapport à un module. — § 17. Une forme contenue dans une autre et équivalente à une autre. — § 18. Systèmes adjoints de formes linéaires par rapport à un module. — § 19. Les relations entre les invariants (mod. k) et les diviseurs élémentaires. — § 20. Transformation par des substitutions unimodulaires. — § 21. Une forme contenue (d'une manière absolue) dans une autre.

Stahl (*Hermann*). — Le théorème d'addition des fonctions $\mathfrak{S}$ à p arguments. (117-130).

D'après un théorème de Riemann, toutes les caractéristiques des $\mathfrak{S}$ se prêtent à être représentées très simplement et diversement par $2p$ d'entre elles, et c'est aussi par là qu'on parvient à en distinguer le caractère pair ou impair. Après la formation des caractéristiques (§ 1), M. Stahl établit (§ 2), à l'aide de ce théorème, deux systèmes correspondants, chacun de 2^p caractéristiques, désignés par P et Q, et appelés *systèmes de huitaines* (*Achtersysteme*) parce qu'ils se rangent par 2^{p-3} lignes, chacune de huit membres. Les relations simples qui existent entre ces systèmes sont développées jusqu'au point où elles sont nécessaires pour la recherche. Ces systèmes servent (§ 3) à démontrer le théorème général d'addition des fonctions $\mathfrak{S}$: l'un s'applique à représenter le théorème, les coefficients restant indéterminés, l'autre à déterminer les coefficients. Le quatrième paragraphe donne des relations ultérieures et établit, surtout à la fin, des relations entre des fonctions $\mathfrak{S}$ paires et des fonctions $\mathfrak{S}$ dérivées impaires pour les valeurs nulles des arguments, relations qui font ressortir la connexion entre les modules des $\mathfrak{S}$ et les modules des classes des fonctions abéliennes du genre p.

Jaerisch (*P.*). — Sur les vibrations élastiques d'une sphère isotrope. (131-145).

Lamé, Clebsch et Henneberg se sont occupés de ce problème. Les deux premiers se sont bornés à traiter des cas spéciaux. Henneberg a cherché la solution générale, mais son raisonnement exige qu'une fonction s'évanouisse avec toutes ses dérivées pour une valeur constante de la variable : il en aurait dû conclure l'impossibilité des vibrations en question.

Les recherches de M. Jaerisch ont conduit à ces résultats : une sollicitation de la sphère dans la direction du rayon ne produit que des vibrations purement longitudinales; une sollicitation dans la direction de la tangente n'excite que des vibrations purement transversales. Celles-là se font le long du rayon, celles-ci sont normales au rayon. Mais, si les déplacements initiaux dépendent de toutes les trois composantes sphériques, il se forme en même temps des vibrations longitudinales et des vibrations transversales qui ont la même durée d'oscillation, et, comme chacune de ces trois sortes de vibrations possède un autre nombre d'oscillations, elles constituent trois états bien distincts de vibrations.

Les vibrations de la troisième espèce, composées de vibrations longitudinales et transversales existantes, ont été observées par Savart dans des tiges finies cylindriques, qui, quoique sollicitées longitudinalement, firent voir en même temps des vibrations longitudinales et transversales.

Frobenius et *Stickelberger*. — Sur l'addition et la multiplication des fonctions elliptiques. (146-184).

La racine carrée d'une fonction entière du quatrième ordre a été développée

par Jacobi en fraction continue à l'aide de la multiplication des fonctions elliptiques. Les formules communiquées par ce géomètre (t. VII, p. 41) sans démonstration ont été rattachées par Borchardt au théorème d'Abel et étendues au développement en fraction continue de la racine carrée d'une fonction entière quelconque. D'autre part, Jacobi a établi des formules générales qui peuvent servir à transformer une série de puissances en fraction continue. Donc, pour obtenir les formules pour la multiplication des fonctions elliptiques, il ne fallait que combiner ces deux expressions algébriques et transcendantes pour les éléments du développement en fraction continue de la racine carrée d'une fonction de quatrième degré. C'est ainsi que les auteurs ont trouvé les formules de multiplication telles que les a données M. Brioschi, de même que celles qu'a développées M. Kiepert.

La recherche du cas où la fraction continue est périodique fait voir la relation remarquable qu'il y a entre ses réduites et la transformation inverse des fonctions elliptiques. Soit $\mathfrak{p}(u) = \mathfrak{p}(u;\omega,\omega')$ la fonction elliptique fondamentale de M. Weierstrass, aux périodes ω, ω'. Cela étant, elle peut être mise sous la forme d'une expression rationnelle de $\mathfrak{p}(u;\omega,n\omega')$, et, réciproquement, $\mathfrak{p}(u;\omega,n\omega')$ peut être exprimée à l'aide de racines comme fonction algébrique de $\mathfrak{p}(u)$. En différentiant une équation de la forme

$$n\frac{\sigma'}{\sigma}(u;\omega,n\omega') = \frac{\sigma'}{\sigma}(u;\omega,\omega') + cu + R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1},$$

où c désigne une constante et R_ν^n est une fonction entière de $\mathfrak{p}(u)$ et de $\mathfrak{p}'(u)$, M. Kiepert est parvenu à l'expression de $\mathfrak{p}(u;\omega, n\omega'$ par $\mathfrak{p}(u)$. Or ces $n^{\text{ièmes}}$ racines sont toutes exprimables par une quelconque d'entre elles, soit $R_{n-1} = R$. Posons donc

$$R_\nu R^\nu = V_\nu = T_\nu - \frac{1}{2}\mathfrak{p}'(u)U_\nu, \quad R_{n-1}^n = V_{n-1};$$

cela étant, T_ν et U_ν sont des fonctions entières de $\mathfrak{p}(u)$, et $\dfrac{T_\nu}{U_\nu}$ est la $\nu^{\text{ième}}$ réduite de la fraction continue qu'on obtient en transformant en fraction continue la série pour $\mathfrak{p}'(u)$ ordonnée suivant les puissances croissantes de $\mathfrak{p}(u) - \mathfrak{p}\left(\dfrac{2\omega}{n}\right)$.

Une méthode semblable à celle que nous venons d'esquisser pour les formules de multiplication peut aussi servir à développer les formules d'addition. Au lieu de la fraction continue pour $y = \frac{1}{2}\mathfrak{p}'(u)$, c'est-à-dire au lieu des fonctions rationnelles dont les développements se confondent le plus étroitement possible avec les développements de y, il faut considérer des fonctions rationnelles qui coïncident avec y pour autant de valeurs données et différentes qu'il est possible.

§ 1. Transformation d'une série de puissances (*Potenzreihe*, série ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable) en fraction continue. — § 2. Propositions auxiliaires empruntées à la théorie des fonctions elliptiques. — § 3. La multiplication des fonctions elliptiques. — § 4. Sur les réduites de la fraction continue pour la fonction $\mathfrak{p}'(u)$. — § 5. Sur le cas où la fraction continue devient périodique. — § 6. La transformation inverse des fonctions elliptiques. — § 7. Transformation du développement en fraction continue par

l'introduction de nouvelles variables. — § 8. Sur l'interpolation au moyen de fonctions rationnelles. — § 9. Les théorèmes généraux d'addition des fonctions elliptiques. — § 10. D'autres formes du théorème d'addition.

Biehler. — Sur les fonctions doublement périodiques considérées comme des limites de fonctions algébriques. (185-204).

« C'est Cauchy qui, le premier, a rattaché aux fonctions algébriques les transcendantes elliptiques en donnant (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1843), à l'aide d'un procédé élémentaire, l'équation si importante qui lie l'expression de $\Theta(x)$ sous forme de produit au développement de cette fonction en série de cosinus.

» Je commencerai par établir cette relation en faisant usage d'une méthode plus simple que celle de Cauchy; je donnerai ensuite sous leurs diverses formes les développements des trois fonctions elliptiques; enfin j'y ajouterai les développements de quelques fonctions doublement périodiques de troisième espèce. Les exemples qui seront traités suffiront pour montrer que les mêmes méthodes s'appliquent également aux cas où les fonctions proposées renfermeraient un plus grand nombre de Θ, soit au numérateur, soit au dénominateur. »

Développement de :

I. La fonction $\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$.

II. $\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$.

III. $\cos \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$.

IV. $\Delta \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$.

V. $\frac{1}{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}$.

VI. $\frac{1}{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)\Theta_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}$.

VII. $\frac{1}{\Theta^2\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}$.

VIII. $\frac{\Theta_1^2\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}$.

IX. Démonstrations rigoureuses de toutes ces formules.

Kiepert (L.). — Sur la théorie de transformation des fonctions elliptiques. Second Mémoire. (205-212).

Cette Note fait suite au Mémoire du Tome 77, de M. Kiepert. Une quantité f y avait été définie comme racine d'une équation de transformation facile à établir. Il s'agit maintenant de représenter toutes les autres quantités qui se présentent dans la transformation comme fonctions rationnelles de f.

Une équation différentielle, donnée sans démonstration par Jacobi (t. I), fait

voir que toutes les quantités nécessaires à la transformation sont des fonctions linéaires de $\Gamma = \Delta^{\frac{1}{2}(n-1)} f^{2}$ et des $\frac{1}{2}(n-1)$ premières dérivées de Γ prises suivant l'invariant absolu et que Γ elle-même satisfait à une équation différentielle homogène linéaire d'ordre $\frac{1}{2}(n+1)$.

§ 1. Déduction de l'équation aux différentielles partielles. — § 2. Détermination des quantités $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\nu, \overline{g_2}, \overline{g_3}$. — § 3. Exemple ($n = 5$).

Sturm (*Rudolf*). — Sur la théorie des surfaces de troisième ordre. (213-240).

M. Sturm a publié en 1867 un Ouvrage sur les surfaces de troisième ordre; le Mémoire dont nous allons rendre compte en peu de mots peut être envisagé comme complément de cette publication, couronnée du prix de Steiner il y a quinze ans.

Les deux premières Sections donnent quelques démonstrations sous des formes simplifiées; la troisième s'occupe du système des sections coniques qui sont contenues dans les plans passant par une droite de la surface et en fait voir de nouvelles propriétés. Dans la quatrième Section, la théorie purement géométrique que M. Milinowski a donnée des polaires des courbes planes de troisième ordre, et dont on a fait peu de cas jusqu'alors, est appliquée par M. Sturm aux polaires des surfaces cubiques. En mettant à profit les idées de M. Milinowski pour les surfaces de troisième ordre, l'auteur remplit donc lui-même un souhait qu'il avait énoncé dans la Préface de son Livre. Pour augmenter la valeur individuelle du Mémoire, M. Sturm a emprunté au travail de M. Milinowski (Schlömilch's *Zeitschrift für Math.*, t. XXI et XXIII) quelques raisonnements sans rien changer. Cependant on y trouve assez de choses nouvelles qui appartiennent exclusivement à M. Sturm. D'abord il a fallu imaginer une méthode de génération de la surface cubique pour y pouvoir appliquer la théorie de M. Milinowski. Le théorème fondamental sur le plan polaire mixte de deux points est démontré d'une manière rigoureuse, tandis que la démonstration du théorème correspondant dans le plan se trouvait originairement en défaut chez M. Milinowski. Enfin quelques nouveaux théorèmes ont été ajoutés à la fin de cette Section. La dernière Section a rapport au problème proposé alors (1879) pour le prix de Steiner, à savoir la détermination de la variété d'une courbe dans l'espace ou bien du nombre des conditions simples auxquelles on la peut soumettre. M. Sturm détermine ce nombre pour les courbes traitées dans le cinquième Chapitre de son Livre. Le problème général n'est pas abordé par cela.

Rosanes (*J.*). — Sur des systèmes ponctuels linéairement dépendants. (241-273).

Pour expliquer les idées de l'auteur, nous allons résumer ses définitions en peu de mots. Une forme ternaire $f(x_1 x_2 x_3)$ du degré n dans les coordonnées plans homogènes $x_1 x_2 x_3$ s'évanouit pour un nombre infini de systèmes de valeurs des quantités x. La courbe qui a l'équation $f(x_1 x_2 x_3) = 0$ en représente l'ensemble. Si l'on appelle tout système de valeurs $(x_1 x_2 x_3)$ qui fait évanouir $f(x_1 x_2 x_3)$, un point zéro de f, il existe une dépendance entre tous les points zéro, car, la forme $f(x_1 x_2 x_3)$ étant complètement déterminée par $\frac{1}{2}n(n+3)$ points

zéro quelconques, l'ensemble de tous les points zéro s'ensuit de $\frac{1}{2}n(n+3)$ d'entre eux.

Cependant on a découvert assez tôt qu'un nombre de points zéro qui n'est pas encore suffisant pour déterminer complètement une forme peut entraîner des points zéro ultérieurs; car, désignant par N le nombre $\frac{1}{2}n(n+3)$, on peut déduire $n^2 - N + 1$ de $N - 1$ donnés. Donc, $N - 1$ points zéro étant donnés arbitrairement, on peut déterminer un $N^{ième}$ de $n^2 - N + 1$ manières différentes, de façon à avoir N points formant un *système dépendant* (nom employé pour désigner un système de p points zéro lorsque $p - 1$ de ces points entraînent le $p^{ième}$). En faisant abstraction de la position tout à fait arbitraire des points fondamentaux, il est même possible, en certains cas particuliers, de gagner un système dépendant de $N - 2$ points donnés par l'addition d'un point. Cette demande revient à déterminer les coordonnées du dernier point de telle sorte que tous les déterminants du degré $N - 1$ d'une matrice $(N + 1, N - 1)$ s'évanouissent, ce qui revient à trois équations de condition indépendantes.

Il est évident qu'il existe aussi pour les formes quaternaires des systèmes indépendants de points zéro et même en plus grande variété....

L'existence de formes algébriques en Géométrie qui contiennent deux systèmes de variables porte à approfondir la question comment il en serait avec de tels systèmes dépendants. Tel est le théorème de Hesse, que deux paires de points conjugués d'une section conique entraînent toujours un troisième.

Stahl (*Hermann*). — Démonstration d'un théorème de Riemann sur les caractéristiques des fonctions ϑ. (273-276).

Liouville (*J.*). — Leçons sur les fonctions doublement périodiques, faites en 1847. (277-310).

Voici comment Borchardt raconte l'origine de ces leçons :

« Lorsque, dans la première moitié de l'année 1847, j'ai fait un séjour à Paris, en même temps que mon ami bien regretté Ferdinand Joachimsthal, M. Liouville a bien voulu nous faire chez lui, à nous deux, quelques leçons sur sa méthode de traiter la théorie des fonctions doublement périodiques. J'ai recueilli les leçons de M. Liouville, et lorsque, retourné à Berlin, j'en avais achevé la rédaction, je lui ai fait parvenir une copie de mon manuscrit, qu'il m'a autorisé à communiquer à Jacobi et à Lejeune-Dirichlet. C'est ce même manuscrit dont M. Liouville a donné la Table des matières (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXXII, p. 452).

» Quoique depuis longtemps le fond des recherches de M. Liouville soit connu, on n'en possède pourtant pas de rédaction authentique. Cette circonstance a donné occasion à plusieurs de mes amis de m'exprimer leur avis que, encore aujourd'hui, je ferais quelque chose d'utile à la Science en faisant imprimer mon ancien manuscrit contenant les leçons de M. Liouville de 1847. Je me conforme à leur désir après avoir obtenu pour cette publication l'assentiment de l'illustre auteur des recherches dont il s'agit.

» En communiquant aux géomètres un travail fait il y a plus de trente ans et sans l'intention de le faire imprimer, je crois néanmoins pouvoir assurer qu'en général ma rédaction reproduit fidèlement les leçons de M. Liouville. Elle en diffère toutefois, comme l'on verra, dans la démonstration du théorème fonda-

mental suivant : « Il est impossible qu'une fonction doublement périodique reste toujours finie, à moins qu'elle ne se réduise à une constante, » théorème qui forme la base de la méthode de M. Liouville.

» La démonstration de ce théorème donnée par M. Liouville, et que je n'ai fait qu'indiquer brièvement, a été remplacée dans ma rédaction par la démonstration d'un théorème plus général, qui ne se rapporte pas exclusivement aux fonctions doublement périodiques et d'où découle comme corollaire le théorème énoncé ci-dessus. »

Table des matières. — Première Partie : Théorie générale.

1. Une fonction doublement périodique qui ne devient jamais infinie est impossible. 2. Une fonction doublement périodique à un seul infini est impossible. 3. Fonctions doublement périodiques à deux infinis. Leurs propriétés fondamentales. 4. Fonctions doublement périodiques à plusieurs infinis. Leur développement en sommes et en produits de fonctions doublement périodiques à deux infinis. 5. Fonctions à un nombre pair d'infinis. Leur développement en produits de fonctions doublement périodiques à trois infinis. 6. Développements des fonctions doublement périodiques en fractions de la forme

$$\frac{M + N\varphi'(z)}{L},$$

$\varphi(z)$ représentant une fonction doublement périodique à deux infinis, $\varphi'(z)$ son quotient différentiel, et L, M, N des fonctions entières de $\varphi(z)$.

Seconde Partie : Applications.

7. Détermination du quotient différentiel des fonctions doublement périodiques à deux infinis. Théorème de l'addition pour les mêmes fonctions. Cas particulier du *sinus amplitudinis*. — 8. Transformation du *sinus amplitudinis*. Expressions en forme d'une somme et d'un produit. — 9. Transformation inverse du *sinus amplitudinis*. Formule d'Abel. Formule de Jacobi.

Schubert (*Hermann*). — Sur la relation uni-biforme (*ein-zweideutige*) entre les éléments des figures fondamentales de première espèce. (311-342).

Pendant les dernières années, MM. Sturm et Hirst se sont occupés de rechercher les nombres qui se rapportent à la relation projective, c'est-à-dire correspondance uni-uniforme des éléments des figures fondamentales de première et de deuxième espèce. A cet effet, ils ont mis à profit la même méthode que, à diverses reprises, MM. Zeuthen et Schubert ont employée pour calculer les nombres pour les courbes et surfaces, en partant des nombres, beaucoup plus faciles à obtenir, des dégénérations de ces figures. L'auteur a encore fait voir (dans son Livre *Kalkül der abzählenden Geometrie*, Leipzig, Teubner) que le calcul de tous les nombres qui se rapportent aux figures fondamentales projectives de première espèce, ainsi qu'aux figures collinéaires et corrélatives de deuxième espèce, se simplifie beaucoup quand on lui applique la méthode développée dans les premières Sections de ce Livre. Ce calcul permet de généraliser les problèmes de Sturm et de Hirst : on remplace la relation projective, c'est-à-dire uni-uniforme par une correspondance α-β-forme. Le présent Mémoire développe les nombres pour deux figures fondamentales de première espèce qui sont en correspondance uni-biforme.

§ 1. La dimension de la condition de la α-β-formité entre les éléments des

figures fondamentales de première espèce. — § 2. Les conditions pour deux séries droites ponctuelles en correspondance uni-biforme. — § 3. Les dégénérations pour deux figures fondamentales de première espèce en correspondance uni-biforme. — § 4. Les équations entre les conditions pour deux séries droites ponctuelles en correspondance uni-biforme. — § 5. Calcul des nombres pour la dégénération K. — § 6. Le calcul des nombres pour la dégénération ω. La figure composée de deux séries droites ponctuelles. — § 7. Le calcul des nombres pour deux séries droites ponctuelles en correspondance uni-biforme. — § 8. Problèmes analogues.

Spitzer (*Simon*). — Intégration de quelques équations différentielles linéaires. (343-347). E. Lampe.

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, publié par le Conseil d'instruction de cet établissement.

XLVII[e] Cahier, T. XXVIII; 1880 (¹).

Halphen. — Sur les invariants différentiels des courbes gauches. (1-102).

Si l'on considère une substitution homographique par laquelle on passe des variables X, Y, Z, ... aux variables $x, y, z, \ldots$, et si l'on regarde Y et Z comme des fonctions de X, y et z seront des fonctions de x définies par la substitution même et l'on aura ainsi deux courbes gauches correspondantes : ceci posé, soit $f(X, Y, Z, Y', \ldots, Z^{(n)})$ une fonction entière des variables primitives et de leurs dérivées; que, dans l'équation $f = 0$, on fasse la substitution et qu'on mette aussi l'équation transformée sous forme entière, la fonction f sera dite un invariant différentiel si cette transformée ne diffère de l'équation $f = 0$ que par le changement des lettres, c'est-à-dire si cette transformée peut s'écrire

$$f(x, y, z, y', \ldots, z^{(n)}) = 0,$$

quels que soient les coefficients de la substitution.

M. Halphen commence par donner des exemples de tels invariants : ainsi la fonction $u = \frac{1}{1.2}(y''z''' - z''y''')$, qui, égalée à zéro, exprime qu'une courbe est plane, est un invariant différentiel; il en est de même de la fonction v qui, égalée à zéro, exprime que les tangentes à une courbe gauche appartiennent à un complexe linéaire; si l'on pose d'une façon générale

$$a_n = \frac{1}{4.5.6\ldots n}\,\frac{y''z^{(n)} - y^{(n)}z''}{y''z''' - y'''z''},$$
$$b_n = \frac{1}{3.4.5\ldots n}\,\frac{y^{(n)}z''' - y'''z^{(n)}}{y''z''' - y'''z''} \quad (n \geq 4),$$

(¹) Voir *Bulletin*, IV₂, 121.

on a

$$v = a_6 - 2b_6 - 3a_4a_6 + 3a_4b_4 + 2a_4^3.$$

L'examen de substitutions particulières montre tout de suite qu'un invariant différentiel ne contient ni les variables elles-mêmes, ni les dérivées premières, et qu'il est nécessairement une fonction homogène de déterminants binaires tels que $y^{(m)}z^{(n)} - y^{(n)}z^{(m)}$; en regardant ce déterminant comme une figure, on voit de plus que chaque terme d'un invariant entier f contient un nombre de figures qui est le même pour tous les termes de l'invariant : ce nombre est le *degré* de l'invariant; ainsi les invariants u et v ont les degrés 1 et 3. Le quotient d'un invariant différentiel de degré δ par u^δ est une fonction entière des quantités a_n, b_n précédemment définies. La somme des indices de dérivation, dans un même terme d'un invariant, est constante pour tous les termes de cet invariant : c'est le *poids* de ce dernier; quant à l'ordre d'un invariant, c'est l'ordre des plus hautes dérivations. Il n'existe pas d'invariant absolu d'ordre inférieur à 7.

Dans un invariant différentiel d'ordre n, si l'on prend, parmi les termes du plus haut degré en a_n, b_n simultanément, celui qui est du plus haut degré en b_n, le coefficient de ce terme est lui-même un invariant; il en est de même du coefficient du terme du plus haut degré en b_n, ce terme étant considéré isolément.

Quand un invariant différentiel est réduit à la forme d'une fonction des quantités A_n, B_n (analogues à a_n, b_n), si q est alors son poids, l'effet de la substitution homographique $X = \frac{\xi}{\omega}$, $Y = \frac{\eta}{\omega}$, $Z = \frac{\zeta}{\omega}$, où ξ, η, ζ, ω sont des polynômes du premier degré en x, y, z, est de le reproduire multiplié par $\left(\frac{\omega^2}{\omega\xi' - \xi\omega'}\right)^q$; mis sous une forme quelconque, il se reproduit multiplié par $D^d \frac{\omega^{(p-d)}}{(\omega\xi' - \xi\omega')^{p+d}}$, d étant son degré, p son poids et D étant le déterminant de la substitution. Il suit de là que la somme de deux invariants d'un même degré et d'un même poids est encore un invariant; que leur quotient est un invariant absolu; que, avec trois invariants, on peut former un invariant absolu; enfin que tout invariant d'ordre moindre que 7 se réduit à $u^m v^n$.

De ce qui suit on supposera toujours les invariants exprimés au moyen des quantités a_n, b_n : ils sont alors de degré zéro.

Sous cette condition on a la proposition suivante : *Si φ et ψ sont deux invariants différentiels d'un même poids, la quantité $\varphi\psi' - \varphi'\psi$ est un invariant; cet invariant est lui-même de degré zéro; il est exprimé au moyen des quantités a_n, b_n, et les dérivées d'ordre le plus élevé n'y entrent que linéairement.* M. Halphen est ainsi conduit à la notion des invariants *linéaires*. Un invariant linéaire d'ordre n est celui qui ne contient a_n et b_n que linéairement.

L'auteur met ensuite en évidence l'existence de deux invariants linéaires s_7, t_7 du septième ordre, qui sont de la forme

$$s_7 = v^\mu a_7 + \theta, \quad t_7 = v^\nu t_7 + \psi a_7 + \vartheta,$$

où θ, ψ, ϑ sont des quantités d'ordre au plus égal à b, et μ, ν des exposants entiers et positifs; cette forme caractéristique se retrouve dans les invariants s_n, t_n d'ordre supérieur à 7, que l'on déduit successivement de s_7, t_7 et de l'invariant v par l'application de la règle suivante. En désignant par σ et τ les poids de s_7, t_7, on aura

$$s_8 = \frac{1}{8}\left(vs'_7 - \frac{\sigma}{3}v's_7\right), \quad t_8 = \frac{1}{8}\left(vt'_7 - \frac{\tau}{3}v't_7\right),$$

les deux invariants linéaires s_8, t_8 étant de huitième ordre et des poids $\sigma + 4$, $\tau + 4$. On aura ensuite

$$s_9 = \frac{1}{9}\left(v s'_8 - \frac{\sigma+4}{3} v' s_8\right), \quad t_9 = \frac{1}{9}\left(v t'_8 - \frac{\tau+4}{3} v' t_8\right), \quad \ldots.$$

Les invariants s_8, t_8, s_9, t_9, ..., s_n, t_n ainsi formés sont dits *fondamentaux*, et cette dénomination est bien justifiée par la proposition suivante :

Tout invariant différentiel d'ordre n est exprimable rationnellement en fonction des invariants fondamentaux d'ordre n et d'ordre moindre, ainsi que l'invariant v. Si cet invariant est une fonction entière des quantités a_n, b_n, *la fonction rationnelle qui le représente ne contient en dénominateur qu'une puissance de v.*

On voit donc que la recherche de tous les invariants différentiels se ramène à la recherche de deux invariants du septième ordre. C'est en se plaçant à un point de vue un peu différent que M. Halphen effectue cette détermination : elle résulte, en effet, de la proposition suivante, dont on aperçoit de suite tout l'intérêt.

Il est en général possible, par un choix convenable des coordonnées (et cela d'une seule façon), de réduire les équations d'une courbe à la forme *canonique*

$$z = x^3 + x^4 + p_7 x^7 + p_8 x^8 + \ldots,$$
$$y = x^2 \qquad + q_7 x^7 + q_8 x^8 + \ldots,$$

et les coefficients de ces développements p_7, p_8, ..., q_7, q_8, ... sont des invariants absolus. En effectuant cette réduction, on parvient aux expressions de s_7, t_7, à savoir

$$s_7 = \mu_7 - 3\lambda_6, \quad t_7 = \mu_6\lambda_7 - \lambda_6\mu_7 + 2\lambda_6^2,$$

où

$$\mu_6 = v,$$
$$\lambda_6 = b_6 - a_4 b_5 - 4 a_5 b_4 + 4 a_4^2 b_4 - 2 a_4^2 a_5 + 2 b_4^2 + a_5^2 + a_4^4,$$
$$\mu_7 = a_7 + 3 b_4^2 - 4 b_4 a_5 + 3 b_5 a_4 - 4 a_6 a_4 + 6 a_4^2 a_5 - 3 a_4^4,$$
$$\lambda_7 = -2 a_4 \lambda_6 + b_7 + 5 b_4 b_5 - 5 a_5 b_5 + 4 a_4^2 b_5$$
$$- 2(a_4^2 + 2 b_4 - a_5)(a_6 + a_4^2 + a_4 b_4 - 2 a_4 a_5).$$

La considération d'une courbe (m), dite *adjointe* à la courbe (M), et qui s'en déduit par corrélation, conduit ensuite M. Halphen à la notion des invariants différentiels adjoints; on conçoit, en effet, que tout invariant différentiel F, relatif à la courbe (M), puisse être transformé en un invariant différentiel f, relatif à la courbe m. Les invariants différentiels peuvent ainsi être classés par couples; un invariant différentiel peut d'ailleurs être son propre adjoint; tel est le cas de l'invariant v, puisque la figure corrélative d'une complexe linéaire est encore une complexe linéaire.

Les résultats précédents reçoivent une interprétation géométrique intéressante par l'introduction de la courbe *anharmonique* déjà considérée par M. Fouret et dont les équations, en la supposant rapportée à un tétraèdre de référence convenable, sont

$$t^{r-1} y = x^r, \quad t^{s-1} y = z^s.$$

M. Fouret a montré que, en chaque point d'une courbe, il existait une courbe

anharmonique unique, ayant avec la proposée, au point considéré, un contact du septième ordre : les exposants r, s qui la caractérisent sont des invariants absolus, liés par conséquent aux invariants absolus $\frac{s_7^2}{v^4}$, $\frac{t_7^2}{v^8}$; au lieu des quantités r et s, M. Halphen est amené à introduire deux quantités g, h qui ne changent pas les modifications qui résultent pour les nombres r, s des échanges entre les faces du tétraèdre de référence; posons

$$\alpha = r + s - 1, \quad \beta = r - s - 1, \quad \gamma = s - r - 1,$$

on a

$$h = \frac{\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2}, \quad g = \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^3}.$$

Si maintenant l'on fait

$$a = \frac{s_7^2}{v^4}, \quad b = \frac{t_7}{s_7^2},$$

ces deux invariants absolus s'expriment au moyen de g, h par les formules

$$a = \frac{3}{2.5^2.7^2}\frac{(4 - 25h)^3}{g^2},$$

$$b = \frac{7}{2^2.3^3}\left[1 - 2^2.3^2.5\frac{g}{(4 - 25h)^2}\right];$$

inversement on a

$$g = \frac{3^8.2^4}{5.7^3}\frac{1}{a^2(7 - 36b)^3},$$

$$4 - 25h = \frac{2^3.3^5}{7}\frac{1}{a(7 - 36b)^2}.$$

L'auteur aborde ensuite une autre question :

Soient $\varphi = 0$, $\psi = 0$ deux équations différentielles simultanées entre la variable indépendante x et les deux fonctions y et z; quelle doit être la nature de ce système pour qu'il soit invariant, et, dans ce cas, quelles simplifications peuvent être apportées au problème de l'intégration?

Après avoir écarté les cas particuliers où une combinaison des deux équations est $u = y'z'' - z'y'' = 0$, ou bien $v = 0$, il montre que, dans le cas général, ces deux équations consistent en des relations entre les coefficients de la forme canonique, c'est-à-dire entre des invariants absolus : par exemple, si elles sont du septième ordre, elles se réduisent à

$$\frac{s_7^2}{v^4} = a, \quad \frac{t_7}{s_7^2} = b,$$

a et b étant des constantes, et l'intégrale générale est formée par les équations générales de la courbe anharmonique, dont les invariants g, h sont déterminés en fonction de a, b par les formules précédemment données. Dans le cas de deux équations d'ordre n, l'intégration se ramène à l'intégration successive :

1° D'un système de deux équations, l'une d'ordre $(n - 7)$, l'autre d'ordre $(n - 8)$;

2° D'un système de deux équations, l'une du second, l'autre du premier ordre;

3° D'un système de deux équations du premier ordre chacune;

4° D'un système de deux équations, l'une du deuxième, l'autre du troisième ordre;

5° Et, enfin, à cinq quadratures successives.

Le dernier Chapitre du Mémoire est consacré à diverses applications et à divers exemples de *covariants* différentiels; on y trouvera la détermination du tétraèdre principal de la courbe anharmonique, osculatrice en un point d'une courbe donnée, l'équation de la surface du second degré osculatrice en un point, les équations différentielles des courbes biquadratiques, etc.

Collignon (*E.*). — Recherches sur la formule de Wallis. (103-138).

On trouvera dans ce Mémoire, outre diverses transformations de la formule de Wallis et quelques recherches arithmétiques relatives au numérateur et au dénominateur, un curieux essai de démonstration de l'incommensurabilité de π et de ses puissances. M. Collignon, en partant de l'égalité hypothétique

$$\frac{\pi}{2} = \frac{Y}{X} = (p)\frac{np+m}{np},$$

où $\frac{Y}{X}$ serait une fonction irréductible, où

$$(p) = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{p-1}{p},$$

p étant un nombre premier et m et n étant deux nombres entiers premiers entre eux, dont on sait seulement que m est inférieur à n, établit que la possibilité d'une telle égalité est *infiniment peu probable*. Il ne manque pas d'ailleurs de reconnaître ce qu'un tel mode de démonstration a de défectueux.

Léauté (*H.*). — Sur un perfectionnement applicable à tous les régulateurs à force centrifuge. (139-175).

On connaît un grand nombre de solutions approchées du problème de l'isochronisme du régulateur. M. Rolland en a donné une solution exacte : toutefois, la plupart des régulateurs employés dans l'industrie n'appartiennent pas aux types qui répondent à ces solutions; il y a donc intérêt à faire connaître un procédé simple permettant, sans compliquer sensiblement les régulateurs, de les rapprocher de l'isochronisme. D'un autre côté, l'isochronisme parfait est souvent d'une application défectueuse : la sensibilité du régulateur doit, en effet, être en rapport avec l'énergie du volant; de là résulte la nécessité de déterminer, dans chaque cas, le degré d'isochronisme qu'il convient d'adopter et, par suite, l'utilité d'un système permettant d'obtenir le degré d'isochronisme qu'on veut; enfin il est nécessaire de pouvoir modifier la vitesse de régime de la machine, tout en conservant le degré d'isochronisme que l'on s'est fixé; le système indiqué par M. Léauté répond à ces divers *desiderata* : il s'applique à un régulateur à boules quelconque; il procure le degré d'isochronisme qu'on veut; il permet de faire varier la vitesse de régime sans même arrêter la machine; il donne la possibilité de maintenir le degré d'isochronisme obtenu, quand cette vitesse est modifiée; enfin il est simple à établir et ne complique pas sensiblement le mécanisme.

Poincaré (*H.*). — Sur un mode nouveau de représentation des formes quadratiques définies ou indéfinies. (177-245).

Le Mémoire de M. Poincaré comprend cinq Parties. La première est consacrée à l'étude arithmétique des réseaux de points dont les coordonnées x, y sont données par les formules

$$x = am + bn,$$
$$y = cm + dn,$$

où m, n prennent toutes les valeurs entières possibles. Ces réseaux jouissent de propriétés qui rappellent certaines propriétés des nombres : ils peuvent être entiers, fractionnaires, incommensurables; ils sont entiers quand a, b, c, d sont entiers; un réseau A est multiple d'un réseau B quand tous les points du réseau A appartiennent au réseau B; deux réseaux A, B sont équivalents quand ils comprennent les mêmes points; le rapport du réseau $\begin{bmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{bmatrix}$ au réseau $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est le réseau $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$; on est amené ainsi à considérer les conditions de divisibilité de deux réseaux, leur plus grand commun diviseur, leur plus petit multiple commun; ces diverses recherches s'effectuent aisément par la considération d'un réseau équivalent à un réseau donné et ayant la forme réduite $\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$; on est amené aussi à considérer des réseaux *premiers* dont la *norme* $ad - bc$ est un nombre premier et à effectuer, pour les réseaux entiers, une décomposition analogue à la décomposition d'un nombre entier en ses facteurs premiers. Un réseau entier peut aussi être considéré comme l'ensemble des points dont les coordonnées satisfont à une congruence de la forme

$$ax + by \equiv 0 \pmod{c},$$

a, b, c étant des nombres entiers; on est ainsi amené à traiter, sous cette nouvelle forme, les problèmes précédemment indiqués.

M. Poincaré, dans la seconde Partie, traite de la représentation des nombres complexes de la forme $x + y\sqrt{D}$; un tel nombre est représenté par le point x, y; son *module* et son *argument* sont les quantités

$$\sqrt{x^2 - y^2 D}, \quad \frac{1}{\sqrt{-D}} \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}\sqrt{-D},$$

qui s'interprètent géométriquement sans difficulté; l'introduction des nombres complexes conduit à une notation nouvelle pour la représentation des réseaux; ainsi le symbole $Am + Bn$, où A, B sont les nombres complexes $a + c\sqrt{D}$, $b + d\sqrt{D}$, représentera le réseau $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Les points représentatifs de tous les nombres complexes existants qui sont multiples d'un nombre complexe donné, existant ou idéal, forment un réseau que l'on peut regarder comme un nouveau mode de représentation de ce nombre existant ou idéal donné; ce mode de représentation conduit l'auteur au théorème suivant :

On peut représenter, avec une approximation aussi grande qu'on voudra, un nombre complexe quelconque $a + b\sqrt{D}$, *où* a *et* b *peuvent être incom-*

mensurables, par une expression de la forme

$$\Sigma\lambda_m(\alpha+\beta\sqrt{D})^m,$$

où λ_m et m sont des nombres entiers, α et β des nombres fractionnaires donnés (à dénominateurs plus grands que 2).

Dans la troisième Partie, M. Poincaré traite de la représentation des formes par des réseaux.

Le réseau

$$x = am + bn, \quad y = cm + dn$$

représente la forme

$$(am+bn)^2 - D(cm-dn)^2;$$

ce mode de représentation s'applique aux formes indéfinies et conduit l'auteur à l'interprétation géométrique des formes réduites indéfinies, interprétation qui fournit immédiatement la démonstration des principaux théorèmes qui concernent ces formes. Dans cette même Partie on résout ces deux problèmes :

Reconnaître si une forme en implique une autre; trouver toutes les transformations d'une forme en elle-même.

La quatrième Partie concerne ce que l'auteur appelle le *produit second* de deux réseaux.

Si, A, B, A_1, B_1 étant des nombres complexes, on considère les deux réseaux

$$Am + Bn, \quad A_1 m_1 + B_1 n_1,$$

leur produit second sera

$$AA_1\mu_1 + AB_1\mu_2 + BA_1\mu_3 + BB_1\mu_4,$$

où μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 sont les nouvelles indéterminées. L'opération est évidemment commutative; appliquée aux réseaux qui représentent deux formes, elle conduit à la composition des formes, au sens de Gauss.

Enfin, dans la cinquième Partie, l'auteur montre comment les considérations précédentes permettent d'exposer d'une manière simple et concrète la théorie des nombres complexes idéaux, qui correspondent aux formes quadratiques de déterminant D.

AMERICAN JOURNAL OF MATHEMATICS PURE AND APPLIED, Editor in chief J.-J. SYLVESTER, Associate Editor in charge W.-E. STORY, with the cooperation of B. PEIRCE, S. NEWCOMB and H.-A. ROWLAND. Published under the auspices of the John Hopkins University. Baltimore.

Tome I; 1878.

Newcomb (S.). — Note sur une classe de transformations par lesquelles une surface peut être retournée dans un espace de plus de trois dimensions. (1-4).

L'auteur se propose de démontrer le théorème suivant :

Si une quatrième dimension est ajoutée à l'espace, une surface matérielle fermée peut être retournée par une simple flexion sans déchirure ni duplicature.

Hill (G.-W.). — Recherches sur la théorie de la Lune. (5-26).

Eddy (H.-T.). — Le théorème des trois moments. (27-31).

Le théorème dont il s'agit exprime la relation entre les moments de flexion d'une poutre élastique droite en trois points de support consécutifs; il a été publié par Clapeyron, en 1857, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*. L'auteur l'obtient simplement et l'énonce sous une forme plus générale.

Weichold (G.). — Solution du cas irréductible. (32-49).

Une traduction française de ce Mémoire a été insérée dans le *Journal de Mathématiques* de M. Resal, 3e série, t. V; 1879. Voir *Bulletin*, 2e série, t. III, IIe Partie, p. 221.

Cayley. — Desiderata et suggestions. (50-52).

Rowland. — Note sur la théorie de l'absorption électrique. (53-58).

Après la décharge d'une bouteille de Leyde, il se produit au bout d'un certain temps une charge nouvelle de même signe que la première. L'auteur cherche quelle doit être la constitution de l'isolateur pour qu'un tel phénomène (qu'on explique habituellement au moyen d'une absorption de l'électricité par l'isolateur) soit possible. Il part des équations fondamentales, données par Maxwell,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{\partial V}{\partial z}\right)+4\pi\rho=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial V}{\partial z}\right)-\frac{d\rho}{dt}=0,$$

où V est le potentiel, ρ la densité au point x, y, z, $\varkappa$ le pouvoir inducteur, k le pouvoir conducteur, quantités qui, dans le système de corps considéré comprenant des conducteurs et des non-conducteurs, doivent être regardées comme variables.

S'il n'y a pas absorption électrique, le rapport des densités en deux points quelconques doit rester constant : si l'on pose

$$\frac{\rho}{\rho'}=c,$$

les équations précédentes admettent les solutions

$$\rho=\rho_0 e^{-ct},\quad V=V_0 e^{-ct},$$

où $\rho=-k\dfrac{dV}{dn}$ désigne l'intensité du courant et où $c=3\Pi m$, $m=\dfrac{k}{\varkappa}$. Inversement on peut déduire de ces équations qu'il y a absorption lorsque $\dfrac{k}{\varkappa}$ n'est pas

constant pour tout le système. Ceci peut avoir lieu si le corps comprend des parties hétérogènes, si la conductibilité dans le corps ne satisfait pas aux lois de Ohm, c'est-à-dire si k dépend des forces électriques, enfin si x dépend des mêmes forces.

L'auteur s'occupe ensuite des matériaux qui montrent le mieux l'absorption électrique et traite le cas d'un condensateur composé de plaques parallèles.

Peirce (*C.*). — Esposizione del metodo dei minimi quadrati. (59-63).

Analyse de l'Ouvrage publié sous ce titre par M. A. Ferrero. (Firenze, 1876.)

Sylvester. — Sur une application de la nouvelle théorie atomique à la représentation graphique des invariants et covariants des quantités binaires avec trois appendices. (64-125).

M. Sylvester expose dans ce Mémoire de singulières analogies entre les formules chimiques (dans la théorie atomique) et les formes symboliques des invariants des formes binaires. Un élément est représenté par une forme binaire dont le degré est égal à la valeur atomique de l'élément. Ainsi on posera

$$\begin{aligned} H &= h_x = h'_x = h''_x = \ldots, \\ O &= o_x^2 = o'^2_x = o''^2_x = \ldots, \\ C &= c_x^4 = c'^4_x = c''^4_x = \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Les combinaisons saturées sont alors représentées par les mêmes notations que Clebsch a fait connaître pour les représentations des invariants

$$\begin{gathered} 2\,O = (oo')^2, \quad H_2O = (ho)(h'o), \\ H_4C = (hc)(h'c)(h''c)(h'''c), \\ NO_2H = (no)^2(no')^2(no'')(o''h). \end{gathered}$$

Les représentations graphiques dont se servent les chimistes et qui consistent à représenter les éléments par des points, et les systèmes tels que $(oo')\ldots$ par des droites qui les joignent, peuvent aussi servir à la représentation des invariants.

Le noyau d'une combinaison ou une combinaison non saturée est représenté par un covariant; ainsi la figure de Lodenburg pour le noyau benzine sera

$$(cc_1)(c_1c_2)(c_2c_3)(c_3c_4)(c_4c_5)(c_5c)(c_1c_4)(c_2c_5)c_x c_{1x} c_{2x} c_{3x} c_{4x} c_{5x}.$$

Il faut remarquer qu'un invariant ne correspond pas à chaque corps; ainsi l'hydrogène ne peut être représenté par (hh'), puisque $(hh') = 0$. Si l'on ne veut pas regarder l'hydrogène comme un corps composé, la théorie présente une lacune.

Dans ce système, le poids des invariants ou covariants est égal au nombre des droites qui joignent les unités atomiques. M. Sylvester cherche quelles doivent être les propriétés de la figure, si la forme invariante est réductible, ainsi que cela a lieu pour le covariant ci-dessus, du sixième degré, et montre sur quelques exemples comment la figure d'un produit peut être composée avec les figures des facteurs irréductibles. A une relation invariante correspond la possibilité de dé-

former les figures des différentes formes les unes dans les autres : ainsi la loi de réciprocité de M. Hermite peut s'établir graphiquement en remplaçant m atomes d'atomicité n par n atomes d'atomicité m.

Clifford. — Extrait d'une Lettre à M. Sylvester. (126-129).

Dans le Mémoire de M. Sylvester, les figures chimiques sont réduites à des schèmes géométriques, les éléments chimiques n'y entrent pas. M. Clifford comble cette lacune.

Hill (W.). — Recherches sur la théorie de la Lune. (129-147).

Franklin (F.). — Coordonnées biponctuelles. (148-173).

Dans le système adopté par M. Franklin, les coordonnées d'une droite sont les distances mesurées parallèlement à une direction fixe, à deux ou trois points; l'auteur se sert de ces coordonnées pour faire l'étude des coniques.

Cayley. — Desiderata et suggestions. (174-176).

Story. — Sur le potentiel élastique des cristaux. (176-183).

Les composantes de la force élastique peuvent être regardées comme les dérivées partielles d'une fonction entière homogène et du second degré des six quantités

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad y_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad z_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad y_x = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \cdots$$

C'est cette fonction que l'auteur appelle *potentiel des forces élastiques;* elle contient, si l'on fait abstraction de toute hypothèse sur la nature du corps, vingt et une constantes; ce nombre se réduit à deux pour les corps isotropes. M. Story s'occupe spécialement de déterminer le nombre des constantes pour les divers systèmes cristallins.

Lucas (É.). — Théorie des fonctions numériques simplement périodiques. (184-240; 289-321).

I. Définition des fonctions numériques simplement périodiques.

Soient a, b les racines de l'équation à coefficients entiers

$$x^2 = Px - Q;$$

l'auteur pose

$$U_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \quad V_n = a^n + b^n;$$

telles sont les fonctions dont l'auteur étudie les propriétés arithmétiques; elles se classent en trois espèces selon que les racines sont réelles et entières, réelles et incommensurables, imaginaires.

II. Des relations des fonctions U_n et V_n avec les fonctions circulaires et hyperboliques.

III. Des relations de récurrence pour le calcul des valeurs des fonctions U_n et V_n.

IV. Des relations des fonctions U_n et V_n avec les déterminants.

V. Des relations des fonctions U_n et V_n avec les fractions continues. Développements de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$, $\frac{U_{(n+1)r}}{U_{nr}}$.

VI. Développement des fonctions U_n et V_n en séries de fractions; Développements de $\frac{U_{(n+1)r}}{U_{nr}}$, $\frac{V_{(n+1)r}}{V_{nr}}$.

VII. Des relations des fonctions U_n et V_n avec la théorie de la divisibilité.
U_m est divisible par U_n quand m est divisible par n; de même pour V_m, V_n, à condition que m soit impair. U_n et V_n sont premiers entre eux.

VIII. Des formes linéaires et quadratiques des diviseurs de U_n et V_n qui correspondent aux valeurs paires et impaires de l'argument n.

IX. Des formules concernant l'addition des fonctions numériques.
Le produit de n termes consécutifs de la série U_n est divisible par le produit des n premiers termes.

X. De la somme des carrés des fonctions numériques U_n et V_n.

XI. Des relations des fonctions U_n et V_n avec la théorie du plus grand commun diviseur.
Le plus grand commun diviseur de U_m et de U_n est U_D, en désignant par D le plus grand commun diviseur entre m et n.

XII. De la multiplication des fonctions numériques.

XIII. De la loi de la répétition des nombres premiers dans les séries récurrentes simplement périodiques.
Si λ désigne le plus grand exposant d'un nombre premier p contenu dans U, l'exposant de la plus haute puissance de p qui divise U_{pn} est égal à $\lambda + 1$.

XIV. Nouvelles formes linéaires et quadratiques des diviseurs de U_n et de V_n.

XV. Des relations des fonctions U_n et V_n avec les radicaux continus.

XVI. Développements des puissances de U_n et de V_n en fonctions linéaires des termes dont les arguments sont des multiples de n.

XVII. Autres formules concernant le développement des fonctions numériques U_n et V_n.

XVIII. Développements en séries des irrationnelles et de leurs logarithmes népériens.

XIX. Sur le calcul rapide des fractions continues périodiques.

XX. Des relations des fonctions U_n et V_n avec la théorie de l'équation binôme.
p désignant un nombre premier, le quotient $4\frac{U_{qr}}{U_r}$ peut se mettre sous la forme

$$Y^2 - pZ^2 \quad \text{ou} \quad \Delta Y^2 + pZ^2$$

suivant que l'on a

$$p \equiv \pm 1 \pmod 4).$$

XXI. Sur les congruences du triangle arithmétique de Pascal et sur une généralisation du théorème de Fermat.

XXII. Sur la théorie des nombres premiers dans leurs rapports avec les progressions arithmétiques.

XXIII. Sur la théorie des nombres premiers dans leurs rapports avec les progressions géométriques.

XXIV. De l'apparition des nombres premiers dans les séries récurrentes de première espèce.

En désignant par $\varphi(m)$ le nombre des nombres premiers inférieurs à m, on a

$$U_{\varphi(m)} \equiv 0 \pmod{m}.$$

Si l'on appelle *diviseurs propres de* U_m les facteurs premiers de U_m qui ne divisent pas les fonctions d'indice moindre, on a les propositions suivantes :

Les diviseurs impropres des termes U_n *sont des diviseurs propres des termes dont le rang est un diviseur de n.*

Les diviseurs propres des termes U_n *des fonctions périodiques de première espèce appartiennent à la forme* $2kn+1$; *enfin ces diviseurs appartiennent aux diviseurs de la forme quadratique* $x^2 \pm py^2$.

Ces propositions permettent de déterminer les diviseurs des fonctions numériques de première espèce.

XXV. De l'apparition des nombres premiers dans les séries récurrentes de seconde et de troisième espèce.

Si le nombre premier p divise Δ, il divise aussi le terme U_p d'une série de seconde espèce.

Suivant que l'on a $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = \pm 1$, le nombre premier p divise le terme $U_{p\pm 1}$ d'une série de seconde ou de troisième espèce; dans les mêmes conditions et si l'on a affaire à une série de seconde espèce, les diviseurs propres de U_ω sont de la forme

$$p = k\omega \pm 1.$$

XXVI. Sur la périodicité des fonctions numériques et sur la généralisation du *Canon arithmeticus*.

Si m désigne un nombre premier avec le produit des racines d'une équation du second degré à coefficients commensurables

$$m = p^\pi r^\rho s^\sigma \ldots;$$

si l'on désigne par Δ le discriminant de l'équation et si l'on fait

$$\Phi(m) = p^{\pi-1} r^{\rho-1} s^{\sigma-1} \ldots \left[p - \left(\frac{\Delta}{p}\right)\right]\left[r - \left(\frac{\Delta}{r}\right)\right]\left[s - \left(\frac{\Delta}{s}\right)\right] \cdots,$$

on a

$$U_{\Phi(m)} = 0 \pmod{m}.$$

XXVII. Sur l'inversion du théorème de Fermat et sur la vérification des grands nombres premiers.

Si, dans l'une des séries récurrentes U_n, le terme U_{p-1} est divisible par p, sans qu'aucun des termes de la série, dont le rang est un diviseur de $p-1$, le soit, le nombre p est premier; de même, si U_{p+1} est divisible par p sans qu'aucun des termes de la série, dont le rang est un diviseur de $p+1$, le soit, le module p est premier.

XXVIII. Sur la division géométrique de la circonférence en parties égales.

XXIX. Sur la vérification de l'assertion du P. Mersenne.

XXX. Sur la périodicité numérique des coefficients différentiels des fonctions rationnelles d'exponentielles.

Si l'on pose symboliquement

$$\frac{2}{e^x + e^{-x}} = e^{E^n x},$$

où, dans le développement du second membre, on remplace E^n par E_n, les nombres entiers E^n, dits eulériens par M. Sylvester, jouissent des propriétés suivantes :

Si p est un nombre premier, la somme des nombres eulériens, pris avec les signes alternés + et —, dont l'indice est plus petit que p, est divisible par p.

Les résidus des nombres eulériens, suivant un module premier quelconque, se reproduisent périodiquement dans le même ordre, comme les résidus des puissances des nombres entiers.

Eddy (H.). — L'arche élastique. (241-244).

Hill. — Recherches sur la théorie de la Lune. (245-260).

Halsted. — Bibliographie de l'hyperespace et de la Géométrie non euclidienne. (261-276; 384-385).

Titres des travaux, sur ces sujets, dus à Lobatchefsky, Gauss, Bolyai (W. et J.), Jacobi, Grassmann, Cayley, Sylvester, Riemann, Salmon, Baltzer, Hoüel, Beltrami, Battaglini, Helmholtz, Potocki, Darboux, Kronecker, Christoffel, Clifford, Lipschitz, Genocchi, Nöther, Betti, de Tilly, Becker, Schlaefli, Beez, Rosanes, Flye Sainte-Marie, Lie, Klein, Saleta, König, Jordan, Frischauf, Kober, Hoffmann, Freye, Cassani, Frahm, Lindemann, d'Ovidio, Stahl, Schering, Spitz, Halphen, Escherich, Spottiswoode, Lewes, Funcke, Zöllner, Frank, Günther, Réthy, Frankland, Erdmann, Mehler, Cantor, Newcomb, Tannery (P.), Lüroth, Weissenborn, Agolini, Bouniakofsky, Schmitz-Dumont, Mouro, Young.

Mallet. — Quelques remarques sur un passage du Mémoire du professeur Sylvester sur la théorie atomique. (277-281).

Mallet. — Données historiques sur la découverte de la loi de *valence*. (282).

Hammond. — Description mécanique des ovales de Descartes. (283).

Dixon. — Nouvelle méthode pour la résolution des équations du quatrième degré. (283-284).

Kendall. — Sur un procédé rapide pour la résolution du cas irréductible de Cardan. (285-287).

Glashan. — Extension du théorème de Taylor. (287-288).

Démonstration de la formule

$$\begin{aligned} &f(x+a+b+c+e\ldots)\\ &\quad = f(x+b+c+e+\ldots)\\ &\quad + \int_0^a da\, f(x+c+e+\ldots)\\ &\quad + \int_0^a da \int_0^{a+b} d(a+b) f'(x+e+\ldots)\\ &\quad + \int_0^a da \int_0^{a+b} d(a+b) \int_0^{a+b+c} d(a+b+c) f''(x+\ldots)\\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Eddy. — Sur les deux méthodes réciproques générales de la Statique graphique. (289-335).

Après avoir donné quelques renseignements historiques sur le développement de la méthode de la Statique graphique, l'auteur fait remarquer que Poncelet, dans un travail inséré dans le *Mémorial de l'Officier du Génie*, n° 12, a fait poser les bases d'une seconde méthode fondamentale, aussi générale que celle du polygone des forces, et qui est, en quelque sorte, réciproque à cette dernière; c'est cette méthode que développe M. Eddy.

Lipschitz. — Démonstration d'un théorème fondamental obtenu par M. Sylvester. (336-340).

Voir le Mémoire de M. Sylvester contenu dans le tome 85 du *Journal de Borchardt*.

Sylvester. — Note sur le théorème contenu dans le Mémoire du professeur Lipschitz. (341-343).

Muir. — Lettre au professeur Sylvester sur le mot *continuant*. (344).

Frankland. — Extrait d'une Lettre à M. Sylvester. (345-349).

Clifford. — Application de l'Algèbre extensive de Grassmann. (350-358).

Craig (*T.*). — Mouvement d'un point à la surface d'un ellipsoïde. (359-364).

Le point est attiré par le centre proportionnellement à la distance.

Franklin. — Sur un problème d'isomérisme. (365-368).

Franklin. — Sur une forme exponentielle indéterminée. (368-369).

Sylvester. — Table synoptique des invariants et des covariants irréductibles d'un *quintic* binaire, avec une scholie sur un théorème relatif aux hyperdéterminants conditionnels. (370-378).

Holman et *Engler.* — La tangente à la parabole. (379-383).

Cayley. — Mécanisme pour la construction de x^2. (386).

Philipps (*W.*). — Mécanisme pour la construction de la lemniscate. (386).

Loudon (*J.*). — Équations d'Euler. (387-388).

CRÓNICA CIENTÍFICA, Revista internacional de Ciencias, publicada por D. Rafael Roig y Torres. Barcelona (1).

La *Crónica científica*, Revue internationale des sciences, dirigée par le savant don *Rafael Roig y Torres,* de Barcelone, a commencé, avec l'année 1881, sa quatrième année de publication. C'est à notre connaissance le seul recueil de ce genre qui se publie en Espagne.

La *Crónica científica* embrasse dans son cercle d'études non seulement les sciences mathématiques et astronomiques, mais aussi les sciences physiques et naturelles et leurs diverses applications à la médecine, à la pharmacie et à l'agriculture. Laissant de côté les travaux qui ne rentrent pas dans le domaine plus circonscrit du Bulletin, nous nous bornerons à regret à donner ici simplement la liste par noms d'auteurs des diverses questions mathématiques et astronomiques qui ont été traitées dans les vingt-quatre livraisons de la *Crónica científica* pendant le cours de l'année 1880.

(1) Paraissant deux fois par mois. Calle de Fontanella, núm. 28.

MATHÉMATIQUES.

A. Angot. — Nouvelles Tables pour calculer les hauteurs par le moyen des observations barométriques. (566).

D. Carrère. — Théorèmes relatifs à la décomposition des polynômes (300).

L. Clariana y Ricart. — Application des déterminants à la Trigonométrie. (201).

L. Clariana y Ricart. — Application des déterminants à la résolution des équations du quatrième degré. (425).

L. Clariana y Ricart. — Points ombilicaux de l'ellipsoïde. (521).

G. Eneström. — Lettres inédites de Bernoulli à Euler. (329-353-377).

Faye. — Variations séculaires de la figure mathématique de la Terre. (277).

Govi. — Détermination de la longitude du pendule simple. (365).

Landolt. — Nouveau télémètre. (173).

Landry. — Décomposition du nombre $2^{64}+1$. (366).

Leclerc et *de Bernardières.* — Différence de longitude entre Paris et Bonn (348).

Lefébure. — Sur l'équation $x^n+y^n=z^n$. (320).

Loewy et *Th. von Oppolzer.* — Différence de longitude entre Paris et Bregenz (123).

Marey. — Appareil pour étudier la marche. (397).

Marre (Aristide). — Deux règles de l'arithmétique des Hindous. (153-177).

É. Mathieu. — Intégrations relatives à l'équilibre de l'élasticité. (194).

C.-S. Peirce. — Valeur de la gravité (pesanteur) à Paris. 323).

F. Perrier. — Longitudes et latitudes terrestres en Af (495).

H. Resal. — Des diverses branches de la Cinématique, et pa lièrement de la Géométrie cinématique de M. Mannheim.

F. de Rocquigny. — Calcul de la somme des cubes de la naturelle des *n* premiers nombres entiers. (119).

ASTRONOMIE.

Abney. — Carte photographique de la portion infra-roug spectre solaire (99).

Airy et *Mouchez.* — Observations méridiennes des petites nètes. (275).

D'Apples. — Calcul abrégé de la hauteur du Soleil (358).

Barker. — Observation spectroscopique de l'éclipse de Sc (342).

Bell. — Application du photophone aux bruits qui se produi en la superficie solaire. (538).

Bigourdan. — Comète de Hartwig. (515).

Brésil (*S. M. l'Empereur du*). — Nouvelle comète. (124

Callandreau. — Opposition des petites planètes. (78).

Callandreau. — Planète 217. (538).

Chapelas. — Étoiles filantes observées les 9, 10 et (417).

Chase. — Planète intérieure à l'orbite de Mercure. (

Chase. — Position des principales planètes. (235).

Coggia. — Planète 217. (443).

Conche. — Photographie du spectre solaire. (192) -

Lamey. — Visibilité directe du réseau (?) photosphérique du Soleil. (22-100).

Landerer. — Géologie lunaire. (281-305).

Landerer. — Atmosphère des corps célestes. (473).

Landerer. — Appareil pour enregistrer le mouvement des astres. (542).

Meldola. — Apparition des rayons brillants dans le spectre solaire. (44).

Mouchez. — Observations méridiennes des petites planètes. (123).

Observatoire de Meudon. — (78).

Observatoire de Stelvio. — (79).

Observatoire de l'île de la Réunion. — (200).

Perry. — Courant d'étoiles filantes. (1).

Pickering. — Découverte atmosphérique. (531).

Rayet. — Position de la comète *b* de 1880. (276).

Schäberle. — Découverte d'une nouvelle comète. (221).

Schmidt. — Les queues des météores. (225).

Schulhof et *Bossert*. — Comète de Hartwig. (571).

Smith. — La grande météorite de Iowa. (242).

Stephan. — Comète de Schäberle. (242).

Swift. — Une grande comète. (543).

Tacchini. — Le Soleil durant le second semestre de 1879. (164).

Tacchini. — Le fer dans les pluies météoriques. (347).

Tacchini. — Diamètre apparent de Vesta. (347).

Tacchini. — Spectres fugitifs du limbe solaire. (367).

Tacchini. — Taches et facules solaires. (437).

Tacchini. — Le Soleil durant le premier semestre de 1880. (510).

Tempel. — La comète Faye. (496).

Thollon. — Tache du Soleil le 3 janvier. (76).

Thollon. — Taches et protubérances solaires. (134).

Thollon. — Observations sur un groupe de rayons du spectre. (416).

Thollon. — Protubérance solaire. (441).

Thollon. — Phénomènes solaires observés à Nice le 28 mai. (462).

Thompson. — La grande météorite de Iowa. (236).

Tisserand. — Satellites de Mars : *Phobos* et *Deimos*. (23).

Tisserand. — Éléments de l'orbite des astéroïdes. (376).

Turner. — Occultation de l'étoile 64 du Verseau par Jupiter. (137).

Werebrusoff. — Inégalités séculaires du grand axe dans le mouvement des planètes. (564).

Wolf. — Statistique des taches solaires durant l'année 1879. (122).

Young. — Variation des jours terrestres. (120).

Z..... — Les comètes dans le moyen âge. (28, 51, 147).

ARISTIDE MARRE.

FORHANDLINGER I VIDENSKABS-SELSKABET I CHRISTIANIA [1].

Année 1879.

Les Mémoires de cette année ne contiennent aucun article mathématique développé, mais seulement de courtes Communications de MM. Bjerknes et Lie.

Les intéressantes Communications de M. Bjerknes se rapportent aux forces de pression produites par le mouvement de sphères dans un fluide incompressible,

---

[1] Voir *Bulletin*, III_2, 166.

forces qui, dans certains cas, présentent une remarquable analogie avec les forces naturelles magnétiques et électriques. Toutefois les forces de pression dont il est question agissent toujours dans une direction opposée à celles des forces de la nature. En conséquence, les efforts faits depuis de longues années par M. Bjerknes, pour expliquer les forces de la nature par des pressions hydrodynamiques, sont restés jusqu'à présent sans résultat. Les résultats mathématiques trouvés par M. Bjerknes ont été vérifiés expérimentalement de la manière la plus frappante au moyen de quelques appareils construits par Schjötz et Svendsen.

Il serait à désirer que les recherches étendues de M. Bjerknes, qui, aux yeux de l'auteur de cet article, sont d'une valeur *mathématique* incontestable, ne tardassent pas à être communiquées *in extenso* au public mathématique.

Les Communications de M. Lie concernent les surfaces dont les courbes géodésiques permettent une infinité de transformations, les surfaces minima et les surfaces de courbure constante. Elles ont été développées, depuis, dans le Recueil norvégien *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.*

Année 1880.

Lie (*S.*) Résumé d'une théorie d'intégration. (1-4.)

Il existe une dépendance générale entre la théorie de l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre, à *une seule* fonction inconnue, et la théorie de l'intégration des équations simultanées aux différentielles partielles d'ordre supérieur, traitées par M. Darboux, qui ont une intégrale commune contenant une ou plusieurs fonctions arbitraires.

Exemple I. — Soient données deux équations du second ordre,

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \quad \Phi = 0,$$

possédant une intégrale générale avec une fonction arbitraire. Posons

$$\frac{\partial U}{\partial x} + p\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial p} r + \frac{\partial U}{\partial q} s = 0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} + q\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial p} s + \frac{\partial U}{\partial q} t = 0,$$

et formons, par l'élimination de r, s, t, une équation de la forme

$$\Omega\left(x, y, z, p, q, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}, \frac{\partial U}{\partial p}, \frac{\partial U}{\partial q}\right) = 0.$$

L'intégration du système $F = 0$, $\Phi = 0$ se réduit à l'intégration de $\Omega = 0$.

Exemple II. — Soient données *trois* équations,

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0,$$

entre

$$x, y, z, z_1, p, p_1, q, q_1,$$

et admettons l'existence d'une intégrale générale avec une fonction arbitraire.

Posons

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} p + \frac{\partial U}{\partial z_1} p_1 = 0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} q + \frac{\partial U}{\partial z_1} q_1 = 0,$$

et formons, par l'élimination de p, p_1, q, q_1, une relation de la forme

$$\Omega\left(x, y, z, z_1, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}, \frac{\partial U}{\partial z_1}\right) = 0.$$

L'intégration du système $f_k = 0$ se ramène à celle de $\Omega = 0$.

D'une manière analogue, l'intégration d'un système composé d'un nombre suffisant d'équations aux différentielles partielles du $n^{\text{ième}}$ ordre avec m variables indépendantes se ramène à l'intégration d'un système d'équations du premier ordre à une seule fonction inconnue. Cette dépendance remarquable ressort de la manière la plus frappante, lorsqu'on prend pour base la généralisation, due à l'auteur, de la notion de solution complète d'un système d'équations aux différentielles partielles du premier ordre.

Le reste du Volume ne contient plus d'articles mathématiques, si ce n'est de courtes Communications de M. Lie sur les surfaces de courbure constante, et de M. Bjerknes sur les analogies hydrodynamiques avec les actions magnétiques et électriques, ainsi qu'une brève discussion entre MM. Bjerknes et Lie au sujet de la convenance des dénominations de *Hydromagnétisme* et de *Hydro-électricité,* introduites par M. Bjerknes.

S. L.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. GERONO et CH. BRISSE (¹). — 2ᵉ série.

Tomo XX; 1881, 1ᵉʳ semestre.

Henry (*C.*). — Sur le calcul des dérangements. (5-9).

Solution de ce problème, proposé par M. J. Bertrand : « Combien y a-t-il en tout de dérangements dans le Tableau des permutations des n premiers nombres ? »

Lucas (*É.*). — Sur la déformation du cache-pot. (9-11).

Considérations intéressantes sur les hyperboloïdes homofocaux à une nappe.

Kœnigs (*G.*). — Construction de la parabole osculatrice en un point d'une courbe. (11-12).

Cette construction s'appuie sur la longueur du rayon de courbure en un point d'une parabole.

(¹) Voir *Bulletin,* IV_1, 260.

L'objet de l'article est de donner une limite qui fasse intervenir le rang du terme négatif dont le coefficient est le plus grand en valeur absolue; c'est ce que ne font pas les règles de Maclaurin et de Lagrange.

Hunyady (*E.*). — Sur la détermination du cercle osculateur d'une courbe à double courbure. (53-55).

Emploi, dans le calcul, des déterminants.

Fauquembergue (*E.*). — Solution d'une question de licence : Faculté de Lille, novembre 1878. (55-57).

Lignes tracées sur une surface de révolution, et telles que le plan osculateur en chaque point comprenne la normale à la surface.

Barbarin (*P.*). — Solution d'une question d'Analyse proposée au Concours d'agrégation de 1878. (57-65).

Problème relatif à l'ellipsoïde. L'auteur, après l'avoir résolu par le calcul, en donne une solution géométrique fort simple.

Moret-Blanc. — Solution de la question proposée en 1879 pour le Concours d'admission à l'École Polytechnique. (65-73).

Sur une conique à centre.

Weill. — Théorèmes sur les normales à l'ellipse. (73-94, 110-112).

L'auteur démontre quatorze propositions relatives à l'ellipse ou à l'ellipsoïde. Plusieurs d'entre elles se rattachent à ses précédents travaux, fort intéressants, sur les triangles à la fois inscrits et circonscrits à deux coniques.

Correspondance. — M. E. Amigues : « A propos d'une méthode de transformation des figures, due à M. de Longchamps. » (94-95).

Publications récentes. — 1. Traité de Géométrie supérieure, par M. Chasles; 2e édition, Paris, 1880. — 2. Leçons sur la Géométrie, par M. A. Clebsch, traduites par A. Benoist; t. II, *Courbes algébriques en général et courbes du troisième ordre;* Paris, 1880. — 3. Éléments de calcul approximatif, par Ch. Ruchonnet; 3e édition; Paris, 1880. — 4. Exposition géométrique des propriétés générales des courbes, par Ch. Ruchonnet; 4e édition; Paris, 1880. — 5. Études géométriques et cinématiques; Note sur quelques questions de Géométrie et de Cinématique, et réponse aux réclamations de M. l'abbé Aoust, par E.-J. Habich; Lima, 1880. — 6. American Journal of Ma-

thematics; editor in chief J.-J. Sylvester; Vol. III, n° 2; Cambridge; 1880. — 7. Atti della R. Accademia dei Lincei, 1880-1881; Transunti, vol. V, fascicoli 1°, 2°, 3°; Roma, 1881. (95-96).

Question proposée : 1355. (96).

Biehler (Ch.). — Théorie des points singuliers dans les courbes algébriques. (97-110).

Suite de l'article antérieurement publié dans le même Recueil (voir *Bulletin* IV_2, 265); on y trouvera une discussion complète des diverses singularités possibles, fondée sur l'emploi uniforme de la méthode imaginée par l'auteur.

Picart (A.). — Surfaces applicables sur des surfaces de révolution. (113-120).

L'auteur reprend la question consistant dans la recherche des surfaces qu'on peut décomposer en carrés infiniment petits, par des lignes géodésiques et leurs trajectoires orthogonales. M. Haton de la Goupillière a démontré en 1867 que les seules surfaces jouissant de cette propriété sont les surfaces applicables sur des surfaces de révolution. C'est ce qui est de nouveau démontré dans le présent article, au moyen des principes les plus simples de la Géométrie des surfaces. Comme application, M. Picart recherche ensuite quelle est la surface de révolution sur laquelle peut s'appliquer la surface de la vis à filet carré.

Griess (J.). — Solution de la question proposée au Concours d'admission à l'École Normale en 1880. (120-127).

Problème relatif au paraboloïde hyperbolique.

Lez (H.). — Solution de la question proposée pour le Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1880. (127-131).

Propriétés d'un système d'hyperboles équilatères.

Cretin. — Sur l'équation de Hesse aux points d'inflexion. (131-132).

Application des identités d'Euler sur les fonctions homogènes.

Collin (J.). — Sur le théorème de Rolle. (132-133).

Démonstration s'appliquant exclusivement aux équations algébriques.

Lebon (E.). — Normale menée à une conique à centre d'un point de l'axe focal. (133-134).

Propriété de la perpendiculaire à l'axe, menée par le pied de la normale.

Concours général de 1880. — Mathématiques spéciales, Philoso-

phie, Mathématiques élémentaires, Rhétorique, Seconde, Troisième. Énoncés des compositions. (134-137).

Nécrologie. — Notice sommaire sur Giusto Bellavitis. (1803-1880), par *un abonné*. (137-139).

Correspondance. — Général Parmentier : « Sur l'origine du mot *algèbre*. » — D. Marchand : « Sur la somme des cinquièmes puissances des n premiers nombres entiers. » — H. Faure : « Sur un théorème de M. Weill, relatif à un polygone inscrit et circonscrit à deux circonférences. » — P. Mansion : « Sur un théorème que M. Weill lui attribue par erreur. » — M. Rocchetti : Sur les questions 1340 et 1353. (139-143).

Questions proposées : 1359 à 1361. (144).

Picart (*A.*). — Nouvelle méthode d'intégration de l'équation différentielle des lignes de courbure de l'ellipsoïde. (145-149).

L'auteur essaye d'intégrer directement l'équation, sans passer par le détour d'une différentiation dont l'objet est d'éliminer les constantes.

Moret-Blanc. — Questions d'Analyse indéterminée proposées par M. Édouard Lucas. (150-160).

Solutions entières des équations suivantes :

$$\frac{x^5+y^5}{x+y}=z^2,$$

$$x^4-5x^2y^2+5y^4=z^2,\quad p^4+2p^3q+2p^2q^2-2pq^3+q^4=r^2,$$

$$p^4+p^3q+2p^2q^2-pq^3+q^4=r^2,\quad pq(p^2-q^2)+2(p^2+q^2)^2=r^2.$$

Weill. — Note sur la cardioïde et le limaçon de Pascal. (160-171).

Démonstration de vingt et un théorèmes sur les courbes du quatrième et du troisième degré.

Fauquembergue (*E.*). — Sur une question de licence. (171-173).

Cet article se rapporte à un passage de la *Nouvelle Correspondance mathématique* (novembre 1880) concernant un énoncé publié par les *Nouvelles Annales* (2e série, t. XX, p. 35).

Correspondance. — M. Desboves : « Au sujet des questions 1296 et 1324. (173-175).

Genese (*R.-W.*). — Solution de la question 1275. (175-177).

Théorème sur la Géométrie de la droite et du plan.

Realis (*S.*). — **Solution de la question 1313.** (177-178).

p étant la somme de n cubes entiers, faire que p^2q soit la somme algébrique de n cubes entiers.

Leinekugel (*A.*). — **Solution de la question 1342.** (178).

Propriété de deux normales menées d'un point à un paraboloïde.

Laudiero (*F.*). — **Solution de la question 1344.** (179).

Propriété de deux coniques.

Boudènes (*J.*). — **Solution de la question 1348.** (180-182).

Problème relatif à la parabole.

Delacourcelle (*J.-B.*). — **Solution de la question 1353.** (182-184).

Propriété du triangle.

Pecquery (*E.*) et *Chrétien* (*E.*). — **Solution de la question 1356.** (184-185).

Il y a trois cubiques passant par huit points donnés et tangentes à une droite menée par l'un de ces points.

Publications récentes. — 1. Leçons de Statique graphique, par A. Favaro, traduites par P. Terrier; Ire Partie : *Géométrie de position;* Paris, 1879. — 2. Cours de Calcul différentiel et intégral, par J.-A. Serret; 2e édition, 2 volumes; Paris, 1880. — 3. Traité d'Algèbre, par H. Laurent; 3e édition, 3 volumes; Paris, 1881. — 4. Introduction à la méthode des quaternions, par C.-A. Laisant; Paris, 1881. — 5. Annuaire pour l'an 1881, publié par le Bureau des Longitudes; Paris, 1881. — 6. Annuaire de l'Observatoire de Montsouris pour l'an 1881; Paris, 1881. — 7. Éléments d'Arithmétique, par J.-B.-V. Reynaud; Paris, 1879. — 8. Éléments de Géométrie, par A. Amiot; Paris, 1881. — 9. Traité de Géométrie descriptive, par E. Lebon; 1er volume et supplément; Paris, 1880 et 1881. — 10. Notions de Trigonométrie; Tours, 1879. — 11. Tirages à part; annonce de cinquante-huit brochures étrangères ou françaises, extraites pour la plupart de divers Recueils. (185-192).

Questions proposées : 1362 et 1363. (192).

Candèze. — Remarques sur le théorème de Sturm. (193-196).

Propriétés intéressantes de certaines fractions continues obtenues par les fonctions de Sturm.

D'Ocagne (*M.*). — Sur la construction de la normale dans un certain mode de génération des courbes planes. (197-200).

Note de Géométrie infinitésimale; on en déduit, comme cas particuliers, les théorèmes de Joachimsthal et certaines propositions sur les ovales de Descartes et les lemniscates.

D'Ocagne (*M.*). — Remarque sur le centre de composition d'un système de forces quelconques dans le plan. (201).

Addition à la Note : « Sur la composition des forces dans le plan. » Voir même Recueil, 2e série, t. XIX, p. 115 (mars 1880).

Moret-Blanc. — Questions d'Analyse indéterminée proposées par M. Édouard Lucas. (201-213).

Ces questions portent principalement sur l'Analyse indéterminée des troisième, quatrième et cinquième degrés. Parmi les plus simples d'entre elles, nous citerons les suivantes :

L'équation biquadratique $x^4 - 5y^4 = 1$ a pour unique solution entière $x = 3$, $y = 2$; l'équation $(x+1)^3 - x^3 = z^4$ est impossible en nombres entiers; trouver toutes les valeurs de x telles que la somme des cinquièmes puissances des x premiers nombres soit un carré parfait.

Henry (*C.*). — Sur un procédé particulier de division rapide. (213-215).

Cette Note est fondée sur des développements dignes de remarque, sous forme décimale, de fractions dont les dénominateurs se terminent par 9. Voir sur ce sujet un Mémoire de Cauchy (*Comptes rendus*, t. XI, p. 853; 1841).

Picart (*A.*). — Condition d'équilibre d'une masse fluide homogène ayant la forme d'un ellipsoïde à trois axes inégaux, et animée d'un mouvement uniforme de rotation autour de l'un de ces axes. (216-220).

L'auteur se propose d'établir par une voie plus élémentaire les équations de conditions découvertes par Jacobi et démontrées par M. Liouville (*Journal de l'École Polytechnique*, XXIIIe cahier).

Scholtz (Dr *A.*). — Résolution de l'équation du troisième degré. (220-224).

Emploi — un peu exagéré peut être pour une question de cette nature — des émanants, covariants, jacobiens, hessiens, discriminants d'une forme cubique.

Briot (*F.*). — Résolution de l'équation du quatrième degré. (225-227).

Calcul ingénieux, mais qui ne nous semble pas constituer une simplification des méthodes connues.

Escary. — Sur la résolution d'un système particulier de deux équations simultanées du degré m à deux inconnues. (227-229).

Solution très élégante du système $ax^m + by^m = \frac{a}{x^m} + \frac{b}{y^m} = c$ par la considération du triangle ayant pour côtés a, b, c, considération employée par M. Lannes, ainsi que le fait remarquer l'auteur du présent article.

Evesque. — Solution d'une question de licence : Faculté de Lille, novembre 1878. (229-231).

Lignes géodésiques d'une surface de révolution.

Fauquembergue (*F.*). — Problème de Mécanique. (231-235).

Équilibre d'une tige rigide pesante appuyée sur deux hémisphères creux. — Ce problème est extrait de la *Nouvelle Correspondance mathématique*.

Boudènes (*J.*). — Solution d'une question proposée au Concours d'admission à l'École Centrale ; première session, 1879. (235-238).

Sur un système d'hyperboles équilatères.

Concours d'admission a l'École Polytechnique en 1880. — Enoncés des compositions de Mathématiques et de Géométrie descriptive données à quelques élèves n'ayant pu concourir que tardivement. (238-240).

Correspondance. — M. E. Lebon : Remarque sur un article de lui (même Recueil, 1881, p. 133 ; voir ci-dessus). (240).

Jablonski (*E.*). — Note sur les limites et les nombres incommensurables. (241-250).

L'auteur s'est proposé de reprendre les principes mêmes de la théorie des limites, en généralisant le théorème fondamental, ce qui permet d'éviter des difficultés et des longueurs. Il fait ensuite diverses applications à la longueur d'une circonférence, à la définition d'un radical, et aux opérations sur les nombres incommensurables.

Baehr (*S.-F.-W.*). — Note sur une enveloppe. (250-252).

Enveloppe d'une droite qui joint les extrémités de deux aiguilles d'une montre, supposées de longueurs égales.

Moret-Blanc. — Questions nouvelles d'Arithmétique supérieure proposées par M. Édouard Lucas. (253-265).

Les questions que résout M. Moret-Blanc se rapportent notamment : aux derniers chiffres des termes de la série de Lamé 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8,.... ; — à la re-

cherche du plus grand commun diviseur entre deux termes de cette série; — à des séries récurrentes plus générales; — enfin à l'Analyse indéterminée et à la théorie des nombres premiers.

Correspondance. — M. Haillecourt : Au sujet du planimètre polaire. — M. Barbarin : Réponse aux observations de M. Haillecourt. — M. V. Jamet : Démonstration nouvelle de la propriété que présentent les quatre hauteurs d'un tétraèdre, d'être situées sur un même hyperboloïde. — M. Gambey : Sur un mode de description des courbes du second ordre. (265-275).

Hioux (*V*.). — Note relative à la question 1210. (276-279).

Enveloppe d'une sphère qui coupe orthogonalement une sphère fixe, et qui reste tangente à un système de trois diamètres conjugués d'une surface à centre du second ordre.

Geneix-Martin (*A*.). — Solution de la question 329. (280-281).

Sur une progression géométrique de quatre termes.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1308. (281).

Sur la cinématique du plan.

Aignan (*A*.). — Solution de la question 1357. (282-288).

L'énoncé de la question 1357 est celui-ci : ABC étant un triangle donné, on joint ces sommets à un point O de son plan par des lignes droites qui déterminent sur les côtés du triangle six segments; trouver le lieu du point O pour lequel le produit de trois segments non consécutifs est constant.

A. L.

MATHEMATISCHE ANNALEN, begründet von A. Clebsch und C. Neumann, gegenwärtig herausgegeben von F. Klein und A. Mayer (¹)

Tome XV; 1879.

Cantor (*G*.). — Sur les variétés de points infinis linéaires. (1-7).

L'auteur a déjà étudié (²) avec soin le concept des variétés de points infinies linéaires, et il a fait voir que ce concept est essentiel pour la démonstration de la représentation uniforme d'une fonction par une série trigonométrique. Depuis,

---

(¹) Voir *Bulletin*, VI_1, 214.
(²) *Mathem. Annalen*, V.

Dini (¹) et Harnack (²) ont développé encore plus loin ce concept, et ont démontré son importance pour les théorèmes fondamentaux du Calcul intégral. Dans le présent Mémoire, l'auteur montre d'abord que les variétés de points se divisent en *deux espèces*, à la première desquelles appartiennent toutes les variétés qui renferment un nombre *fini* de groupes de points dérivés. Ces variétés ne sont, dans aucun intervalle, *denses en tous points*. Par *dérivée* il faut entendre la *variété* de tous les points qui jouissent de la propriété d'un point-limite de P. Dans les multitudes de points de seconde espèce, le nombre des systèmes dérivés est *infini*.

L'auteur discute ensuite la division des variétés en *classes* de même puissance équivalentes. Ces variétés sont celles dont les éléments peuvent se correspondre chacun à chacun uniformément. Dans les multitudes linéaires de points, on peut, avant tout, distinguer deux classes : premièrement, la classe de ceux qui ont même puissance que la suite naturelle des nombres; à cette classe appartiennent toutes les multitudes de première espèce et aussi celles de la seconde, telles, par exemple, que la multitude composée de tous les points d'un intervalle dont les abscisses sont des nombres *rationnels;* en second lieu, la suite continue des points d'un intervalle. On démontre que ces classes ne peuvent pas être mises en correspondance l'une avec l'autre d'une manière uniforme.

Hurwitz (A.). — Sur les problèmes de Géométrie infiniment multiformes, et en particulier sur le problème de la fermeture. (8-15).

Le théorème, consistant en ce qu'une équation algébrique à une inconnue possède une infinité de racines dès qu'elle en admet plus qu'il n'y a d'unités dans son degré, conduit, dans les recherches géométriques sur la correspondance, à ce principe général :

Si entre les éléments d'une variété rationnelle d'une dimension il existe une correspondance (m, n), et si dans cette correspondance on peut signaler plus de m + n coïncidences, la correspondance aura une infinité d'éléments de cette nature, et ainsi chaque élément sera un élément de coïncidence.

A l'aide de ce principe, l'auteur démontre, de la manière la plus simple, les théorèmes connus de Steiner et de Poncelet sur les séries fermées de courbes tangentes, ainsi que d'autres théorèmes analogues à ceux-là.

Halphen. — Sur la théorie des caractéristiques pour les coniques. (16-38; fr.).

Aperçu des résultats que l'auteur a développés dans un Mémoire publié dans le *Journal de l'École Polytechnique,* 45ᵉ Cahier.

Bäcklund. — Sur la théorie des équations aux différentielles partielles du second ordre. (39-85).

Suite des recherches publiées par l'auteur, dans les *Mathem. Annalen,* t. XI

(¹) *Fundamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali.* Pisa, 1878.
(²) *Elemente der Differential- und Integralrechnung.* Leipzig, 1881.

et XIII, sur les équations aux différentielles partielles d'ordre supérieur qui possèdent deux ou plusieurs séries d'intégrales premières.

§ 1. Sur les systèmes d'équations aux différentielles partielles de l'espace de trois dimensions. — § 2. Sur les équations aux différentielles partielles du premier et du second ordre qui restent invariables après une transformation de contact infinitésimale. — § 3. Sur les relations qui peuvent avoir lieu entre les équations aux différentielles partielles du premier et du second ordre de l'espace de quatre dimensions. — § 4. Des équations aux différentielles partielles d'ordres supérieurs de l'espace de quatre dimensions. — § 5. Sur l'extension à l'espace de $n+1$ dimensions.

Klein (*F.*). — Sur les équations du multiplicateur ([1]). (86-88).

Si l'on désigne par g_2, g_3, Δ les invariants de l'intégrale elliptique donnée; par g'_2, g'_3, Δ' les invariants de l'intégrale transformée, on fait voir que, déjà pour $\sqrt[n]{\Delta'}$, dans une transformation du $n^{\text{ième}}$ ordre (n étant premier et > 3), on obtient des équations du $(n+1)^{\text{ième}}$ degré, dont les coefficients sont des fonctions entières de g_2, g_3, $\sqrt[n]{\Delta}$. Pour le calcul des coefficients de cette équation, l'auteur développe des règles générales. Pour $n = 5, 7, 13$, on obtient les mêmes équations que l'auteur avait indiquées précédemment ([2]). Pour $n = 11$, l'équation

$$z^{12} - 90.11.\sqrt[2]{\Delta}.z^6 + 40.11.12 g_2.\sqrt[3]{\Delta}.z^4 - 15.11.216 g_3 \sqrt[4]{\Delta}.z^3$$
$$+ 2.11.(12 g_2)^2 \sqrt[6]{\Delta}.z^2 - 12 g_2.216 g_3.\sqrt[12]{\Delta}.z - 11 = 0,$$

$\left(\text{pour } z = \sqrt[12]{\Delta'}\right)$ s'accorde avec certaines indications que M. Brioschi a déduites par une autre voie relativement à la forme de ces équations ([3]).

Noether (*M.*). — Sur les équations du huitième degré et leur rôle dans la théorie des courbes du quatrième degré. (89-110).

Dans ce Mémoire, l'auteur étudie d'abord certains systèmes de coniques qui se rencontrent dans l'étude des courbes du quatrième ordre, mais dont on ne s'était pas occupé jusqu'ici. On peut, en effet, partager les 28 tangentes doubles en sept groupes de quatre, de telle sorte que par les points de contact de chaque groupe de quatre passe une conique, ce qui fournit pour chaque décomposition un système correspondant de sept coniques. Maintenant, de ces systèmes septuples, 24.315 sont impropres, parce que dans ces systèmes *chacune* des coniques joue un rôle distinct; mais, outre cela, il existe 135 systèmes propres.

Pour traiter complètement les relations de ces derniers systèmes entre eux et avec les autres systèmes, il faut développer deux théories différentes, que l'auteur expose plus en détail qu'il ne serait immédiatement nécessaire, et cela en vue de les rendre susceptibles d'applications plus générales. Le mode habituel de notation des tangentes doubles, au moyen des couples de huit quantités, tels que ceux qu'emploient Hesse, Aronhold et Cayley, distingue ici un des 36 groupes de courbes de contact du troisième ordre des autres groupes. Cette notation a dû

([1]) *Rendiconti del R. Istituto Lombardo*, 2 janvier 1879.
([2]) *Math. Annalen*, t. XIV, p. 147 et suivantes.
([3]) *Annali di Matematica*, 2e série, t. IX, p. 172.

par conséquent être modifiée de façon qu'elle puisse s'employer commodément pour tous les passages à des systèmes quelconques.

De plus, la distinction de l'un des 36 groupes a pour conséquence que l'équation aux tangentes doubles se réduit à une surface du huitième degré, pour laquelle le système de coniques, si l'on en adjoint un, fournit une résolvante importante, savoir, une équation du septième degré dont les racines se rangent en groupes de trois. L'équation modulaire du huitième degré, qui correspond à la transformation du septième degré des fonctions elliptiques, et qui a été étudiée par Galois, Betti, Kronecker, Hermite, possède une résolvante du septième degré, avec un groupe de 168 substitutions. Mais la propriété la plus essentielle de cette équation spéciale, propriété qui n'a pas encore été énoncée, consiste encore dans le rangement dont nous venons de parler des racines en sept groupes de trois. De plus, Mathieu a traité les équations du huitième degré dont les racines sont rangées en couples de groupes de quatre; ces équations aussi possèdent la résolvante du septième degré, avec la propriété des groupes ternaires. Ces relations n'ayant pas encore été éclaircies, l'auteur les développe complètement. Il remarque à ce propos que les équations générales du septième degré, douées de la propriété de présenter des groupes ternaires, sont les mêmes que celles qui, d'après les nouvelles communications de F. Klein, peuvent se résoudre par les fonctions elliptiques (¹).

Hahn (J.). — Recherches sur les réseaux de coniques dont la forme jacobienne et la forme hermitienne s'évanouissent identiquement. (111-121).

Soient $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$, $c_x^2 = 0$ les équations, représentées symboliquement, de trois coniques; leur forme jacobienne sera

$$a_x b_x c_x (abc),$$

et leur forme hermitienne

$$(abu)(bcu)(cau).$$

L'objet du présent travail est de répondre à la question de savoir de quelle espèce sont les réseaux de coniques dont la forme, soit jacobienne, soit hermitienne, s'évanouit identiquement. L'auteur parvient aux résultats suivants :

1. Si la forme jacobienne seule s'évanouit identiquement, alors toutes les coniques du faisceau se décomposent en deux droites passant par un même point. La forme hermitienne est alors égale au cube d'une forme linéaire qui, égalée à zéro, représente l'équation du point double commun à toutes les coniques.

2. Si la forme hermitienne seule s'évanouit identiquement, alors toutes les coniques du réseau sont réductibles, et ont une droite commune dont le cube est représenté par la forme jacobienne.

3. Dans le cas seulement où les formes jacobienne et hermitienne s'évanouissent à la fois, le réseau de coniques se réduit à un faisceau.

Stolz (O.). — La multiplicité des points d'intersection de deux courbes algébriques. (122-160).

La multiplicité de tous les points d'intersection de deux courbes algébriques, d'ordres m et n, $F(x, y) = 0$, $G(x, y) = 0$, laquelle reste invariable par rapport

(¹) *Repertorium der Mathem. von Königsberger u. Zeuner*, t. II, p. 347.

aux transformations linéaires, est déterminée par l'*ordre* de la résolvante dont Clebsch a fait connaître la formation. Le même *ordre* fournit le produit des équations de tous les points d'intersection, chacun avec leur multiplicité respective. L'auteur, en se posant le problème d'obtenir immédiatement la multiplicité d'un point d'intersection (x_0, y_0) situé à distance finie, c'est-à-dire de l'obtenir sans le secours des transformations, au moyen des équations $F = 0$, $G = 0$, parvient à ce théorème : *Si l'on forme toutes les racines y_r de l'équation $F = 0$ qui, pour $\lim x = x_0$, se changent en y_0, et de même toutes les racines y'_s de l'équation $G = 0$ jouissant de la même propriété, et si l'on développe le produit $\prod_{r,s} (y_r - y_s)$ suivant les puissances ascendantes (entières) de $x - x_0$, l'exposant du premier terme de cette série indiquera le degré de multiplicité du point (x_0, y_0).* La démonstration de ce théorème s'obtient en étudiant la résultante des points d'intersection à distance finie, au point de vue de la multiplicité de ses facteurs, et l'on peut effectuer aussi directement le développement en série du produit. Cette recherche fournit l'occasion d'employer *les nombres caractéristiques* introduits par M. Halphen ([1]).

Au moyen de la résultante $X = \prod_{r,s} (y_r - y'_s)$ et de la résultante analogue $\prod_{r,s} (x_r - x_s)$, on peut encore obtenir, pour la multiplicité totale w de tous les points d'intersection à distance infinie, les relations suivantes. Si F et G sont respectivement des degrés $m - \mu$, $n - \nu$ en x, et des degrés $m - \mu'$, $n - \nu'$ en y, la multiplicité des points d'intersection à l'infini situés sur la droite $X = 0$ sera donnée par l'expression

$$m_2 = \mu'\nu' + \lambda' + \delta',$$

où $\varepsilon + \lambda' = q'$ est le degré en x de la résultante X, ε la multiplicité totale des points d'intersection à distance finie; la quantité δ', qui est un nombre positif, est prise parmi les exposants du développement en série à la place considérée. On détermine de même le nombre analogue $m_1 = \mu\nu + \lambda + \delta$. Les nombres δ (et pareillement δ') s'évanouissent dans le cas, et dans ce cas seulement, où parmi les facteurs des plus hautes puissances de x dans F et G, le premier au moins atteint le degré μ, ou le dernier le degré ν en y. Si ω_1 est la multiplicité totale des points à l'infini, non situés sur $x = 0$ ni sur $y = 0$, on a alors

$$\omega = \omega_1 + m_1 + m_2 = \mu\nu + \mu'\nu' + \lambda + \lambda' + \delta + \delta' + \omega_1.$$

On a donc

$$\varepsilon = mn - \omega = (mn - \mu\nu - \mu'\nu') - \lambda - \lambda' - \delta - \delta' - \omega_1$$

Le nombre ε des intersections à distances finies peut ainsi être au plus égal à

$$(mn - \mu\nu - \mu'\nu') - \lambda - \lambda' - \omega_1.$$

L'auteur démontre alors les nombres de multiplicité relatifs aux équations incomplètes, et en même temps il rectifie d'une part, et généralise de l'autre les relations données par Bézout (*Théorie générale des équations algébriques*, 1779, p. 139).

([1]) *Journal de Liouville*, 3e série, t. II, p. 89.

König (*J.*). — La décomposition en facteurs des fonctions entières, et les problèmes d'élimination qui s'y rattachent. (161-173).

Dans l'Introduction à ce Mémoire, l'auteur dit : « Les considérations que Gauss a employées dans la deuxième démonstration du théorème fondamental de l'Algèbre se composent de deux séries de conclusions essentiellement différentes quant à leur contenu. La première de ces séries peut être caractérisée comme une application du principe de l'élimination, que Gauss, comme il ressort de ce Mémoire, a bien connu et appliqué, mais n'a jamais énoncé généralement.

» A la suite de cela, on rencontre une idée ayant jusqu'à un certain point une existence indépendante, idée qui fournit à elle seule une méthode de résolution des équations algébriques et qui consiste à considérer l'équation $f(x) = 0$ comme coexistant avec l'équation $F(x, u) = 0$. Si l'on choisit maintenant convenablement la forme de F, de telle sorte que l'équation résultante en u puisse être résolue, alors l'équation primitive se trouve ainsi décomposée en facteurs, et partant résolue.

» Dans la démonstration donnée par Gordan, dans le t. X des *Annalen*, du principe fondamental de l'Algèbre, la simplification essentielle consiste précisément dans le choix convenable de $F(x, u)$, de telle sorte que le degré et toutes les autres propriétés de l'équation en u puissent être aperçus presque immédiatement, et l'on obtient par là une démonstration algébrique du théorème en question, d'une clarté et d'une brièveté qu'il serait difficile de dépasser.

» Malgré cela, il n'est peut-être pas sans intérêt de nous livrer ici à une étude sur l'autre idée fondamentale du Mémoire de Gauss. Là il est encore fait usage du principe de l'élimination en question, pour discuter complètement l'équation en u, plus compliquée par suite du choix de l'équation $F(x, u) = 0$. Or ce principe, considéré en général, contient la solution complète du problème de la décomposition en facteurs des fonctions entières, de sorte qu'ainsi la *demonstratio nova altera* fournit les matériaux pour deux démonstrations du principe fondamental complètement indépendantes entre elles, lesquelles sont de nature purement algébrique, l'une trouvant sa place naturelle dans la théorie des courbes, l'autre, au contraire, ayant la sienne dans la partie de l'Algèbre dont l'essence consiste dans l'emploi des méthodes combinatoires. »

Koenigsberger (*L.*). — Sur la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques et hyperelleptiques. (174-205).

Dans le Tome 86 du *Journal de Borchardt*, l'auteur a traité la question de savoir si l'on peut d'avance indiquer les propriétés caractéristiques des intégrales elliptiques auxquelles peuvent se réduire certaines intégrales abéliennes de la forme

$$\int f[x, \sqrt[m]{R(x)}]\, dx,$$

où f désigne une fonction rationnelle et R une fonction entière de x. Un des résultats trouvés dans ce Mémoire est énoncé, dans le présent travail, de la manière suivante :

Les intégrales de la forme

$$\int \psi(x)[\sqrt[m]{R(x)}]^r\, dx,$$

dans lesquelles r et n sont premiers entre eux, fournissent, comme seules formules possibles de réduction aux intégrales elliptiques, les formules

$$\int \psi(x)\left[\sqrt[3]{R(x)}\right]^r dx = \int \frac{dz}{\sqrt{z^3-1}},$$

$$\int \psi(x)\left[\sqrt[4]{R(x)}\right]^r dx = \int \frac{dz}{\sqrt{z^4-1}},$$

$$\int \psi(x)\left[\sqrt[6]{R(x)}\right]^r dx = \int \frac{dz}{\sqrt{z^6-1}},$$

dont la dernière, à cause de la transformabilité de l'intégrale elliptique du second membre, se confond avec la première.

L'auteur fait voir maintenant que les mêmes théorèmes absolument subsistent lorsqu'il s'agit en général de la réduction de formes semblables d'intégrales pour des équations algébriquement résolubles, c'est-à-dire d'intégrales de la forme

$$\int Q_\rho p^{\frac{\rho}{n}}\, dx,$$

Q_ρ et p étant des fonctions algébriques d'un ordre déterminé, et que l'on pose alors la question de savoir comment on peut représenter effectivement toutes les intégrales réductibles à la forme indiquée. On trouve d'abord, en supposant, pour plus de simplicité, dans la transcription des résultats, que Q_ρ et p désignent toujours des fonctions rationnelles, que si les deux fonctions $f(x)$ et $R(x)$ sont déterminées de manière que

$$\left[1-\overline{f(x)}^2 R(x)\right]\left[1-k^2\overline{f(x)}^2 R(x)\right] = \overline{F(x)}^2$$

soit une fonction rationnelle n'ayant que des facteurs doubles, *toutes* les intégrales hyperelliptiques de première espèce réductibles chacune à une seule intégrale elliptique s'obtiendront sous la forme

$$\int \frac{\frac{1}{2}f(x)R'(x)+f'(x)R(x)}{R(x)F(x)}\sqrt{R(x)}\, dx = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$
$$\left[z = f(x)\sqrt{R(x)}\right].$$

En ayant égard à la multiplication complexe des intégrales elliptiques, dont il s'agit, et en s'appuyant sur le théorème d'Abel, on trouve, de plus, si $f(x)$ et $R(x)$ sont choisis de telle manière que l'expression

$$\overline{f(x)}^3\, \overline{R(x)}^\rho - 1 = \overline{F(x)}^2$$

ne renferme que des facteurs doubles, qu'alors toutes les intégrales abéliennes de la forme demandée qui sont réductibles aux intégrales elliptiques seront contenues dans l'expression

$$\int \frac{\frac{\rho}{3}f(x)R'(x)+f'(x)R(x)}{R(x)\sqrt{\overline{f(x)}^3 R(x)^\rho - 1}}\left[\sqrt[3]{R(x)}\right]^\rho dx.$$

Par la substitution $z = f(x)\left[\sqrt[3]{R(x)}\right]^\rho$, elles seront ramenées à l'intégrale el-

liptique

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^3 - 1}}.$$

Pour la formule de réduction

$$\int \psi(x)\left[\sqrt[6]{R(x)}\right]^\rho dx = \int \frac{dz}{\sqrt{z^6 - 1}},$$

il n'y a rien de changé, si ce n'est que $f(x)$ et $R(x)$ doivent être déterminés de telle façon que

$$f(x)\left[\overline{f(x)}^3\,\overline{R(x)}^3 - 1\right]$$

soit un carré parfait.

Enfin, par une application répétée du théorème d'Abel, on conclut que, par la forme reconnue nécessaire de la formule de réduction

$$\int \psi(x)\left[\sqrt[4]{R(x)}\right]^\rho dx = \int \frac{dz}{\sqrt{z^4 - 1}},$$

on peut obtenir toutes les intégrales réductibles, si l'on pose

$$\psi(x) = \frac{\frac{\rho}{4} f(x) R'(x) + f'(x) R(x)}{R(x) F(x)},$$

la fonction rationnelle $f(x)$ et la fonction entière $R(x)$ devant être soumises à la condition que

$$\overline{f(x)}^4\, R(x)^\rho - 1$$

soit le carré d'une fonction rationnelle $F(x)$.

L'auteur traite encore, de plus, la question de la réduction des intégrales abéliennes contenues dans la forme précédente aux intégrales *hyperelliptiques*, et il caractérise l'équation à laquelle doit satisfaire le multiplicateur complexe des intégrales hyperelliptiques obtenues. Il étudie ensuite l'équation de réduction

$$\int \psi(x)\left[\sqrt[2p+1]{R(x)}\right]^r dx$$
$$= \int \frac{f(z_1)\,dz_1}{\sqrt{z_1^{2p+2} - 1}} + \int \frac{f(z_2)\,dz_2}{\sqrt{z_2^{2p+1} - 1}} + \dots + \int \frac{f(z_p)\,dz_p}{\sqrt{z_p^{2p+1} - 1}},$$

dans laquelle, comme il résulte des théorèmes généraux de la théorie de la transformation des intégrales abéliennes, les quantités $z_1, z_2, \dots, z_p$ représentent les solutions de l'équation du $p^{\text{ième}}$ degré

$$z^p + f_1\left\{x, \left[\sqrt[2p+1]{R(x)}\right]^r\right\} z^{p-1} + \dots + f_p\left\{x, \left[\sqrt[2p+1]{R(x)}\right]^r\right\} = 0,$$

où $f_1, f_2, \dots, f_p$ sont des fonctions rationnelles formées avec les quantités qui y sont contenues, et où les irrationnalités contenues dans les quantités z sont déterminées par une expression de la forme

$$\sqrt{z_\rho^{2p+1} - 1} = F\left\{z_\rho, x, \left[\sqrt[2p+1]{R(x)}\right]^r\right\}.$$

On peut maintenant, en faisant parcourir à la variable x des contours fermés

ramener l'équation précédente à une autre de la forme

$$(2p+1)\int \psi(x)\left[\sqrt[2p+1]{R(x)}\right]^r dx = \sum_0^{p-1}{}_k A_k \sum_0^{2p}{}_s \alpha^{-s} \sum_1^{p}{}_\rho \int \frac{z_{\rho s}^k\, dz_{\rho s}}{\sqrt{z_{\rho s}^{2p+1}-1}},$$

en posant

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z_2 + \ldots + A_{p-1} z^{p-1}.$$

Au moyen de la substitution

$$z_{\rho s} = \alpha^{m_s} t_{\rho s},$$

α étant une des racines $(2p+1)^{\text{ièmes}}$ primitives de l'unité, et m_s satisfaisant à la congruence

$$m_s(k+1) \equiv s \mod (2p+1),$$

une telle somme se ramène à la forme

$$\sum_0^{2p}{}_s \sum_1^{p}{}_\rho \int \frac{t_{\rho s}^k\, dt_{\rho s}}{\sqrt{t_{\rho s}^{2p+1}-1}},$$

et on la traite d'après le théorème d'Abel, en cherchant à déterminer la forme des coefficients indéterminés du théorème d'Abel. Le résultat s'énonce ainsi : L'équation

$$\sum_0^{2p}{}_s \sum_0^{p}{}_\rho \int \frac{t_{\rho s}^k\, dt_{\rho s}}{\sqrt{t_{\rho s}^{2p+1}-1}} = \int \frac{z_1^k\, dz_1}{\sqrt{z_1^{2p+1}-1}} + \cdots + \int \frac{z_p^k\, dz_p}{\sqrt{z_p^{2p+2}-1}}$$

est de telle nature que, si l'on pose

$$Z_\rho = W_\rho y^\lambda,$$

où l'on a

$$y = \left[\sqrt[2p+1]{R(x)}\right]^r, \quad \text{et} \quad \lambda(k+1) \equiv 1, \quad \text{mod } (2p+1),$$

les quantités

$$W_1,\ W_2,\ \ldots,\ W_p,$$

étant les solutions d'une équation

$$W^p + \mathfrak{M}_1 W^{p-1} + \mathfrak{M}_2 W^{p-2} + \ldots + \mathfrak{M}_{p-1} W + \mathfrak{M}_p = 0,$$

dont les coefficients sont composés rationnellement en x, tandis que les irrationnalités

$$\sqrt{W_\rho^{2p+1} y^{\lambda(2p+1)} - 1} = \sqrt{W_\rho^{2p+1}\, \overline{R(x)}^{r'} - 1}$$

peuvent se représenter comme des fonctions rationnelles de W_ρ, dont les coefficients sont eux-mêmes composés rationnellement en x. Dans les formules ci-dessus sont contenues toutes les relations que fournissent les transformations de cette espèce.

Ainsi la résolution du problème pour les intégrales hyperelliptiques du premier ordre se trouve complètement achevée. Comment, pour les intégrales hyperelliptiques d'ordre supérieur, faut-il établir les équations de condition? C'est

ce que l'auteur a montré dans un travail publié postérieurement (*Journal de Borchardt*, t. 87) ([1]).

Le Paige (*C.*). — Sur une propriété des formes algébriques préparées. (206-210; fr.).

Démonstration de ce théorème : *Deux substitutions transposées, opérées sur les variables d'une fonction préparée, induisent deux substitutions transposées sur les coefficients.*

Krey (*H.*). — Sur les tangentes singulières des surfaces algébriques. (211-237).

Au moyen des méthodes de la *Géométrie numérique* (principe de correspondance) développées par M. Schubert, l'auteur détermine une longue série de nombres relatifs aux tangentes singulières des surfaces algébriques. Les surfaces elles-mêmes, dans cette étude, ne sont pas toutes supposées des surfaces *générales* en coordonnées de points, mais peuvent posséder les singularités ordinaires. Dans le système de notations de l'auteur, les résultats les plus importants de son étude peuvent s'énoncer comme il suit :

Soit T^r une droite tangente r-uple qui touche la surface en r points, tandis que T_μ désigne une tangente rencontrant la surface en μ points consécutifs (tangente μ-ponctuelle). L'auteur détermine les nombres suivants :

(T^3), c'est-à-dire l'ordre de la surface réglée formée par les tangentes triples;

(T^4), ou le nombre des tangentes quadruples;

(T_4), ou l'ordre de la surface réglée formée par les tangentes quadriponctuelles;

(T_5), ou le nombre des tangentes quintiponctuelles.

Mais, outre ces nombres, le calcul fournit une série de nombres, correspondant à des conditions mixtes, tels, en particulier, que ($T_3 T$), qui donne l'ordre de la surface réglée formée des tangentes principales qui sont tangentes encore une fois de plus; de même, ($T_3 T^2$), ($T_4 T$), (T_3^2).

Cayley (*A.*). — Sur la correspondance des homographies et des rotations. (238-240; angl.).

Brioschi (*F.*). — Sur l'équation modulaire du huitième degré de Jacobi. (241-250).

Klein (*F.*). — Sur la résolution de certaines équations du septième et du huitième degré. (251-282).

Ce travail forme la continuation des recherches de l'auteur sur la transformation du septième ordre des fonctions elliptiques ([2]), et a pour objet de montrer comment la résolution de ces équations du septième et du huitième degré, qui ont le groupe des équations modulaires, peut se ramener à la résolution des équations modulaires elles-mêmes. Les recherches de l'auteur sont en même

---

([1]) *Repertorium der Mathematik von Königsberger und Zeuner*, t. II.

([2]) *Bulletin*, III_1, 408.

temps un programme pour la manière de traiter *toutes* les équations d'affect quelconque, programme qui comprend à la fois la résolution des équations cycliques par les radicaux, ainsi que la théorie de Kronecker et Brioschi des équations du cinquième degré.

La méthode de résolution des équations du septième degré à 168 substitutions peut s'exprimer comme il suit.

En employant les notations précédemment introduites ([1]), on obtient le système des 168 substitutions linéaires ternaires par la répétition et la combinaison des opérations suivantes :

$$(1)\qquad \lambda' = \gamma\lambda,\quad \mu' = \gamma^4\mu,\quad \nu' = \gamma^2\nu,\quad \left(\gamma = e^{\frac{2i\pi}{7}}\right),$$

$$(2)\qquad \lambda' = \mu,\quad \mu' = \nu,\quad \nu' = \lambda,$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \sqrt{-7}.\lambda' &= (\gamma^5-\gamma^2)\lambda + (\gamma^3-\gamma^4)\mu + (\gamma^6-\gamma\ )\nu,\\ \sqrt{-7}.\mu' &= (\gamma^3-\gamma^4)\lambda + (\gamma^6-\gamma\ )\mu + (\gamma^5-\gamma^2)\nu,\\ \sqrt{-7}.\nu' &= (\gamma^6-\gamma\ )\lambda + (\gamma^5-\gamma^2)\mu + (\gamma^3-\gamma^4)\nu. \end{aligned}\right.$$

Ici les quatre fonctions f, ∇, C, K restent invariables, et l'équation modulaire peut être remplacée par le système d'équations

$$f = 0,\quad -\frac{C^3}{1728\,\nabla^7} = J.$$

Soient maintenant $x_0, x_1, \ldots, x_6$ les sept racines d'une équation du septième degré à 168 substitutions. Alors la première chose à faire est de former trois fonctions rationnelles λ, μ, ν des x, qui, dans les 168 permutations des x, éprouvent les substitutions ternaires linéaires indiquées. Ce résultat peut s'obtenir, par les procédés de la théorie des invariants, d'un grand nombre de manières différentes.

Soient, par exemple, X, X′, X″ trois fonctions rationnelles quelconques de x, qui, pour $x = x_0, x_1, \ldots, x_6$, prennent les valeurs $X_0, X_1, \ldots, X_6, \ldots$. En désignant toujours par γ une racine septième de l'unité, posons, pour abréger,

$$\Sigma\gamma^\nu X_\nu = p_1,\qquad \Sigma^{4\nu} X_\nu = p_4,$$

$$\frac{-1+\sqrt{-7}}{4}\Sigma\gamma^{6\nu}X_\nu = p_6,\qquad \frac{-1+\sqrt{-7}}{4}\Sigma\gamma^{3\nu}X_\nu = p_3,$$

$$\Sigma\gamma^{2\nu}X_\nu = p_2,\qquad \frac{-1+\sqrt{-7}}{4}\Sigma\gamma^{5\nu}X_\nu = p_5,$$

et de même $\Sigma\gamma^\nu X'_\nu = p'_1, \ldots$. Enfin, à la place du déterminant

$$\begin{vmatrix} p_i & p_k & p_l \\ p'_i & p'_k & p'_l \\ p''_i & p''_k & p''_l \end{vmatrix},$$

écrivons simplement (i, k, l). Alors il y a trois fonctions jouissant de la propriété

([1]) *Math. Ann.*, t. XIV, p. 444.

cherchée et données par les équations

$$\lambda = (4, 3, 5) + (1, 6, 5) + (4, 2, 6),$$
$$\mu = (2, 5, 6) + (4, 3, 6) + (2, 1, 3),$$
$$\nu = (1, 6, 3) + (2, 5, 3) + (1, 4, 5).$$

Si l'on calcule maintenant, pour ces fonctions λ, μ, ν, les formes f, ∇, C, K, il en résultera des expressions qui ne changeront pas par les 168 permutations des x et qui sont ainsi connues rationnellement. La résolution de l'équation du septième degré en x est ramenée, d'après cela, au *problème des* λ, μ, ν, savoir : des valeurs connues de f, ∇, C, K tirer celles de λ, μ, ν. Maintenant, si l'on considère les rapports des quantités λ, μ, ν, l'équation modulaire, sous la forme indiquée plus haut, est un cas particulier de ce problème. La question est maintenant de ramener le problème général des λ, μ, ν à ce cas particulier. On y parvient à l'aide d'une équation du quatrième degré, qu'il est impossible d'éviter, comme on peut le montrer par les propriétés de la courbe $f = 0$. Soient λ', μ', ν' les inconnues du problème particulier ; f', ∇',... les valeurs que prennent f, ∇,.... Écrivons les équations suivantes :

$$f = 0, \quad \lambda'\lambda.\mu'\mu.\nu'\nu = 0, \quad \frac{-C'}{1728\,\nabla'_{\tau}} = J.$$

L'élimination de $\lambda' : \mu' : \nu'$ donne alors pour J une équation du quatrième degré dont les coefficients sont des fonctions entières de f, ∇, C, K, c'est-à-dire, sont des quantités connues, que l'on peut déterminer *a priori*. Il suffit de déterminer *une seule* des racines de l'équation du quatrième degré : soit J_1 cette racine. On a alors l'équation modulaire

$$f = 0, \quad \frac{-C'^3}{1728\,\nabla'^7} = J_1,$$

et, après l'avoir résolue, on obtiendra les λ, μ, ν du problème primitif, et par suite les $x_0, x_1, \ldots, x_6$ de l'équation proposée du septième degré, par des calculs rationnels (¹).

Du Bois-Reymond (P.).— Éclaircissements sur les premiers principes du Calcul des variations. (283-314, 564-576).

Le premier Mémoire contient la discussion de la démonstration du théorème que la corde est la ligne la plus courte entre ses extrémités. La notion de la rectificabilité est une restriction nécessaire. Dans la méthode ordinaire de démonstration, au contraire, on se restreint sans nécessité à la considération de fonctions qui sont continues en même temps que leurs dérivées du premier *et du second ordre*. L'auteur montre comment, à l'aide de l'intégration par parties, on peut effectuer la démonstration dans la seule supposition de la continuité de la dérivée première.

Le second Mémoire traite du problème général du Calcul des variations. La méthode de Lagrange, qui exige, pour la détermination du minimum ou du maximum d'une intégrale $V(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\,dx$, la continuité des $2n$ premières dérivées, est modifiée de telle façon qu'on n'a plus besoin de la continuité des $n-1$ premières dérivées et de l'intégrabilité de la $n^{\text{ième}}$.

(¹) *Repert. d. Math. u. Phys.*, Bd. 2, p. 400.

Rohn (*K.*).— Transformation des fonctions hyperelliptiques $p = 2$ et son rôle dans la surface de Kummer. (315-354).

Voir *Bulletin*, V_1, 327.

Voss (*A.*). — Sur la théorie des connexes linéaires. (355-358).

Démonstration de ce théorème de Clebsch :

Dans toutes les collinéations dans lesquelles les points correspondant à cinq points donnés sont situés sur cinq droites données, il existe toujours un sixième point dont les points correspondants sont tous situés sur une droite, et ce sixième point et cette droite peuvent se construire linéairement, au moyen de ce théorème général :

Dans une série (Schaar) *linéaire de connexes linéaires quadruplement infinie, il se trouve six connexes spéciaux.*

Halphen (*G.-H.*). — Recherches sur les courbes planes du troisième degré. (359-379; fr.).

Désignons par la notation x_m des points en chacun desquels il existe des courbes du degré m, ayant avec la cubique des contacts de l'ordre $3m - 1$. Quand on emploie la représentation des courbes cubiques par les fonctions elliptiques, les points x_m sont ceux dont les arguments, multipliés par $3m$, reproduisent les périodes, si l'on a choisi l'argument de telle sorte qu'il soit nul pour un point d'inflexion.

Le covariant qui s'évanouit en chacun d'eux est un combinant pour le faisceau des cubiques qui ont neuf points d'inflexion communs.

Le lieu des points x pour le faisceau des cubiques se compose de 9 courbes distinctes quand m n'est pas divisible par 3; de 8 courbes distinctes quand m est un multiple de 3.

Si $m = 3^\alpha$, chacune des 8 courbes est du degré $3^{2\alpha-1}$.

Si $m = 3^\alpha \mu$, μ n'étant plus divisible par 3, et α pouvant être zéro, et que p, p', p'', ... désignent les facteurs premiers du nombre μ, distincts entre eux, chacune des 8 courbes (pour $\alpha \geqq 1$) ou des 9 courbes (pour $\alpha = 0$) est d'un degré égal à

$$3^{2\alpha-1}\mu^2\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{p'^2}\right)\left(1-\frac{1}{p''^2}\right)\cdots$$

Meissel. — Contribution à la Géométrie de la sphère. (380).

Markoff (*A.*). — Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. (381-406; fr.).

Sturm (*R.*). — Simplification du problème de la projectivité dans l'espace. (407-423).

L'auteur traite, avec des simplifications, au moyen des méthodes de la Géométrie des nombres, le problème suivant déjà résolu par lui (*Math. Annalen*, t. VI) :

Dans l'un des deux espaces considérés, on donne k points $A_1, A_2, \ldots, A_k$, *et l plans* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$, *et comme homologues à ces points et à ces plans, dans l'autre espace, k points* $B_1, B_2, \ldots, B_k$, *et l plans* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$. *Il s'agit maintenant de trouver des droites associées a, b, telles que le faisceau de plans* $a(A_1, A_2, \ldots, A_k)$, *et le système de points* $a(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l)$ *soient respectivement projectifs à* $b(B_1, B_2, \ldots, B_k)$ *et à* $b(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l)$.

Bachmann (*P.*). — Sur quelques intégrales définies. (424-431).

Schur (*F.*). — Recherches géométriques sur les complexes de rayon du premier et du second degré. (432-464).

Voir *Bulletin*, V_1.

Lie (*S.*). — Contributions à la théorie des surfaces minima. (465-506).

Voir *Bulletin*, IV_1, 340.

Noether (*M.*). — Sur les systèmes de points d'intersection d'une courbe algébrique avec des courbes non adjointes. (507-528).

Schubert (*H.*). — Description des dégénérescences des courbes gauches du troisième ordre. (529-532).

Klein (*F.*). — Sur les transformations du onzième ordre des fonctions elliptiques. (533-555).

Par des considérations empruntées à la théorie des fonctions, l'auteur est parvenu, pour la transformation du onzième ordre, aux résultats suivants :

I. *Établissement de la résolvante du* 660e *degré de Galois pour l'équation modulaire.* — Soumettons les cinq variables (1)

$$y_1, y_4, y_5, y_9, y_3$$

aux quinze équations qui se tirent des trois suivantes,

$$\begin{cases} 0 = y_4 y_5 y_9 y_3 - y_1^2 y_5 y_3 + y_1^2 y_4^2 + y_3^3 y_1, \\ 0 = y_1^2 y_5 y_9 - y_4^2 y_5 y_3 - y_3^2 y_1 y_9, \\ 0 = y_4^3 y_9 + y_9^3 y_5 + y_3^3 y_1, \end{cases}$$

par une permutation cyclique des y ; posons, d'autre part,

$$J = \frac{C^3}{\nabla^{11}};$$

(1) On a pris pour indices de ces variables les résidus quadratiques correspondants au module 11.

J étant l'invariant absolu $\frac{g_2^3}{\Delta}$ de l'intégrale elliptique, C étant une fonction du onzième degré des y, que nous définirons tout à l'heure avec plus de précision,

$$C = (y_1^{11} + y_4^{11} + y_5^{11} + y_9^{11} + y_3^{11}) + \ldots,$$

et Δ représentant la fonction suivante du troisième degré

$$\Delta = y_1^2 y_9 + y_4^2 y_3 + y_5^2 y_1 + y_9^2 y_4 + y_3^2 y_5.$$

Il existe alors 660 systèmes de solutions

$$y_1 : y_4 : y_5 : y_9 : y_3,$$

qui résultent d'un seul d'entre eux par la répétition et la combinaison des substitutions linéaires suivantes $\left(\rho = e^{\frac{2i\pi}{11}}\right)$:

$$(\mathrm{S}')\qquad y'_1 = \rho y_1,\quad y'_4 = \rho^4 y_4,\quad y'_5 = \rho^5 y_5,\quad y'_9 = \rho^9 y_9,\quad y'_3 = \rho^3 y_3;$$

$$(\mathrm{T})\qquad \left\{\begin{aligned}
\sqrt{-11}\,.\,y'_1 &= (\rho^9 - \rho^2)y_1 + (\rho^4 - \rho^7)y_4 + (\rho^3 - \rho^8)y_5 \\
&\quad + (\rho^5 - \rho^6)y_9 + (\rho^1 - \rho^{10})y_3,\\
\sqrt{-11}\,.\,y'_4 &= (\rho^4 - \rho^7)y_1 + (\rho^3 - \rho^8)y_4 + (\rho^5 - \rho^6)y_5 \\
&\quad + (\rho^1 - \rho^{10})y_9 + (\rho^9 - \rho^2)y_3,\\
\sqrt{-11}\,.\,y'_5 &= (\rho^3 - \rho^8)y_1 + (\rho^5 - \rho^6)y_4 + (\rho^1 - \rho^{10})y_5 \\
&\quad + (\rho^9 - \rho^2)y_9 + (\rho^4 - \rho^7)y_3,\\
\sqrt{-11}\,.\,y'_9 &= (\rho^5 - \rho^6)y_1 + (\rho^1 - \rho^{10})y_4 + (\rho^9 - \rho^2)y_5 \\
&\quad + (\rho^4 - \rho^7)y_9 + (\rho^3 - \rho^8)y_3,\\
\sqrt{-11}\,.\,y'_3 &= (\rho^1 - \rho^{10})y_1 + (\rho^9 - \rho^2)y_4 + (\rho^4 - \rho^7)y_5 \\
&\quad + (\rho^3 - \rho^8)y_9 + (\rho^5 - \rho^6)y_3,
\end{aligned}\right.$$

et le problème de calculer, pour une valeur donnée de J, *les systèmes correspondants des solutions y peut être considéré comme la résolvante de Galois de l'équation modulaire.*

La fonction déjà désignée par C est un multiple numérique de la somme des onzièmes puissances des 660 expressions qui, en vertu des substitutions en question, se présentent à la place de y_1, par exemple, savoir :

$$C = \frac{11}{124}(\Sigma y^{11}).$$

II. *Établissement de la résolvante du onzième degré.* — Il existe deux formes des plus simples de la résolvante du onzième degré. L'une d'elles est la

suivante :

$$J:(J-1):1=[\mathfrak{z}^2-3\mathfrak{z}+(5\pm\sqrt{-11})]\left(\mathfrak{z}^3+\mathfrak{z}^2-3.\frac{1\mp\sqrt{-11}}{2}\mathfrak{z}+\frac{7\pm\sqrt{-11}}{2}\right)^2$$
$$:\left[\mathfrak{z}^3+4\mathfrak{z}^2+\frac{7\pm 5\sqrt{-11}}{2}\mathfrak{z}+(4\pm 6\sqrt{-11})\right]$$
$$\times\left[\mathfrak{z}^4-2\mathfrak{z}^3+3.\frac{1\pm\sqrt{-11}}{2}\mathfrak{z}^2+(5\mp\sqrt{-11})\mathfrak{z}-3.\frac{5\mp\sqrt{-11}}{2}\right]^2$$
$$:1728;$$

on trouve pour l'autre

$$0=\xi^{11}-22\xi^8+11(9\pm 2\sqrt{-11})\xi^5-11.\frac{12g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}\xi^4\mp 88\sqrt{-11}.\xi^2$$
$$+11\,\frac{3\pm\sqrt{-11}}{2}\,\frac{12g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}-\frac{144g_2^2}{\sqrt[3]{\Delta^2}}.$$

On passe de l'une à l'autre en posant

$$\xi^3=\mathfrak{z}^2-3\mathfrak{z}+(3\pm\sqrt{-11}).$$

Au moyen des y que l'on vient de définir, les 11 valeurs de $\mathfrak{z}$, ainsi que celles de ξ, s'expriment comme il suit. On a, pour une valeur de $\mathfrak{z}$,

$$\nabla.\mathfrak{z}=(y_1^2+y_4^2+y_5^2+y_9^2+y_3^2)$$
$$-(1+\sqrt{-11})(y_1^2y_4+y_4^2y_5+y_5^2y_9+y_9^2y_3+y_3^2y_1)$$
$$+\frac{1\mp\sqrt{-11}}{2}(y_1^2y_5+y_4^2y_9+y_5^2y_3+y_9^2y_1+y_3^2y_4)$$
$$+3(y_1^2y_3+y_4^2y_1+y_5^2y_4+y_9^2y_5+y_3^2y_2)$$
$$-3(y_1y_4y_9+y_4y_5y_3+y_5y_9y_1+y_9y_3y_4+y_3y_1y_5)$$
$$-\frac{1\mp\sqrt{-11}}{2}(y_1y_4y_5+y_4y_5y_9+y_5y_9y_3+y_9y_3y_1+y_3y_1y_4),$$

et pour la valeur correspondante de ξ,

$$\nabla^{\frac{1}{3}}.\xi=(y_1^2+y_4^2+y_5^2+y_9^2+y_3^2)$$
$$-(y_1y_9+y_4y_3+y_5y_1+y_9y_4+y_3y_5$$
$$-\frac{1\pm\sqrt{-11}}{2}(y_1y_4+y_4y_5+y_5y_9+y_9y_3+y_3y_1),$$

et les dix autres valeurs de $\mathfrak{z}$ ou de ξ s'obtiennent en répétant dans les seconds membres des égalités précédentes la substitution que nous venons de désigner par S.

III. *Interprétation transcendante des equations ci-dessus.* — Par analogie avec l'équation de Jacobi du douzième degré, dont M. Klein a parlé récemment (*Math. Ann.*, t. XII), posons, en désignant par μ un facteur de

proportionnalité,

$$\mu A_0 = q^{\frac{11}{12}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} q^{33h^2+55h+22},$$

$$\mu A_1 = q^{\frac{1}{133}} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^h q^{33h^2+h} + \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} q^{33h^2+31h+14} \right],$$

$$\mu A_4 = q^{\frac{37}{132}} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^h q^{33h^2+13h+1} + \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} q^{33h^2+31h+7} \right],$$

$$\mu A_5 = q^{\frac{49}{132}} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^h q^{33h^2+37h+10} + \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} q^{33h^2+7h} \right],$$

$$\mu A_9 = q^{\frac{97}{132}} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+1} q^{33h^2+19h+2} + \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^h q^{33h^2+25h+4} \right],$$

$$\mu A_3 = q^{\frac{25}{132}} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^h q^{33h^2+49h+18} + \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^h q^{33h^2+61h+28} \right].$$

On a alors, pour déterminer les rapports des y, les relations

$$\frac{y_4}{y_5} = -\frac{A_0}{A_1}, \quad \frac{y_5}{y_9} = -\frac{A_0}{A_4}, \quad \frac{y_9}{y_3} = -\frac{A_0}{A_5}, \quad \frac{y_3}{y_9} = -\frac{A_0}{A_9}, \quad \frac{y_9}{y_4} = -\frac{A_0}{A_3}.$$

(*Repert. der Mathem. von Königsberger u. Zeuner*, t. XI.)

Stolz (*O.*). — Sur les limites des quotients. (556-559).

Voir *Bulletin*, IV_2, 216.

Harnack (*Ax.*). — Note sur la représentation algébrique au moyen de paramètres de la courbe d'intersection de deux surfaces du second ordre.

Voir *Bulletin*, IV_1, 39.

Ax. H.

AMERICAN JOURNAL OF MATHEMATICS PURE AND APPLIED, Editor in chief J.-J. SYLVESTER, Baltimore.

Tome II; 1879 [1].

Ladd (*Miss Christine*). — L'hexagramme de Pascal. (1-12).

Miss Ladd se propose de donner une notation nouvelle pour les lignes et les

---

[1] Voir *Bulletin*, V_2, 116.

points qui se présentent dans la théorie de l'hexagramme de Pascal. Elle expose brièvement, en partant de là, les recherches de M. Veronese sur ce sujet [*voir* Dewulf, *Sur l'hexagramme mystique* (*Bulletin*, I_2, p. 348)], et donne quelques propriétés nouvelles.

Burr (*William-H.*). — Sur la théorie de la flexion. (13-45).

Après avoir rappelé les différentes hypothèses faites successivement dans la théorie de la flexion, par Mariotte et Leibniz, Navier, Parent, l'auteur prend comme base de sa théorie les deux hypothèses suivantes : 1° le corps a une structure non cristalline; 2° les forces qui causent la flexion ne produisent point de compression en leurs points d'application. Si la première hypothèse nous semble bien acceptable, il ne nous paraît pas en être de même de la seconde.

Halsted (*Georges Bruce*). — Note sur le premier *Euclide* anglais. (46-48).

Quelques mots sur un manuscrit de la bibliothèque de Princeton, contenant en particulier une copie de la première édition des *Éléments* d'Euclide qui ait été publiée à Bâle, en 1533, chez Jean Hervagius, par Simon Grynæus. Ce manuscrit a appartenu à Henry Billingsley, et c'est sur cette copie que Billingsley aurait fait la première traduction en anglais des *Éléments* d'Euclide.

Gibbs (*J.-W.*). — Sur les formules fondamentales de la Dynamique. (49-64).

L'auteur arrive à des formules nouvelles pour les équations du mouvement, en substituant, dans les formules ordinaires, aux variations des coordonnées les variations des composantes de l'accélération.

Halsted (*G.-B.*). — Suppléments à la bibliographie de l'hyperespace (Géométrie à n dimensions) et de la Géométrie non euclidienne. (65-70).

Suite de la bibliographie commencée dans le vol. I, p. 261-276, 384-385.

Cayley (*A.*). — Calcul de la fonction génératrice numérique minima de la forme homogène, à deux variables du septième ordre. (71-84).

M. Cayley rectifie une erreur qu'il avait faite dans la détermination de cette fonction, publiée d'abord dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXVII; 1878, p. 505, et explique la méthode qu'il a suivie pour la calculer.

Sylvester (*J.-J.*). — Remarque sur le Mémoire précédent. (84).

M. Sylvester explique comment il avait trouvé la faute de M. Cayley.

Eddy (*Henry*). — Sur la déviation latérale des projectiles sphériques. (85-88).

Sylvester (*J.*). — Note sur les déterminants et les disynthèmes doubles. (89-96 et 214-222).

M. Sylvester traite dans cette Note différents problèmes : il calcule le nombre de termes distincts d'un déterminant symétrique; u_m étant le nombre des termes distincts obtenus dans le développement d'une matrice symétrique du même ordre, il démontre que l'on a

$$u_m = m u_{m-1} - \frac{(m-1)(m-2)}{2} u_{m-3},$$

ou bien, en posant

$$u_m = 1.2\ldots m.v_m$$

$$m v_m - m v_{m-1} + \frac{v_{m-3}}{2} = 0,$$

et on en déduit facilement que v_m est le coefficient de t_m dans le développement des

$$\frac{e^{\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}}}{\sqrt{1-t}},$$

fonction que l'on peut appeler *fonction génératrice*.

Pour le déterminant symétrique dont la diagonale n'est formée que de zéros, la fonction géneratrice est

$$y = \frac{e^{-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}}}{\sqrt{1-t}}.$$

Pour un déterminant quelconque,

$$y = \frac{1}{1-t},$$

et si le déterminant quelconque a une diagonale formée de zéros,

$$y = \frac{e^t}{1-t}.$$

Étude de la série ω,

$$1,\ 2,\ 8,\ 50,\ \ldots,$$

formée par les coefficients du développement

$$\frac{e^{\frac{t}{4}}}{\sqrt[4]{1-t}} = \omega_0 + \omega_1 \frac{t}{2} + \omega_2 \frac{t^2}{2.4} + \omega_3 \frac{t^3}{2.4.6},$$

coefficients qui représentent les nombres de termes distincts du déterminant gauche d'ordre h_n, divisés par les produits des nombres entiers pairs inférieurs à h_n.

Cayley (*A.*). — Desiderata et suggestions. (97).

Sur l'extension au cas des coefficients imaginaires et des racines imaginaires du théorème de Newton, complété par Fourier et relatif à la résolution par approximations successives de l'équation $f(x) = 0$. Dans quelle région du plan imaginaire l'application de la règle ...lle qu'on emploie pour les ra-

cines réelles d'une équation à coefficients réels conduira-t-elle à un procédé convergent?

Cayley (A.). — Sur le système complet des formes fondamentales (*Grundformen*) de la forme homogène à deux variables du neuvième ordre. (98-99).

Extrait d'une Lettre de *M. A. de Gasparis à M. Sylvester.* (99-100).

Sur certaines séries où les éléments, tels que le rayon vecteur, les anomalies excentrique et vraie, etc..., sont exprimés en fonction de l'anomalie moyenne donnée en parties du rayon, sans sinus ni cosinus.

Mc Clintock (Emory). — Essai sur le *Calcul d'extension* (Calculus of Enlargement). (101-161).

Ce Calcul est, à un certain point de vue, une extension du Calcul des différences finies; à un autre point de vue, une extension du Calcul des opérations. Il comprend comme branche la plus importante le Calcul différentiel et le Calcul des variations. L'objet de ce Mémoire est de donner une esquisse préliminaire de cette méthode et de prendre date pour sa découverte.

Craig (Thomas). — Le mouvement d'un solide dans un fluide. (162-177).

Exposé rapide des résultats obtenus jusqu'ici. La méthode symétrique de M. Craig lui permet d'arriver rapidement à des démonstrations très simples et aussi d'établir d'une façon élégante les formules générales du mouvement du corps et du liquide.

Lucas (Éd.). — Sur l'analyse indéterminée du troisième degré. Démonstration de plusieurs théorèmes de M. Sylvester. (178-185).

1° x, y, z étant des nombres entiers vérifiant l'équation

$$x^3+y^3=Az^3,$$

on a une autre solution au moyen des formules

$$X=x(x^3+2y^3),\quad Y=-y(y^3+2x^3),\quad Z=z(x^3-y^3),$$

ou encore

$$\frac{X}{x}+\frac{Y}{y}+\frac{Z}{z}=0,\quad Xx^2+Yy^2=AZz^2.$$

2° Soit l'équation

$$Ax^3+By^3+Cz^3+3Dxyz=0.$$

Si l'on a une première solution en nombres entiers (x, y, z), on en aura une

autre (X, Y, X) en posant

$$X = x(By^3 - Cz^3),$$
$$Y = y(Cz^3 - Ax^3),$$
$$Z = z(Ax^3 - By^3)$$

ou encore

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 0, \quad AXx^2 + BYy^2 + CZz^2 = 0.$$

M. Lucas s'occupe aussi de la question quand on donne deux solutions distinctes de l'équation.

3° Application de la théorie des cubiques à la théorie des nombres. Signification géométrique des propositions établies précédemment.

4° Démonstration d'un théorème de Sylvester. Si p et q désignent des nombres des formes respectives $18n + 5$ et $18n + 11$, il est impossible de décomposer en deux cubes, soit entiers, soit fractionnaires, aucun des nombres suivants:

$$p, \ 2p, \ 4p^2; \ 4q, \ q^2, \ 2q^2.$$

5° Pour que $X^3 + Y^3 = AZ^3$ soit vérifiée par des valeurs entières de X, Y, Z, A, il faut et il suffit que A appartienne à la forme

$$xy(x + y),$$

préalablement débarrassée des facteurs cubiques qu'elle peut contenir.

On a, par exemple, contrairement à ce que Legendre affirme, des solutions en nombres entiers pour $A = 6$,

$$17^3 + 37^3 = 6.21^3.$$

Cayley (A.). — Desiderata et suggestions. (186).

Est-il possible de fabriquer un appareil permettant de construire des figures semblables dans leurs parties infiniment petites ?

Franklin (F.). — Note sur la partition des nombres. (187).

Stringham (W.). — Quelques formules pour l'intégration des fractions irrationnelles. (188-190).

Burr (William). — Note sur la *Théorie de la flexion* (vol. II, p. 13 du même *Journal*).

Crofton. — Généralisation d'un théorème de Statique de Leibniz. (192).

Si un système de force est en équilibre, le centre de gravité des points d'application est le même que celui des extrémités des forces.

Kempe. — Sur le problème géographique des quatre couleurs. (193-201).

Story. — Note sur l'article précédent. (201-204).

M. Kempe s'occupe de la manière la plus convenable de disposer les couleurs

sur une carte géographique donnée, et M. Story se propose de démontrer rigoureusement un théorème de Géométrie de position qui s'était présenté dans les recherches de M. Kempe.

Stone (*Ormond*). — Sur la dynamique d'un projectile sphérique. (211-213).

Relevé d'une faute faite par M. Eddy dans son Mémoire *Sur la déviation latérale des projectiles sphériques.*

Sylvester (*J.*) et *Franklin* (*F.*). — Table des fonctions génératrices et des formes fondamentales pour les formes homogènes à deux variables des dix premiers ordres. (223).

Craig (*Th.*). — Note sur la projection du lieu général d'un espace à quatre dimensions, dans l'espace à trois dimensions. (252-259).

M. Craig se propose le problème de la représentation conforme (similitude dans les parties infiniment petites). Il résout aussi le problème dans le cas général d'un espace quelconque

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

dont on cherche la représentation conforme sur l'espace $0, \xi_1\, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$.

Craig (*Th.*).— Sur le mouvement d'un ellipsoïde dans un fluide. (261-279).

L'auteur traite le cas du mouvement d'un ellipsoïde dont la masse est symétrique par rapport aux trois plans principaux. Le mouvement a lieu dans un fluide incompressible, sans frottement. Le corps est soumis à l'action de forces instantanées; on demande le mouvement résultant du corps et celui du fluide.

Poisson s'était déjà occupé d'un problème de ce genre : le mouvement du pendule dans un gaz; mais, en réalité, l'idée de déterminer le mouvement d'un corps dans un fluide revient à Dirichlet, qui attaqua spécialement le cas du mouvement de la sphère (*Monatsberichte und Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin;* 1852). Après lui Clebsch, dans son Mémoire : *Ueber die Bewegung eines Ellipsoids in einer tropfbaren Flüssigkeit* (*Crelle's Journal,* t. 52 et 53), s'occupa du problème général et du cas particulier où le corps est un ellipsoïde. Il fut suivi dans cette voie par beaucoup d'autres :

Kirchoff, *Ueber die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit* (*Borchardt's Journal,* vol. 71). Il donne aux équations différentielles une forme très élégante, reprise plus tard par Clebsch (*Math. Ann.,* t III). Citons encore :

Ferrers, *The motion of an infinite mass of water about a moving ellipsoid* (*Quart. Journal,* n° 52; 1875).

Köpcke, *Zur Discussion der Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit* (*Math. Ann.*, vol. XII, p. 387).

Weber, *Anwendung der Thetafunctionen zweier Variabeln auf die Theorie*

der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit (*Math. Ann.*, vol. XIV, p. 173).

Hoppe (*Ann. de Poggendorff*, t. LXIII).

Thomson et Tait (*Natural Philosophy*).

M. Craig traite d'abord le cas particulier d'un mouvement parallèle à l'un des axes; puis, arrivant au cas général et employant les formules établies dans le même volume dans son Mémoire *Sur le mouvement d'un solide dans un fluide,* il démontre entre autres choses l'existence d'un ellipsoïde analogue à l'ellipsoïde de Poinsot dans la dynamique. M. Craig tire parti successivement de l'emploi des coordonnées elliptiques et des coordonnées générales de Lagrange.

Sylvester (*J.-J.*). — Sur certaines équations homogènes à trois variable du troisième degré. (280-281).

Chapitre I. — Sur la résolution des nombres en sommes ou en différence de deux cubes.

Section I. — p et q étant des nombres premiers des formes respectives $18n+5$ et $18n+11$, l'équation

$$x^3+y^3=Az^3$$

est irrésoluble en nombres entiers ou fractionnaires si A a une des formes

$$p,\ q,\ p^2,\ q^2,\ pq,\ p^2q^2,\ p_1p_1^2,\ q_1q_1^2,$$
$$9p,\ 9q,\ 9p^2,\ 9q^2,\ 9pq,\ 9p^2q^2,\ 9p_1p_1^2,\ 9q_1q_1^2,$$
$$2p,\ 4p,\ 4p^2,\ 2q^2.$$

De plus, on a les deux théorèmes suivants :

1° ρ, ψ, φ étant des nombres premiers des formes respectives $18n+1$, $18n+7$, $18n+13$, si ρ, ψ, φ ne sont pas de la forme f^2+27g^2, et, par suite, n'ont pas le résidu cubique 2, tous les nombres d'une des huit classes

$$2\rho,\ 4\rho,\ 2\rho^2,\ 4\rho^2,\ 2\psi,\ 4\psi^2,\ 4\varphi,\ 2\varphi^2$$

donnent aussi des nombres indécomposables en la somme de deux cubes.

2° Si 3 n'est pas résidu cubique par rapport à ν, 3ν et $3\nu^2$ donnent aussi des nombres indécomposables (sous certaines conditions cependant).

Ces théorèmes, seulement énoncés ici, sont suivis de quelques remarques complémentaires sur les travaux analogues de M. Lucas et du P. Pepin.

Petersen (*Julius*). — Démonstration nouvelle du théorème de réciprocité. (285-286).

Hall (*H.*). — Sur une action nouvelle du magnétisme sur les courants électriques. (287-292).

Sylvester (*J.-J.*) et *Franklin* (*F.*). — Table des fonctions génératrices et des formes fondamentales pour les formes homogènes à deux variables des quatre premiers ordres prises deux à deux. (293-306).

Mc Clintock (Emory). — Une nouvelle méthode générale d'interpolation. (307-311).

M. Mc Clintock se propose de donner une méthode d'interpolation plus facile à démontrer et aussi à employer que les méthodes en usage maintenant.

Ayant d'abord examiné la méthode de Lagrange, qui, en réalité, doit être attribuée à Euler, puis celle de Newton, il donne une nouvelle formule peu différente de la dernière, mais un peu plus symétrique.

Au lieu de poser, comme Newton,

$$\varphi_{m+1} x_n = \frac{\varphi_m x_n + \varphi_m x_{m+1}}{x_n - x_{n-m+1}},$$

il emploi la formule

$$\varphi_{m+1} x_n = \frac{\varphi_m x_n - \varphi_m x_{m+1}}{x_n - x_{m+1}}.$$

On a, dans les deux cas,

$$\varphi x = \varphi x_1 + (x - x_1)\varphi_1 x_2 + (x - x_1)(x - x_2)\varphi_2 x_3 + \ldots.$$

Mc Clintock (Emory). — Note sur la démonstration d'une certaine formule d'interpolation. (311-314).

Application du calcul d'extension à la démonstration de deux théorèmes de Newton et Stirling.

Chace. — Étude, au moyen des quaternions, d'une certaine classe de surfaces du troisième degré. (315-323).

Étude des surfaces que M. Chace appelle *cubiques à centre*, par suite de la forme de leur équation. Recherche du rayon de courbure de la section normale en un point d'une des surfaces et classification des différentes familles de surfaces qui se présentent.

Sylvester (J.-J.). — Remarques sur les Tables pour les formes homogènes à deux variables, publiées précédemment. (324-329).

Peirce. — Sur les raies du spectre de diffraction de Rutherfurd. (339-347).

Mc Clintock (E.). — Sur le développement des fonctions de fonctions. (348-353).

Application du calcul d'extension au développement de $\varphi[f(x)]$, où

$$f(x) = a + bx + \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2.3}dx^3 + \ldots.$$

Rowland (H.). — Notes préliminaires sur la découverte récente de M. Hall. (354-356).

Sylvester (J.-J.). — Sur certaines équations homogènes à trois variables du troisième degré. (357-393).

Sur les diviseurs des fonctions cyclotomiques :

1° Fonctions cyclotomiques de première espèce. Soit q nombre premier $p = mk + 1$, $x^k - 1$ est facteur de $x^{p-1} - 1$. Si $\chi_k(x)$ est le facteur de $x^k - 1$, qui contient toutes ses racines primitives. La fonction χ s'appelle fonction cyclotomique de première espèce, relativement à k.

2° Fonctions cyclotomiques de seconde espèce. Théorie des diviseurs de la fonction qui a pour racines les sommes de groupes à deux termes des racines primitives de $x^k - 1$, ou, en d'autres termes, toutes les valeurs distinctes de $2\cos\frac{\lambda\tau}{k}$, λ étant un nombre plus petit que $\frac{k}{2}$ est premier à λ. Cette fonction est la fonction cyclotomique de seconde espèce et de classe conjuguée à k.

3° Fonctions cyclotomiques d'espèce et de classe quelconques. Généralisation des théorèmes trouvés dans les paragraphes précédents. L'auteur termine son Étude de la cyclotomie par ces mots : « La cyclotomie me semble ne devoir pas être regardée comme une simple application, mais bien comme le centre naturel, la base fondamentale de l'Arithmétique de l'avenir. »

Remarques sur les diviseurs intrinsèques des fonctions cyclotomiques de première espèce.

Notes sur le premier article du Mémoire :

I. Sur le triangle rationnel inscrit et circonscrit à la cubique

$$x^3 + 3xy^2 - y^3 + 3z^3 = 0.$$

Contrairement à ce qui a été dit dans le premier Mémoire sur la correspondance entre la résolution en nombres entiers des équations

$$(1) \qquad x^3 - y^3 + Az^3 = 0,$$

$$(2) \qquad x^3 - 3xy^2 - y^3 + 3Az^3 = 0,$$

on a cependant, pour $A = 1$, les solutions suivantes de (2)

$$\begin{aligned} x:y:z &= 1:1:1 \\ &= -2:1:1 \\ &= 1:-2:1; \end{aligned}$$

mais ces points sont les sommets d'un triangle à la fois inscrit et circonscrit à la cubique. Ce sont les seuls points rationnels de cette courbe, et, quand on étudie la correspondance entre (1) et (2), on voit qu'aux trois points (3) correspondent sur la cubique (1) des points pour lesquels $x = 0$ ou $y = 0$.

Sur les triangles et les polygones à la fois inscrits et circonscrits à une cubique quelconque.

Note sur la même question, d'après M. F. Franklin.

Note sur la condition pour que 2 et 3 soient résidus cubiques par rapport à un nombre premier de la forme $6i + 1$.

II. Sur certains nombres et certaines classes de nombres non décomposables en la somme ou différence de deux cubes rationnels.

Si A est un des nombres 1, 2, 3, 4, 18, 36, ou un nombre de la forme

$$\begin{array}{llll} p, & q, & p^2, & q^2, \\ 9p, & 9q, & 9p^2, & 9q^2, \\ 2p, & 4q, & 4p^2, & 2q^2, \\ pq, & p_1p_1^2, & q_1q_1^2, & p^2q^2; \end{array}$$

p et q étant des nombres premiers des formes respectives $18n + 5$ et $18n + 11$, A n'est pas décomposable en la somme de deux cubes inégaux. (Le Mémoire se continue dans le volume suivant.)

Peirce (*C.-S.*). — Sur une projection quinconciale de la sphère (394-396; 1 pl.).

Projection conforme obtenue en transformant la projection stéréographique avec un pôle à l'infini au moyen des fonctions elliptiques. La planche représente une mappemonde, bien préférable, ce nous semble, aux projections de Mercator ou stéréographiques. Des Tables sont données pour la construction de la mappemonde.

Johnson (*Woolsey*) et *Story*. — Notes sur le taquin (15 *puzzle*). (397-399, 399-404).

BRUNEL.

BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, pubblicato da B. BONCOMPAGNI (¹).

Tome XI; 1878.

Millosevich (*Elia*). — Sur la vie et les travaux de GIOVANNI SANTINI. (1-110).

Né le 29 janvier 1787, mort le 26 juin 1877, Santini fut un astronome du premier ordre, un grand cométographe, un professeur éminent. Directeur de l'Observatoire de Padoue en 1817, il fut nommé directeur de la Faculté des Sciences mathématiques en 1845, et acquit une réputation européenne par son enseignement et ses travaux. C'est dans ses *Elementi di Astronomia con le applicazioni alla Geografia, Nautica, Gnomonica e Cronologia* que plusieurs générations d'Italiens ont appris le mécanisme du ciel. Giovanni Santini ne fut pas seulement un grand astronome, un illustre savant : il ne cessa jamais de se montrer, pendant tout le cours de sa longue carrière, l'ami sincère et dévoué de son pays, de la Science et de la jeunesse des écoles.

Pour plus amples renseignements sur le noble caractère de Santini, on pourra lire encore le discours du professeur Lorenzoni, de Padoue, et l'écrit du professeur Turazza, de Vienne.

Genocchi (*Ang.*). — Fragment d'une lettre à D. B. Boncompagni. (111).

Annonce de la prochaine publication des Œuvres d'Augustin Cauchy, notre grand analyste parisien, avec une Note du prince Boncompagni, rappelant que,

(¹) Voir *Bulletin*, II_2, 191.

en 1869, c'est-à-dire dès son apparition, le *Bullettino* avait signalé la grande utilité qu'aurait pour tous les amis des Sciences mathématiques la publication des Œuvres de Cauchy.

Mayer (*Ad.*), trad. par *Biadego* (*G.-B.*). — Histoire du principe de la moindre action. (155-156).

Curtze (*M.*), trad. par *Sparagna* (*A.*). — *Nova Copernicana* d'Upsal. Rapport lu à la Société Copernicienne des Sciences et Arts de Thorn, le 4 juin 1877. (167-176).

M. Max. Curtze avait été chargé par le prince Boncompagni de rechercher en Suède, et spécialement à Upsal, les manuscrits autographes de Copernic et les Livres annotés de sa main. Le Dr Sparagna, qui a traduit ce Rapport en italien, l'a enrichi de nombreuses annotations.

Giordani (*Enr.*). — I sei Cartelli di matematica disfida, primamente intorno alla generale risoluzione delle equazioni cubiche di *Lodovico Ferrari*, coi sei Contra-Cartelli in riposta di *Nicolò Tartaglia*, comprendenti le soluzioni de' Quesiti dall' una e dall' altra parte proposti; raccolti, autografati e pubblicati da *Enrico Giordani*, Bolognese. Premesse notizie bibliografiche ed illustrazioni sui Cartelli medesimi, estratte da documenti già a stampa ed altri manoscritti favoriti dal Comm. Prof. *Silvestro Gherardi*. Milano, 1876. In-8°, 220 pages ([1]). (177-196).

En 1544, Maria del Fiore s'était vanté de savoir résoudre les problèmes conduisant à des équations de la forme

$$x^3 + ax = b,$$

et l'année suivante avait eu lieu le cartel entre Tartaglia et del Fiore. Ces cartels étaient soutenus publiquement et presque toujours dans les églises. C'est ainsi que, le 10 août de l'année 1548, l'église de Santa Maria del Giardino, à Milan, avait été assignée comme lieu de rendez-vous pour vider le différend mathématique entre Tartaglia et Ferrari, le disciple de Cardan. On sait que Nicolò avait été surnommé *Tartaglia* (le Balbutiant) à cause du balbutiement, résultat physique d'une horrible blessure à la mâchoire qu'il reçut à la prise de Brescia par les Français. Il n'avait alors que douze ans, et s'était réfugié avec sa mère dans *il Duomo*, croyant échapper ainsi à la poursuite des soldats furieux. Il faut lire, dans les Notes du prince Boncompagni (p. 181-183), l'autobiographie de Tartaglia, telle qu'elle est reproduite, sous forme de dialogue, entre lui et le prieur de Barletta ([2]).

([1]) Traduction d'un article de M. Cantor, publié dans le *Zeitschrift für Math. u. Phys.*, t. XXII.

([2]) *Voir* encore Libri, *Hist. des Math. en Italie*.

Cette intéressante Notice, due au Dr Maurice Cantor, est précédée d'une dédicace de l'auteur au prince Balthazar Boncompagni, « le magnanime et savant promoteur des études historico-mathématiques à Rome ».

Cantor (M.), trad. par *Favaro (A.)*. — La correspondance entre Lagrange et Euler. (197-216).

C'est le 28 juin 1754 que Lagrange écrivit sa première Lettre à Euler. Par le nombre des années, il n'était encore qu'un enfant; mais par la maturité de la pensée, c'était déjà un homme et un savant. Le Dr Cantor fait l'historique de la Correspondance et des travaux qui ont immortalisé les noms d'Euler et de Lagrange. Il rend un juste hommage au prince Boncompagni pour ses publications de Lettres inédites de Lagrange à Euler.

Gilbert (Ph.). — Essai historique et critique sur le problème de la rotation d'un corps solide (¹). (217).

M. Gilbert a fait paraître, en 1878, une étude historique et critique sur le problème fameux de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. M. Siacci s'est empressé de donner de cet Ouvrage un compte rendu auquel nous ne ferons qu'un reproche, celui d'être trop bref. Le jugement qu'il porte sur l'auteur sera ratifié par tous les mathématiciens.

Grâce, dit-il, à l'exposé lucide et bien ordonné de M. Gilbert, son étude constitue, un Chapitre qui n'est plus à faire de l'histoire de la Mécanique rationnelle.

Garbieri (G.). — Lehrbuch der Determinanten-Theorie für Studirende von Dr Siegmund Günther. Zweite durchaus umgearbeitete, vermehrte und durch eine Aufgaben-Sammlung bereicherte Auflage. Erlangen, 1877 (²). (257-318).

Le Dr Giovanni Garbieri rend compte de la seconde édition d'un Ouvrage de M. Günther, ou plutôt il donne une étude fort instructive sur cette branche spéciale des Mathématiques qu'on appelle la *Théorie des Déterminants* et sur les mathématiciens qui en ont fait l'objet de leurs travaux.

C'est, paraît-il, à Leibnitz qu'il faut faire remonter la première invention des déterminants; c'est à Gauss qu'on doit cette dénomination nouvelle, et c'est Cauchy qui a posé le couronnement de cet édifice, auquel avaient travaillé Cramer, Euler, Bézout, Vandermonde, Laplace, Lagrange, suivis dans cette voie, qui semble attractive, par une phalange de vaillants chercheurs : Albeggiani, Armenante, Baltzer, Battaglini, Bellavitis, Binet, Borchardt, Brioschi, Casorati, Catalan, Cayley, Chiò, Clebsch, Dahlander, Darboux, Davidof, Dickmann, Dietrich, Dölp, Dostor, Falk, Fiedler, Fontebasso, Fürstenau, Garbieri, De Gasparis, Germain (Sophie), Glaisher, Grassmann, Gundelfinger, Günther, Hankel, Heine, Hesse, Hindenburg, Hoüel, Iarochenko, Jacobi, Janni, Laisant, Lucas (Éd.), Mansion, Mellberg, Meylink, Monro, Nachreiner, Nägelsbach, Newmann, Ramus,

(¹) *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 2e année, 1878; 98 pages, in-8°. Voir *Bulletin*, IV_2, 88.

(²) Voir *Bulletin*, I_1, 377.

Reidt, Reiss, Rothe, Rubini, Salmon, Scheibner, Schering, Seeliger, Siacci, Smith, Somof, Souillart, Sperling, Spottiswoode, Stern, Studnička, Sylvester, Tait, Thiele, Trudi, Veltmann, Weyrauch, Zehfuss, Zeipel. Dans cette liste, encore incomplète, les Allemands sont en majorité; on y rencontre bon nombre d'Italiens et peu de Français contemporains.

Favaro (*Ant.*). — Sur la publication faite par le D[r] Carlo Malagola de quelques documents relatifs à Nicolas Copernic et à d'autres astronomes et mathématiciens des XV[e] et XVI[e] siècle. (319-334).

L'important Ouvrage de Malagola offre un tableau fidèle de la vie scientifique et littéraire de l'Université de Bologne vers la fin du XV[e] siècle; il a valu à son auteur les éloges mérités des écrivains les plus éminents de l'Italie, Domenico Berti, Cesare Correnti, Francesco de Sanctis, Federico Sclopis, etc., etc. On sait que, d'après des documents trouvés dans la citadelle de Ferrare, publiés et annotés par le prince B. Boncompagni, Nicolas Copernic fréquenta les cours de l'Université de Bologne pendant les années 1496, 1497, 1499, 1500; qu'il étudia ensuite le droit canon à Ferrare, et qu'il se trouvait encore dans cette ville le 31 mai 1503, jour où le titre de docteur lui fut publiquement décerné.

Bierens de Haan (*D.*). — Notice sur un pamphlet mathématique hollandais, intitulé : « Bril voor de Amsterdamsche belachelycke geometristen (¹). Amsterdam, 1663. (383-452; franç.). »

Il s'agit d'un pamphlet publié par Cornelis Sackersz van Leeuwen contre ses compatriotes et collègues Abraham de Graaf, Gietermaker, Anhaltin et autres. Dans cet écrit de mauvais goût, l'auteur distribue à tort et à travers les épithètes de singes, de pirates, de brigands, de voleurs, de charlatans et autres aménités de ce genre. De Graaf répondit à Van Leeuwen en le traitant à son tour d'ignorant, de pillard, de plagiaire, de pitoyable géomètre, etc. M. Bierens de Haan ne s'est pas contenté de nous faire assister à cette curieuse lutte de mathématiciens hollandais du XVII[e] siècle; il a tracé un aperçu des principaux Ouvrages de Mathématiques publiés dans les Pays-Bas pendant les XVI[e] et XVII[e] siècles et de leurs méthodes.

Son Catalogue biographique et bibliographique, de plus de soixante-dix mathématiciens néerlandais, offre un réel intérêt pour l'histoire des Sciences mathématiques. Parmi les géomètres qu'il cite se rencontrent les noms du grand Huygens, d'Adrien Metius, de Hudde, de Schooten, de Simon Stevin, de Ludolf van Ceulen, etc.

Somof (*André*), (trad. par *Hoüel*). — Nécrologie de JOSEPH IVANOVITCH SOMOF. (453-486; franç.).

Joseph Ivanovitch Somof, né le 13 juin 1815, au village d'Otrada, gouvernement de Moscou, membre de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg, a inscrit son nom en caractères ineffaçables dans l'histoire des Sciences mathé-

(¹) Lunettes pour les géomètres ridicules d'Amsterdam.

matiques. Pour s'en convaincre, il suffit de jeter un coup d'œil sur le Catalogue donné par le prince Boncompagni, des trente-huit Ouvrages et Mémoires qui composent son œuvre. Ce Catalogue est suivi d'une Lettre de Somof au prince Boncompagni, et d'observations y relatives par le prince lui-même.

Boncompagni (*B.*) et *Siacci* (*F.*). — Solution de la question 391 de la *Nouvelle Correspondance mathématique*. (487).

La somme des carrés des nombres impairs de rang pair, diminuée de la somme des carrés des nombres impairs de rang impair, est le double d'un carré. Deux solutions de cette question, dues l'une au prince Boncompagni, l'autre au professeur Siacci.

Caverni (*Raffaello*). — Notices historiques sur l'invention des thermomètres. (531-586, 1 pl.).

L'auteur examine successivement le thermomètre de Galilée, ceux de Santorio, de Sagredo, de Torricelli, et le thermomètre multiplicateur des académiciens *del Cimento*. On pourra consulter utilement sur ce dernier thermomètre le Mémoire de Libri, publié au tome 45 des *Annales de Chimie et de Physique* (1830), et intitulé : « Mémoire sur la détermination de l'échelle du thermomètre de l'Académie *del Cimento*. »

Les conclusions de M. R. Caverni sont que l'invention première du thermomètre à air appartient à l'Italie, aussi bien que celle du thermomètre à liquide. L'auteur compare sa patrie à une mère défiante de ses forces, qui cède les droits sacrés de la maternité à quelque nourrice accorte. On pourrait en dire autant de la France, dont les inventions et les découvertes sont lancées dans le monde par d'habiles exploiteurs, qui ont tous les bénéfices de l'invention au détriment des véritables inventeurs.

Boncompagni (*B.*). — Sur deux Lettres du P. abbé D. Benedetto Castelli, moine du Mont-Cassin, à Monsignor D. Ferdinando Cesarini. (587-644).

Castelli (*B.*). — Deux Lettres du P. abbé D. Benedetto Castelli à Monsignor D. Ferdinando Cesarini. (645-657).

Mazzucchelli (Cte *Giovanni Maria*). — CASTELLI (BENEDETTO). Article inédit de l'Ouvrage intitulé : *Gli Scrittori d'Italia*. (658-665; 1 pl.).

Benedetto Castelli, moine du Mont-Cassin, mathématicien en titre du pape Urbain VIII, fut l'un des plus grands mathématiciens et physiciens de l'Italie. Né à Brescia le 24 juin 1577, il mourut à Rome, au monastère de Saint-Calixte, en 1644, et non en avril 1643, comme le dit le comte Mazzuchelli. Élève et ami de Galilée, il ne cessa jamais de prendre la défense de son maître et de propager ses doctrines. Il fut le maître et le bienfaiteur de Torricelli et compta parmi ses élèves les princes Ferdinand et Léopold de Médicis, Taddeo Barberini, Alfonso Borelli, Bonaventura Cavalieri, etc. Le prince Balthasar Boncompagni a mis en relief cette grande figure dans une Notice intéressante: il a publié *deux*

Lettres de Castelli écrites à Mgr D. Ferdinando Cesarini, l'une à la date du 20 septembre 1638, l'autre à la date du 12 août 1639. La première de ces Lettres établit que le thermomètre ou mieux le thermoscope fut inventé par Galilée avant 1603; elle n'avait été publiée qu'en partie par J.-B. Clément de Nelli; le prince Boncompagni l'a donnée tout entière, telle qu'elle existe à Florence, où elle est conservée précieusement, bien que ce ne soit qu'une copie, mais une copie faite de la main du célèbre mathématicien Viviani. La seconde de ces Lettres traite de la mesure « delle Fontane ».

Un exemplaire manuscrit autographe de cette Lettre, datée du 12 août 1639, se trouve dans un Volume petit in-4° de la Bibliothèque royale de Parme, intitulé : CASTELLI : | *Acque correnti* | *Lettere* | Mss. | 191.

En 1664 parut à Castres une traduction en français de cet Ouvrage de Castelli, sous le titre : *Traicté* | *de* | *la Mesure des* | *Eaux courantes* de | Benoist Castelli, Reli | gieux du Montcassin et | Mathématicien du pape Urbain VIII | traduit d'italien en françois | avec un discours de la ionction des Mers, adressé à Mes | seigneurs les Commissaires deputez par Sa Majesté. | Ensemble un Traité du mouvement des eaux d'Evangeliste Torricelli | mathématicien du Grand Duc de Toscane | Traduit de latin en françois. | A Castres, | Par Bernard Barcouda, imprimeur du Roy, de la | Chambre de l'Edict, de la dite Ville et Diocèse. | 1664. |

L'article du prince Boncompagni sur le P. abbé Benedetto Castelli se termine par un extrait inédit de l'Ouvrage du comte Giovanni Maria Mazzuchelli, intitulé : *Gli Scrittori d'Italia*, coté sous le n° 9266 des manuscrits du Vatican.

Favaro (*Ant.*) — Étude sur la vie et les écrits physico-mathématiques de HERMANN GRASSMAN. (699-756).

Hermann Grassman ne fut pas apprécié à sa juste valeur par ses contemporains; il n'est pas encore suffisamment connu, malgré les écrits de ses compatriotes : Delbrück, Junghans, Schlegel, Sturm, Schröder et Sohncke. Le Dr Favaro a pensé avec raison que l'étude des œuvres d'un savant est le monument le plus durable que la postérité puisse élever à sa mémoire, et il s'est appliqué à faire revivre cette singulière physionomie d'un homme d'une activité infatigable, qui fut tout à la fois philosophe, théologien, mathématicien, physicien, philologue et musicien. L'esprit créateur de Grassmann ne se reposait d'une œuvre que par une autre de genre tout différent. Hermann-Gunther Grassmann naquit le 15 avril 1809 à Stettin, en Poméranie, où son père était professeur de Physique et de Mathématiques; il étudia l'Analyse supérieure dans les œuvres de Lagrange, de Lacroix et de Laplace. Le plus grand et le plus remarquable peut-être de ses travaux mathématiques est l'*Ausdehnungslehre*. Hermann Grassmann mourut le 26 septembre 1877.

Favaro (*Ant.*).— Geschichte der Astronomie von RUDOLF WOLF. München, 1877. (757-777).

L'Académie des Sciences de Munich, sous les auspices du roi Maximilien II de Bavière, a publié un Recueil de Rapports sur l'Histoire des Sciences en Allemagne dans les temps modernes. Parmi ces Rapports figure l'*Histoire de l'Astronomie* par *Rodolphe Wolf*, professeur de l'Université de Zurich. L'auteur ne s'est pas borné à faire l'histoire de l'Astronomie en Allemagne dans les temps modernes : il a considérablement élargi son cadre dans le temps et dans l'espace; il s'est

occupé de l'Astronomie chez les Égyptiens, les Chinois, les Babyloniens, les Grecs, dans les écoles d'Alexandrie, de Bagdad, du Caire, de Samarcande et de Cordoue. L'école chrétienne de Tolède, Alphonse de Castille et les Tables alphonsines ont trouvé place dans ce vaste tableau d'ensemble.

« Il n'y a pas d'histoire possible », dit Wolf, « sans les calculs de temps, et il n'y a pas de calcul de temps sans Astronomie. » L'Histoire de l'Astronomie de Wolf est, certes, un bel Ouvrage; mais nous adresserons à l'auteur, d'accord avec le savant professeur Favaro, de Padoue, certains reproches qui nous paraissent inévités. Wolf a dit quelques mots seulement de l'Astronomie des Hindous; il a commis dans l'histoire des travaux de Copernic et de Galilée quelques omissions bibliographiques qui ont été signalées par le prince Balthazar Boncompagni; de Huygens il parle peu; de M. Chasles, le vénéré doyen de nos géomètres français, il parle avec une passion injuste et jalouse. Dans l'Histoire de l'Astronomie il a passé sous silence des hommes tels que Striborio, Ramus, Biancano. Il a omis de citer la ***Biblioteca matematica italiana***, œuvre d'importance capitale; il a omis de mentionner la Société ***degli Spettroscopisti*** si connue en Italie et si utile à la Science astronomique. Enfin, quand Wolf parle de la diffusion des Observatoires dans le monde entier, il ne trouve pas un seul Italien à signaler, et pourtant il n'avait que l'embarras du choix !

Favaro (Ant.). — Grundlinien der mathematischen Geographie und elementaren Astronomie zum Gebrauche in höheren Mittelschulklassen und bei akademischen Vorträgen, von Dr Siegmund Günther. (778-782).

Ce titre de 136 pages in-8° est destiné à l'enseignement classique. Il fait une large part à l'Histoire scientifique, et ce trait caractéristique commande l'attention des lecteurs du *Bullettino*. C'est une innovation à laquelle applaudit le Dr Favaro, et tous les amis des sciences partagent son avis à cet égard. Cet excellent petit livre est divisé en douze Chapitres; d'un bout à l'autre, il excite continuellement l'intérêt de l'élève et donne satisfaction aux savants et aux érudits par sa science et sa haute érudition.

Lucas (Éd.). — Sur la série récurrente de Fermat. ([illegible]).

M. Édouard Lucas a produit de remarquables travaux sur l'analyse algébrique et sur la théorie des nombres; ils sont bien connus des lecteurs du *Bullettino* qui n'ont pas oublié sans doute ses *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise et sur diverses questions d'Arithmétique supérieure*, publiées dans les cahiers de mars, avril et mai de l'année 1877. Les nombres de la forme $2^n \pm 1$ ont exercé, depuis Fermat, bon nombre d'esprits mathématiques de la plus haute portée, et je constate avec plaisir ce fait que rappelle M. Édouard Lucas, à savoir que si M. Le Lasseur, de Nantes, a trouvé dernièrement les facteurs de $2^n - 1$, c'est au moyen d'une méthode nouvelle de décomposition des grands nombres, due à Aurifeuille, mon condisciple à l'Institution Barbet des Feuillantines, ancien élève de l'École Polytechnique, mort professeur de Mathématiques au Lycée de Toulouse.

Favaro (Ant.). — L'histoire des Mathématiques à l'Université de Padoue. Lettre à D. B. Boncompagni. ([illegible]).

Dans cette Lettre pleine de sens, le savant professeur sommet au prince Boncompagni, comme à son maître dans l'Histoire des Sciences, ses vues, ses idées, sa méthode et son programme du premier Cours d'Histoire des Sciences qu'il a ouvert à l'Université de Padoue.

En France, l'enseignement de l'Histoire des Sciences n'existe nulle part, c'est en vain qu'on le chercherait dans les grandes écoles nationales scientifiques, voire même au Collège de France.

Garbieri (*G.*). — Elemente der Theorie der Determinanten mit vielen Uebungsaufgaben, von D[r] P. Mansion, Professor der Universität zu Gent. (802-803).

Le D[r] Giovanni Garbieri a rendu compte de ce savant travail non sur l'édition originale française, mais sur la traduction faite du français en allemand par le D[r] Horn, parce que dans l'édition allemande quelques points sont mieux et plus amplement développés, et que les exercices y sont plus nombreux et plus variés que dans l'édition française.

ANNONCES de publications récentes. — (112-154, 218-256, 335-382, 488-530, 666-698, 804-854). AR. MARRE.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (1).

Tome XCII; 1881, 1[er] semestre.

N° 14; 4 avril.

Puiseux (*V.*). — Sur les mesures micrométriques effectuées pendant le passage de Vénus du 8 décembre 1874. (808).

Mouchez. — Note sur les mesures micrométriques du passage de Vénus sur le Soleil. (813).

Villarceau (*Y.*). — Note sur les méthodes de Wronski. (815).

Janssen. — Sur la photométrie photographique et son application à l'étude des pouvoirs rayonnants comparés du Soleil et des étoiles. (821).

Halphen. — Sur des fonctions qui proviennent de l'équation de Gauss. (856).

Soient trois nombres entiers positifs m, n, p; posant

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=1-\frac{2}{\mu},$$

M. Schwarz a montré comment, lorsque μ est négatif, l'équation hypergéométrique, où l'on suppose

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right),\quad \beta=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}-\frac{1}{p}\right),\quad \gamma=1-\frac{1}{m},$$

s'intègre algébriquement; M. Halphen montre comment tous les cas où cette hypothèse est réalisée peuvent être réunis en un seul; il examine ensuite le cas où μ est positif; faisant, pour abréger,

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x)=(m, n, p, x),$$

il pose

$$\tau_1=\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{p}}\frac{\left(-p, n, m, \frac{1}{x}\right)}{\left(p, n, m, \frac{1}{x}\right)}.$$

Aux développements doivent être substituées les intégrales, qui subsistent toujours.

x est une fonction uniforme de τ_1; il en résulte que le point τ_1 reste nécessairement dans une région limitée du plan, à savoir un cercle ayant l'origine pour centre et dont M. Halphen calcule le rayon. Dans ce cercle, les fonctions

$$X(\tau_1)=(-1)^{\frac{1}{m}}\left(p, n, m, \frac{1}{x}\right)^{\frac{\mu}{m}},$$

$$Y(\tau_1)=\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{n}}\left(p, n, m, \frac{1}{x}\right)^{\frac{\mu}{n}},$$

$$Z(\tau_1)=\left(\quad\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{p}}\left(p, n, m, \frac{1}{x}\right)^{p}$$

sont développables en séries procédant suivant les puissances entières et positives de τ_1.

Poincaré (*H.*). — Sur une nouvelle application et quelques propriétés des fonctions fuchsiennes. (859).

Sur certains types d'équations différentielles linéaires qui s'intègrent par les fonctions fuchsiennes, lorsque celles-ci n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental.

Wolf (*C.*). — Sur les relations entre les taches solaires et les variations magnétiques. (861).

Crookes (*W.*). — Sur la viscosité des gaz. (862).

Violle (*J.*). — Intensités lumineuses des radiations émises par le platine incandescent. (866).

Bouty (*E.*). — Sur le changement de volume qui accompagne le dépôt magnétique d'un métal. (868).

Blondlot. — Sur la conductibilité voltaïque des gaz échauffés. (870).

Villari. — Sur les décharges internes des condensateurs électriques. (872).

Laurent. — Sur les miroirs magiques. (874).

N° 15; 11 avril.

Gyldén. — Sur l'intégrale eulérienne de seconde espèce. (897).

Application des formules données par M. Hermite (*Journal de Borchardt*, t. 90, p. 332) pour le calcul numérique de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\eta x}}{(1+x)^x}\,dx.$$

Cailletet et *Hautefeuille.* — Recherches sur la liquéfaction des mélanges gazeux. (901).

Lockyer. — Sur les raies du fer dans le Soleil. (904).

Poincaré (*H.*). — Sur l'intégration des équations linéaires par le moyen des fonctions abéliennes. (913).

Partant de deux fonctions abéliennes quelconques, l'auteur montre qu'on peut former des équations différentielles linéaires du troisième ordre dont les coefficients sont des fonctions algébriques de x et de un ou trois paramètres arbitraires, et qui s'intègrent au moyen des fonctions abéliennes proposées; il s'occupe ensuite de former les *groupes* des équations à coefficients rationnels qui peuvent s'intégrer par ce procédé, c'est-à-dire le groupe des substitutions linéaires que subissent les intégrales quand x décrit un contour quelconque.

Du Bois-Reymond (*P.*). — Sur les formules de représentation des fonctions. (915).

L'auteur traite des intégrales *représentantes* $\int_0^a \Phi(\alpha, h)\,d\alpha$ qui, comme $\int_0^a \frac{\sin \alpha h}{\alpha}\,d\alpha$, ont pour h croissant à l'infini une valeur limite indépendante

de a; il en résulte, pour $0 < a < b$,

$$\lim \int_a^b \Phi(\alpha, h)\, d\alpha = 0.$$

$f(x)$ étant une fonction arbitraire, on a les équations

$$\text{(A)} \qquad \lim \int_a^b f(\alpha)\Phi(\alpha, h)\, d\alpha = 0,$$

$$\text{(B)} \qquad \lim \int_0^a f(\alpha)\Phi(a, h)\, d\alpha = f(0) \lim \int_0^a \Phi(\alpha, h)\, d\alpha.$$

La formule (A) suppose seulement l'intégrabilité de $f(x)$.

La formule (B) a certainement lieu si la fonction $\Phi(x, h)$ est telle que

$$\lim \int_0^a \operatorname{mod} \Phi(\alpha, h)\, d\alpha$$

soit finie, si en outre $f(x)$ est intégrable et si $f(0) = \lim\limits_{x+0} (x)$ est déterminé.

En dehors de ces conditions générales, on peut rechercher des conditions collectives pour des classes d'intégrales représentantes.

L'égalité (B) subsistera toujours et pour toutes les fonctions $\Phi(x, h)$ remplissant la condition qui a servi à les définir si les différences $f(x)$ ne changent pas de signe entre $x = 0$ et $x = \varepsilon$, ε étant aussi petit qu'on le veut : l'égalité (B) aura donc lieu si

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x),$$

les différences de $\varphi(x)$ et de $\psi(x)$ étant constamment non positives entre $x = 0$ et $x = \varepsilon$. Sous l'hypothèse que $f(x)$ a une dérivée intégrable $f'(x)$, cette condition équivaut à celle de la convergence de l'intégrale

$$\int_0^\varepsilon \operatorname{mod} f'(\alpha)\, d\alpha.$$

L'intégration par parties appliquée à l'intégrale $\int_0^a f(\alpha)\Phi(\alpha, h)\, d\alpha$ conduit au résultat suivant : $x\Phi(x, h)$ s'annulant avec x et ne dépassant pas des limites finies pendant que h croît à l'infini, (B) aura toujours lieu quand l'intégrale

$$J = \int_0^\varepsilon d\alpha \operatorname{mod} \left[\frac{f(\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\alpha d\beta f(\beta) \right]$$

est convergente. Cette condition contient la condition relative aux différences de $f(x)$. L'examen de cette intégrale conduit en outre au théorème suivant :

En supposant $\lim\limits_{x=0} x\Phi(x, h) = 0$, $\lim\limits_{h=\infty} x\Phi(x, h)$ *finie*, $f(x)$ *intégrable et l'intégrale*

$$\int_0^\varepsilon \frac{d\alpha}{\alpha} \operatorname{mod}[f(a) - f(0)]$$

convergente, l'égalité (B) *sera vraie.*

En faisant

$$f(x) - f(0) = \frac{\lambda(x)}{\rho(x)},$$

on peut déterminer $\rho(x)$ en sorte que cette fonction devienne infinie pour $x = 0$ avec des différences constamment négatives et que lim $\lambda(x)$ ne soit ni l'infini ni zéro.

La fonction $\rho(x)$ est ce que M. P. du Bois-Reymond appelle le degré de continuité de la fonction $f(x)$ pour $x = 0$.

L'égalité

$$j = \int_0^\iota \frac{d\alpha}{\alpha} \operatorname{mod}[f(\alpha) - f(0)] = \int_0^\iota d\alpha \frac{\operatorname{mod}\lambda(\alpha)}{\alpha\rho(\alpha)}$$

montre que, si l'intégrale $\int_0^\iota \frac{d\alpha}{\alpha\rho(\alpha)}$ est finie, il suffit que $\lambda(x)$ soit intégrable, et que, si elle est finie, $\lambda(x)$ devra osciller de manière à rendre l'intégrale j convergente.

Enfin l'auteur ajoute quelques mots sur ses recherches relatives à la représentation par les formules de Fourier des fonctions $f(x)$ de la forme $\frac{\cos\psi(x)}{\rho(x)}$, $\rho(x)$ étant le degré de continuité pour $x = 0$ et $\psi(x)$ devenant infinie pour $x = 0$ [*Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln* (*Abhandl. d. Bayer. Akad. d. W.*, II. Cl., XII. Bd., II. Abth.)].

N° 16; 18 avril.

Gyldén. — Sur l'intégrale eulérienne de seconde espèce. (942).

Brioschi. — Sur la surface de Kummer à seize points singuliers. (944).

L'auteur expose quelques-uns des résultats contenus dans un Mémoire qu'il fait imprimer, relatifs à l'expression des coordonnées de la surface de Kummer en fonctions de deux paramètres.

Bresse. — Rapport sur un Mémoire de M. S. Périssé, intitulé : « Des causes qui tendent à gauchir les poutres des ponts en fer, et des moyens de calculer ces poutres pour résister aux efforts gauchissants ». (948).

Poincaré. — Sur les fonctions fuchsiennes. (957).

Poincaré. — Sur les fonctions abéliennes. (958).

Généralisation des résultats dus à M. Picard concernant la réduction de certaines fonctions abéliennes à des fonctions elliptiques et d'autres résultats dus à M. Appell sur la décomposition de certaines fonctions abéliennes en éléments simples.

Appell. — Sur une classe de fonctions dont les logarithmes sont des sommes d'intégrales abéliennes de première et de troisième espèce. (960).

x et y étant deux variables liées par une équation algébrique $F(x, y) = 0$ d'ordre m et de genre p, l'auteur considère des fonctions du point analytique (x, y) qui n'ont sur toute la sphère d'autres pointe singuliers que des pôles et des points critiques algébriques, à savoir les points critiques de la fonction y de x; de plus ces fonctions se reproduisent multipliées par un faisceau constant quand le point (x, y) décrit un cycle quelconque.

M. Appell montre comment ces fonctions peuvent s'exprimer au moyen des fonctions Θ et donne, pour elles, une formule de décomposition en éléments analogue à celle que M. Hermite a donnée pour les fonctions doublement périodiques.

Du Bois-Reymond (P.). — Sur les formules de représentation des fonctions. (962).

Draper. — Sur la Photographie stellaire. (964).

N° 17; 23 avril.

Faye. — Sur une question de métrologie ancienne; origine du *mile* anglais. (975).

Léauté. — Théorie générale des transmissions par câbles métalliques; règles pratiques.

Appell. — Sur une classe d'équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. (1005).

Soit une équation linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0,$$

dont les coefficients $p_1, \ldots, p_n$ sont des fonctions uniformes doublement périodiques de x n'ayant d'autre point singulier essentiel que le point ∞. Supposons que l'intégrale générale n'ait elle-même d'autre point singulier essentiel que le point ∞; de plus, en désignant par α un point quelconque où certains des coefficients p deviennent infinis, supposons que les racines de l'équation fondamentale déterminante relative à ce point soient des nombres commensurables ayant des différences entières, mais que les éléments d'un système fondamental ne contiennent pas de logarithmes dans le voisinage de $x = a$; ces conditions étant remplies pour tous les points singuliers, on peut obtenir l'intégrale générale de l'équation.

Par exemple, l'équation de Lamé

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]y,$$

pour

$$n = \frac{1}{2}, \quad h = -\frac{1+k^2}{4},$$

a pour intégrales les fonctions $\sqrt{\mathrm{cn}\,x + \mathrm{dn}\,x}$, $\sqrt{k'\mathrm{sn}\,x + \mathrm{dn}\,x}$.

Croullebois. — Production normale des trois systèmes de franges des rayons rectilignes. (1008).

Gaiffe. — Causes perturbatrices des transmissions téléphoniques. (1009).

N° 18; 2 mai.

Faye. — Sur une propriété de l'indicatrice relative à la courbure moyenne des surfaces convexes. (1019).

Jamin. — Sur la force électromotrice inverse de l'arc électrique. (1021).

Gyldén. — Sur les inégalités à longues périodes dans les mouvements des corps célestes. (1033).

Bigourdan. — Observations de la comète f 1880 (Pechüle), faites à l'Observatoire de Paris. (1045).

Le Paige (*C.*). — Sur une propriété des formes trilinéaires. (1048).

Lippmann. — Sur le principe de la conservation de l'électricité, ou second principe de la théorie des phénomènes électriques. (1050).

N° 19; 9 mai.

Faye. — Réponse à quelques critiques relatives à la Note du 21 février sur la parallaxe du Soleil. (1072).

Sylvester. — Sur les diviseurs des fonctions des périodes des racines primitives de l'unité. (1084).

Soit p un nombre premier égal à $ef+1$; la fonction du $e^{\text{ième}}$ degré dans les racines sont les e périodes entre lesquelles on peut distribuer les $ef\,p^{\text{ièmes}}$ racines primitives de l'unité en ce que l'auteur désigne comme la fonction à e périodes par rapport à p.

On sait (Bachmann, *Kreistheilung*, etc.) que p et un $e^{\text{ième}}$ résidu quelconque par rapport à p sont toujours diviseurs de cette fonction. Tout autre diviseur est dit exceptionnel; M. Sylvester énonce la proposition suivante :

1° *Si le nombre des périodes e est un nombre premier de la forme $2^{2^x}+1$, le nombre 2 ne peut pas être un diviseur exceptionnel.*

2° *Si e est un nombre premier, un faisceau exceptionnel* K (*s'il en existe*) *doit entrer à la seconde puissance au moins comme facteur dans e* — 1.

Dewulf. — Du déplacement d'une figure de forme invariable dans son plan. (1091).

Baillaud (*B.*). — Observations des satellites de Saturne, faites à Toulouse en 1879 et 1880.

Bigourdan. — Observations, éléments et éphémérides de la comète *a*. (1881).

Halphen. — Sur un système d'équations différentielles. (1101).

Il s'agit du système

$$\frac{d(u_1+u_2)}{d\alpha}=u_1u_2,\quad \frac{d(u_2+u_3)}{d\alpha}=u_2u_3,\quad \frac{d(u_3+u_1)}{d\alpha}=u_3u_1.$$

En posant

$$\beta=\frac{a\alpha+b}{a'\alpha+b'},$$

où a, b, a', b' sont des constantes, puis

$$u_s=-\frac{2a'}{a'\alpha+b'}+\frac{ab'-ba'}{(a'\alpha+b')^2}v_s,\quad (s=1,2,3),$$

le système transformé se déduit du proposé en remplaçant les u par les v.

Une intégrale particulière conduit donc à l'intégrale complète. Or, en prenant $\alpha=\log q$, on a une solution en choisissant, pour u_1, u_2, u_3, les dérivées logarithmiques par rapport à α des trois fonctions $\Theta^4(K)$, $\Theta^4(0)$, $H^4(K)$.

Le Paige (*C.*). — Sur les formes trilinéaires. (1103).

Puiseux (*P.*). — Sur quelques mesures actinométriques faites dans les Alpes en 1880. (1105).

N° 20; 16 mai.

Mouchez. — Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Greenwich (transmises par l'Astronome Royal M. *G.-B. Airy*) et à l'Observatoire de Paris pendant le premier trimestre de l'année 1881. (1125).

Stephan. — Nébuleuses découvertes et observées à l'Observatoire de Marseille. (1126).

Tresca. — Rapport sur un Mémoire de M. Graeff, relatif à une série d'expériences faites au réservoir du Furens sur l'écoulement des eaux. (1135).

Borrelly. — Comète découverte par M. Swift le 30 avril 1881. Observations faites à l'Observatoire de Marseille. (1146).

Laguerre. — Sur la séparation des racines des équations numériques. (1146).

Soit, en désignant par ω une quantité positive quelconque et par $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}$ des quantités réelles quelconques rangées par ordre croissant ou décroissant de grandeur,

$$F(x) = \frac{A_0}{(x-\alpha_0)^\omega} + \frac{A_1}{(x-\alpha_1)^\omega} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{(x-\alpha_{n-1})^\omega}.$$

Cela posé, ξ désignant une quantité quelconque comprise entre α_i et α_{i+1}, le nombre des racines de l'équation $F(x) = 0$, qui sont comprises entre ξ et α_{i+1}, est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$\frac{A_{i+1}}{(\xi-\alpha_{i+1})^\omega} + \frac{A_{i+2}}{(\xi-\alpha_{i+2})^\omega} + \ldots + \frac{A_i}{(\xi-\alpha_i)^\omega}.$$

(L'auteur entend par nombre des alternances d'une suite $A+B+C+D+\ldots$ le nombre des variations des termes A, $A+B$, $A+B+C$, ..., nombre qui ne peut surpasser le nombre des variations des termes $A, B, C, D, \ldots$).

Si ω est une quantité positive quelconque, l'équation

$$a + bx + cx(x-\omega) + dx(x-\omega)(x-2\omega) + \ldots = 0$$

a au moins autant de racines positives que l'équation

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots = 0.$$

a désignant une quantité arbitraire, considérons la suite

$$f(x) + f'(x)(a-x) + f''(x)\frac{(a-x)^2}{1.2} + \ldots.$$

Soient V_α, V_β le nombre d'alternances que présente cette suite quand on y remplace successivement x par α et par β; le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ qui sont comprises entre α et β est au plus égal à la somme des nombres V_α et V_β si a est compris entre α et β, et au plus égal à leur différence dans le cas contraire.

Le cas particulier de $x = a$ conduit à un énoncé remarquablement simple.

N° 21; 23 mai.

Lesseps (de). — Sur l'ancien Observatoire du Caire. (1181).

Stéphan. — Nébuleuses découvertes et observées à l'Observatoire de Marseille. (1183).

Stéphanos. — Sur la géométrie des sphères. Rapprochement entre les « semi-plans » et « semi-sphères » de M. Laguerre et les recherches de M. Lie [*Ueber complexe, insbesondere Linien- und Kugel-Complexe* (*Math. Ann.*, t. V; p. 164-188; 1872)].

Poincaré (H.). — Sur les fonctions fuchsiennes (1198).

Posant

$$\frac{z_1 - \alpha_1}{z_1 - \beta_1} = e^{i\lambda_1}\frac{z - \alpha_1}{z - \beta_1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{z_{n+1} - \alpha_{n+1}}{z_{n+1} - \beta_{n+1}} = e^{i\lambda_{n+1}}\frac{z - \alpha_{n+1}}{z - \beta_{n+1}},$$

où l'on suppose que chacun des angles $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ est une partie aliquote de 2π, satisfaisant à l'inégalité

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + \dots + 2\lambda_n + \lambda_{n+1} < 2\pi(n-1),$$

il existe une infinité de fonctions $F(z)$ uniformes en z, n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental, méromorphes à l'intérieur de ce cercle et telles que l'on ait

$$F(z) = F(z_1) = F(z_2) = \dots = F(z_n) = F(z_{n+1}).$$

Toutes ces fonctions, dites fuchsiennes, peuvent s'exprimer rationnellement au moyen de l'une d'entre elles; si, de plus, on pose

$$x = F(z), \quad y = \sqrt{\frac{dF}{dz}},$$

on aura

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction algébrique de x.

Si, en outre, on impose à la fonction $F(z)$ les conditions suivantes :

1° Elle est une des fonctions fuchsiennes à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement;

2° On a

$$F(\alpha_1) = 0, \quad F(\alpha_2) = 1, \quad F(\alpha_3) = \infty;$$

il en résultera que φ est rationnel en x et que les points singuliers de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\varphi(x)$$

seront

$$F(\alpha_1), \quad F(\alpha_2), \quad \dots, \quad F(\alpha_n), \quad F(\alpha_{n+1}).$$

Tous ces points singuliers sont réels. Pour $n = 2$ cette équation se réduit à l'équation hypergéométrique et $F(z)$ se réduit à une fonction particulière, sur laquelle M. Poincaré a déjà appelé l'attention (14 février 1881), et que M. Halphen a étudiée (4 avril).

Dans le cas où n est quelconque, on parvient, par cette méthode, à l'intégration

de toutes les équations différentielles linéaires, à coefficients rationnels, et dont tous les points singuliers sont réels.

Turquan. — Sur l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du second ordre (1200).

L'auteur indique une méthode qui ramène la recherche de l'intégrale complète de l'équation

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

à l'intégration d'un système d'équations simultanées aux différentielles ordinaires entre les huit variables x, y, z, p, q, r, s, t.

Wolf (C.). — Les étalons de poids et mesures de l'Observatoire de Paris et les appareils qui ont servi à les construire; leur origine, leur histoire et leur état actuel. (1202).

N° 22; 30 mai.

Stéphan. — Nébuleuses découvertes et observées à l'Observatoire de Marseille. (1260).

Gyldén. — Sur la théorie du mouvement des corps célestes. (1262.)

Système de formules pour calculer la position d'un corps céleste dans le plan de son orbite.

Bigourdan. — Observations et éléments de la comète *a* 1881 (Swift). (1272).

Poincaré (H.). — Sur les fonctions fuchsiennes. (1274).

Généralisant la méthode exposée par lui dans une précédente Communication, l'auteur énonce, sous forme dubitative, cette proposition : *Toutes ces équations linéaires à coefficients algébriques s'intègrent par les transcendantes fuchsiennes et zétafuchsiennes.* La démonstration de cette proposition, d'une si haute généralité, est ramenée par lui à la démonstration de l'existence d'une solution réelle pour un système de $2n - 4$ équations.

Rouyaux. — Relations algébriques entre les sinus supérieurs d'un même ordre. (1277).

West. — Sur les sinus d'ordre supérieur. (1279).

N° 23; 6 juin.

Faye. — Sur les ascensions droites de la Lune, observées à Alger. (1306).

Todd. — La parallaxe solaire déduite des photographies américaines du passage de Vénus de 1874. (1328).

Fuchs. — Sur les fonctions de deux variables qui naissent de l'inversion des intégrales de deux fonctions données. (1330).

Conclusion du Mémoire présenté à la Société Royale de Göttingue (t. XXVII), dont la traduction a paru dans le *Bulletin* (2e série, t. V; Ire Partie, p. 52).

Picard (E.). — Sur les expressions des coordonnées d'une courbe algébrique par des fonctions fuchsiennes d'un paramètre. (1332).

M. Poincaré a montré dans diverses Communications que, pour une infinité de courbes algébriques, les coordonnées d'un point pouvaient être exprimées sous formes de fonctions fuchsiennes d'un paramètre, laissant d'ailleurs dans le doute la réponse à cette question : un tel mode d'expression est-il possible pour toutes les courbes algébriques?

Dans la présente Communication, M. Picard indique une marche à suivre pour répondre à la question suivante:

Étant donnée l'équation

$$F(u, v) = 0$$

d'une courbe algébrique, reconnaître si l'on peut exprimer les coordonnées u, v d'un quelconque de ses points par des fonctions fuchsiennes d'un paramètre correspondant à un groupe fuchsien donné.

Poincaré (*H.*). — Sur une propriété des fonctions uniformes.

Un *groupe* d'une infinité de fonctions

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots,\ f_i(z),\ \ldots$$

est *discontinu* si l'on peut diviser le plan ou une partie du plan en régions R_0, R_1, ..., R_i, ..., telles que $f_i(z)$ parcoure R_i, quand z parcourt R_0, et la fonction uniforme $F(z)$ admettra ce groupe, si l'on a identiquement

$$F[f_i(z)] = F(z).$$

Cela posé, soit un groupe discontinu quelconque; envisageons les deux séries

$$\Theta\ (z) = \sum_{i=0}^{i=\infty} H\ [f_i(z)]\left[\frac{df_i(z)}{dz}\right]^m,$$

$$\Theta_1(z) = \sum_{i=0}^{i=\infty} H_1[f_i(z)]\left[\frac{df_i(z)}{dz}\right]^m;$$

dans ces deux séries m est un entier plus grand que 1; H et H_1 sont les algorithmes de deux fonctions rationnelles quelconques.

Ces séries, qui convergent indépendamment de l'ordre de leurs termes, définis-

sent deux fonctions uniformes de a, jouissant de la propriété suivante :

$$\Theta\,[f_i(z)] = \Theta\,(z)\left[\frac{df_i(z)}{dz}\right]^m,$$

$$\Theta_1[f_i(z)] = \Theta_1(z)\left[\frac{df_i(z)}{dz}\right]^m,$$

La fonction $\frac{\Theta(z)}{\Theta_1(z)} = \mathrm{F}(z)$ sera uniforme et jouira de la propriété

$$\mathrm{F}[f_i(z)] = \mathrm{F}(z);$$

elle admettra donc le groupe proposé.

« Il existe donc une infinité de fonctions uniformes admettant un groupe discontinu donné. »

N° 24; 13 juin.

Brioschi. — Sur un système d'équations différentielles. (1389).

Halphen. — Sur certains systèmes d'équations différentielles. (1404).

Les Communications des deux géomètres concernent le système

$$\frac{d(u_r + u_s)}{dx} = u_r u_s + \varphi(x) \quad (r, s = 1, 2, 3),$$

analogue au système étudié par M. Halphen (9 mai) et déjà rencontré par M. Darboux (*Annales de l'École Normale,* 2e série, t. VII, p. 149).

M. Brioschi traite directement les équations et montre leur liaison avec l'équation hypergéométrique. M. Halphen montre qu'elles peuvent être ramenées, par un changement de variables, à celles qu'il avait déjà étudiées, et que la même propriété (comme aussi celle de l'invariance) subsiste pour le système plus général

$$\frac{du_r}{dx} = \Psi_r(u_1, u_2, \ldots, u_n) + \varphi(x) \quad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

où les symboles Ψ_1, Ψ_2, Ψ_n désignent des formes quadratiques à n variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$, dont les coefficients sont tels que, si l'on y fait

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_n = \mathrm{U},$$

on ait

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial u_1} = \frac{\partial\Psi_2}{\partial u_2} = \cdots = \frac{\partial\Psi_n}{\partial u_n} = 2\lambda\mathrm{U},$$

et que, en même temps, les autres dérivées du premier ordre soient toutes nulles.

Alors, en déterminant $f(x)$ par l'équation

$$f'(x) = \lambda f^2(x) + \varphi(x),$$

en posant

puis effectuant le changement de variables

$$\beta = \int F(x)\,dx, \quad u_r = f(x) + v_r F(x),$$

on retombe sur des équations analogues aux proposées, où le v remplace les u et où le terme $\varphi(x)$ manque.

Examinant plus particulièrement le cas où $n = 3$, M. Halphen montre que les équations différentielles s'intègrent alors par les fonctions hypergéométriques X, Y, Z définies dans sa Communication du 4 avril.

Fuchs. — Sur les fonctions des deux variables qui naissent de l'inversion de deux fonctions données. (1401).

N° 25; 20 juin.

Jordan (*C.*). — Observations sur la réduction simultanée de deux formes bilinéaires. (1438).

Réponse à une critique formulée par M. Kronecker.

N° 26; 27 juin.

Mouchez. — Observation de la comète *b* 1881 (comète de 1807) à l'Observatoire de Paris, par MM. Bigourdan, Wolf et Thollon.

Poincaré (*H.*). — Sur les fonctions fuchsiennes. (1484).

L'auteur donne l'analyse d'un nouveau Mémoire qu'il a présenté à l'Académie sur ce sujet; nous en détachons le passage suivant :

« Soient $2n$ cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$; $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$, qui sont extérieurs l'un à l'autre ou se touchent extérieurement; tout groupe dérivé de n substitutions linéaires dont la $i^{\text{ième}}$ change la partie du plan extérieure à C_i en la partie intérieure à C'_i sera discontinu. Cela arrivera en particulier si les $2n$ cercles se touchent deux à deux de manière à circonscrire un polygone curviligne limité par des arcs de cercles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$, appartenant respectivement aux cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$; $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$, et si la $i^{\text{ième}}$ substitution change α_i en α'_i.

» Il existe des fonctions qui ne sont pas altérées par les substitutions de ce groupe et que je propose d'appeler *fonctions kleinéennes*, puisque c'est à M. Klein qu'on en doit la découverte. Il y aura aussi des fonctions thétakleinéennes et zétakleinéennes, analogues aux fonctions thétafuchsiennes et zétafuchsiennes.

» ... Les fonctions kleinéennes intègrent un grand nombre d'équations linéaires à coefficients algébriques, et entre autres des équations à intégrales irrégulières. »

Saint-Loup. — Influence des variations de la pression atmosphérique sur la durée des oscillations d'un pendule. (1490).

Tresca. — Observations relatives à la Communication précédente. (1490).

Flammarion (*C.*). — Observations sur la comète, et principalement sur l'aspect physique du noyau et de la queue. (1491).

Darboux (G.). — Sur la surface à seize points singuliers.

L'auteur commence par reconnaître les droits de priorité de M. Rohn sur une partie des propositions relatives à la surface de Kummer qu'il a signalées dans une Communication précédente. [Voir le Mémoire de M. Rohn, *Transformation der hyperelliptischen Functionen $p=2$ und ihre Bedeutung für die Kummer'sche Fläche* (*Mathematische Annalen*, t. XV, p. 315)]. Il indique ensuite une méthode pour développer les relations entre la surface de Kummer et les fonctions Θ, méthode applicable à d'autres surfaces du quatrième ordre à points singuliers.

Considérons une surface du quatrième ordre admettant un point singulier; une droite mobile passant par ce point rencontre la surface en deux points; si l'on détermine cette droite par le point où elle rencontre un plan fixe, on aura *représenté la surface sur un plan double.* La *courbe de passage* sera en général une courbe du sixième ordre, aura des points multiples ou se décomposera dans certains cas spéciaux : dans le cas de la surface de Kummer, elle se réduira à six droites tangentes à une même conique (K). Mettons l'équation de cette conique sous la forme

$$y^2 - xz = 0;$$

une tangente aura une équation de la forme

$$xm^2 + 2ym + z = 0,$$

et un point quelconque du plan poura être déterminé par les valeurs ρ, ρ_1 du paramètre m relatives aux deux tangentes issues de ce point; alors le point de la surface de Kummer correspondant au point ρ, ρ_1 du plan de représentation sera défini par les formules

$$\begin{aligned} \lambda x &= (a-\rho)(a-\rho_1), \\ \lambda y &= (b-\rho)(b-\rho_1), \\ \lambda z &= (c-\rho)(c-\rho_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda t(\rho-\rho_1) = {} & \sqrt{(a-\rho)(b-\rho)(c-\rho)(d-\rho_1)(e-\rho_1)(f-\rho_1)} \\ & \pm\sqrt{(a-\rho_1)(b-\rho_1)(c-\rho_1)(d-\rho)(e-\rho)(f-\rho)}, \end{aligned}$$

x, y, z, t désignant les coordonnées homogènes du point et λ un facteur de proportionnalité; a, b, c, d, e, f sont les paramètres des six tangentes à la conique qui, prises ensemble, constituent la courbe de passage.

En remplaçant, pour abréger, $a-\rho$, $a_1-\rho$; $b-\rho$, $b-\rho_1$; ... par a, a', b, b',

les équations de la forme

$$\frac{(\alpha-\rho)\sqrt{abc'd'e'f'} \mp (\alpha-\rho_1)\sqrt{a'b'cdef}}{\rho-\rho_1} = 0,$$

où α est un paramètre variable, représentent les courbes de contact d'un système de quadriques et de la surface. On obtient ainsi quinze systèmes; les quinze autres sont représentés par des équations un peu plus compliquées.

Le lieu des points pour lesquels l'une des coordonnées ρ, ρ_1 est constante est une section plane de la surface, section passant par un des points singuliers et enveloppant le cône des tangentes en ce point.

Picard. — Sur les surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions abéliennes de deux paramètres.

L'auteur considère des surfaces n'ayant pas d'autres singularités que des courbes doubles, le long desquelles les deux plans tangents à la surface sont distincts. Le *genre* d'une surface d'ordre n est, d'après Clebsch, le nombre des coefficients restant arbitraires dans une surface d'ordre $n-4$ passant par la courbe double.

M. Picard montre que, si une telle surface jouit de cette propriété, que les coordonnées de l'un quelconque de ses points puissent s'exprimer par des fonctions abéliennes de deux paramètres, son genre est au plus égal à l'unité; il étend par là aux surfaces une propriété bien connue des courbes planes, propriété dont il donne d'ailleurs une démonstration nouvelle extrêmement simple.

Dillner (G.). — Sur un moyen général de déterminer les relations entre les constantes contenues dans une solution particulière, et celles que contiennent les coefficients rationnels de l'équation différentielle correspondante. (1498).

Tome XCIII; 1881, 2e semestre.

N° 1; 4 juillet.

La séance est levée, en signe de deuil, à cause de la mort de M. Henri Sainte-Claire Deville.

N° 2; 11 juillet.

Faye. — Sur la formation des queues des comètes. (11).

Villarceau (Y.). — Théorie de la flexion plane des solides, et conséquences relatives tant à la construction des lunettes astronomiques qu'à la réglementation de ces appareils, pour les

affranchir des déviations de l'axe optique produites par la flexion. (14).

Janssen. — Note sur les photographies de la comète *b* 1881 et sur les mesures photométriques prises sur cet astre. (28).

Cruls. — Sur la comète de 1881, observée à l'Observatoire impérial de Rio-Janeiro. (32).

Trépied (*C.*). — Observations de la comète *b* 1881, faites à l'Observatoire d'Alger. (34).

Wolf (*C.*). — Observations de la comète *b* 1881. (36).

Thollon. — Observations spectroscopiques de la comète *b* 1881. (37).

Picart (*A.*). — Essai d'explication des queues de comètes. (39).

Prazmowski. — Sur la polarisation de la lumière des comètes. (41).

Gruey. — Nouvelle méthode pour déterminer certaines constantes du sextant. (41).

Poincaré (*H.*). — Sur les groupes kleinéens. (44).

L'auteur montre comment ses recherches sur les groupes fuchsiens et kleinéens se relient à la géométrie pseudo-sphérique de Lobatchefsky.

Dillner (*G.*). — Sur un moyen général de déterminer les relations entre les constantes contenues dans une solution particulière et celles que renferment les coefficients rationnels de l'équation différentielle correspondante. (47).

Brassine. — Sur les trois axes centrifuges. (49).

N° 3; 18 juillet.

Tisserand et *Bigourdan.* — Observations de la comète *b* 1881 faites à l'Observatoire de Paris. (106).

Villarceau (*Y.*). — Théorie de la flexion plane des solides, et conséquences relatives tant à la construction des lunettes astronomiques qu'à la réglementation de ces appareils, pour les

affranchir des déviations de l'axe optique produites par la flexion. (107).

Jordan (*C.*). — Sur la réduction des formes quadratiques. (113).

Dans trois Communications successives (18 juillet, 25 juillet, 1er août), l'auteur traite de la réduction des formes quadratiques, de leur équivalence, et de la représentation d'un nombre ou d'une forme quadratique par une autre forme quadratique.

Voici d'abord son point de départ :

Une substitution

$$S = \begin{vmatrix} x_1 & \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n & \alpha_{n1}x_1 + \ldots + \alpha_{nn}x_n \end{vmatrix}$$

de déterminant δ est réduite si l'on a identiquement

$$\begin{aligned} &N(\alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n) + \ldots + N(\alpha_{n1}x_1 + \ldots + \alpha_{nn}x_n) \\ &\quad = \mu_1 N(x_1 + \varepsilon_{12}x_2 + \ldots + \varepsilon_{1n}x_n) + \mu_2 N(x_2 + \varepsilon_{23}x_3 + \ldots) + \ldots + \mu_n N(x_n). \end{aligned}$$

$N(x)$ représentant la norme de x, $\mu_1, \ldots, \mu_n$ étant des quantités positives satisfaisant aux relations

$$\mu_{k+1} \overline{\gtrless} \frac{1}{2}\mu_k, \quad \mu_1\mu_2\ldots\mu_n = N(\delta),$$

et $\varepsilon_{12}, \ldots, \varepsilon_{n-1,n}$ des quantités complexes dont la norme ne surpasse pas $\frac{1}{2}$.

Toute substitution, multipliée par une substitution convenable à coefficients entiers, donne une substitution réduite.

Une forme G, algébriquement équivalente à une forme F, sera dite réduite par rapport à F si, parmi les substitutions qui transforment F en G, il en est une qui soit réduite.

Soient maintenant F une forme quadratique à n variables, à coefficients quelconques et de discriminant $\Delta \gtrless 0$, et G une forme quadratique à coefficients entiers complexes, de même déterminant, et qui soit la transformée de F par la substitution réduite S; M. Jordan montre que deux cas peuvent se présenter: ou bien tous les coefficients de la réduite G sont limités (les réduites de cette sorte sont dites *ordinaires*); ou bien certains coefficients cessent d'être limités, et en revanche d'autres coefficients sont nécessairement nuls (réduites singulières).

Une fois cette étude faite, le problème : *Étant données deux formes quadratiques* F, G *à n variables et de même discriminant* $\Delta \gtrless 0$, *reconnaître si elles sont équivalentes, et déterminer les substitutions à coefficients entiers qui transforment* F *en* G, se trouve résolu par le théorème suivant :

Toute substitution à coefficients entiers qui transforme F *en* G *est un produit de substitutions à coefficients entiers et limités* (*en fonction des coefficients de* F *et de* G), *dont la première transforme* F *en* G, *chacune des suivantes transformant* G *en elle-même.*

Enfin le problème général de la transformation d'une forme quadratique en une autre de même nombre de variables et celui de la recherche des représentations d'une forme à m variables par une forme à n variables ($m < n$) se ramènent immédiatement au cas de l'équivalence dont le théorème précédent donne la solution.

Gyldén. — Sur l'intégration d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre dont dépend l'évection. (127).

Il s'agit d'une équation de la forme

$$\frac{d^2\rho}{dv_0^2} + \rho(1 + \Psi_1) = \Psi_0 + \Psi_2\rho^2 + \ldots,$$

qu'on veut intégrer pour les petites valeurs de ρ, les Ψ étant des séries de la forme

$$\beta_0 + \beta_1 \cos(\lambda_1 v_0 + b_1) + \beta_2 \cos(\lambda_2 v_0 + b_2) + \ldots;$$

l'auteur montre comment l'intégration, par approximation, dépend de l'intégration d'une équation de Lamé.

Flammarion. — Sur les queues des comètes. (135).

André (C.). — Sur la vision des étoiles à travers les comètes. (137).

Poincaré. — Sur une fonction analogue aux fonctions modulaires. (138).

Considérant l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\left[\sum_{i=0}^{i=n} \frac{B_i}{x-a_i} - \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{(x-a_i)^2}\right],$$

où

$$\sum B_i = \sum a_i b_i - \frac{n+1}{4} = \sum a_i^2 B_i - \frac{1}{2}\sum a_i = 0,$$

et où

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2,$$

l'auteur définit une suite de fonctions qui jouent, par rapport aux intégrales de l'équation différentielle, le même rôle que les fonctions modulaires par rapport aux intégrales elliptiques.

N° 4; 25 juillet.

Mouchez. — Sur la comète b de 1881. (173).

Lœwy et Périgaud. — Détermination de la flexion horizontale, de la flexion latérale et de la flexion de l'axe instrumental du cercle méridien de Bischoffsheim, à l'aide du nouvel appareil. (174).

Jordan (C.). — Sur l'équivalence des formes quadratiques. (181).

Sylvester. — Sur les covariants irréductibles du quantic binaire du huitième ordre. (192).

Dans cette Communication et dans une Communication postérieure (22 août) M. Sylvester cherche à établir que, pour la forme binaire du huitième ordre, nul covariant irréductible du *degré-ordre* 10.4 ne peut exister : M. Von Gall avait rencontré un tel covariant qu'il n'avait pas réussi à décomposer. (*Math. Annalen,* 1880 et 1881).

Bigourdan (*G.*). — Éléments paraboliques de la comète *b*, 1881. (197).

Bigourdan (*G.*). — Observation de la comète *c* 1881 (découverte par M. Schaeberle à Ann-Arbor), faite à l'Observatoire de Paris. (198).

Henry. — Observation de la comète Schaeberle (*c* 1881), faite à l'équatorial ouest du jardin de l'Observatoire de Paris. (199).

Picart (*A.*). — Considérations sur les forces de la nature. Inadmissibilité de l'hypothèse proposée par M. Faye pour l'explication des queues des comètes. (199).

Callandreau (*O.*). — Remarques sur le calcul des perturbations relatives, d'après la méthode de M. Gyldén. (201).

N° 5; 1er août.

Faye. — Seconde Note sur la formation des queues des comètes. (229).

Jordan (*C.*). — Sur la représentation d'un nombre ou d'une forme quadratique par une autre forme quadratique. (234).

Bigourdan (*G.*). — Éléments et éphémérides de la comète *c* 1881 (Schaeberle). (258).

Thollon. — Observations spectroscopiques sur les comètes *c* et *b* 1881. (259).

Tacchini. — Sur les spectres des comètes Cruls et Schaeberle. (261).

Prazmowski. — De la constitution des comètes. (262).

Le Paige (*C.*). — Sur la théorie des formes trilinéaires. (264).

Sur la liaison entre la théorie de ces formes et celle des cubiques.

N° 6; 8 août.

Wolf. — Les étalons de poids et mesures de l'Observatoire et les appareils qui ont servi à les construire; leur origine, leur histoire et leur état actuel. (297).

Poincaré. — Sur les fonctions fuchsiennes. (301).

L'auteur est parvenu à cette conclusion, que les Communications précédentes avaient fait pressentir :

Toute équation différentielle linéaire à coefficients algébriques s'intègre par les fonctions zétafuchsiennes.

Les coordonnées des points d'une courbe algébrique quelconque s'expriment par des fonctions fuchsiennes d'une variable auxiliaire.

Bjerknes. — Sur l'imitation, par la voie hydrodynamique, des actions électriques et magnétiques. (303).

N° 7; 16 août.

Jamin. — Sur les apparences cométaires.

N° 8; 22 août.

Mouchez. — Observations méridiennes des petites planètes et de la comète *b* de 1881, faites à l'Observatoire de Paris pendant le deuxième trimestre de l'année 1881. (357).

Faye. — Remarques au sujet d'une Note de M. Jamin sur les comètes. (362).

Faye. — Sur l'analyse spectrale appliquée aux comètes. (361).

Faye. — Sur la nature de la force répulsive exercée par le Soleil. (362).

Sylvester. — Sur les covariants irréductibles du quantic binaire du huitième ordre.

Schwedoff (*Th.*). — Sur les lois de la formation des queues cométaires. (373).

Willotte. — Sur un cas particulier de la théorie du mouvement d'un solide invariable dans un milieu résistant. (376).

Tacchini. — Observations solaires faites à l'Observatoire royal du Collège Romain, pendant le premier trimestre de 1881. (380).

Tacchini. — Observations des taches et des facules solaires, du mois d'avril au mois de juillet 1881. (382).

Thollon. — Études spectroscopiques sur les comètes *b* et *c* 1881. (383).

Égoroff. — Recherches sur les raies telluriques du spectre solaire. (385).

N° 9; 29 août.

Faye. — Note accompagnant la présentation du premier Volume de son « Cours d'Astronomie à l'École Polytechnique ». (397).

Govi (G.). — Sur une très ancienne application de l'hélice comme organe de propulsion. (400).

N° 10; 5 septembre.

Zenger. — Le spectroscope à vision directe appliqué à l'Astronomie physique. (429).

Coggia. — Observations de la comète de Schaeberle (*c* 1881), faites à l'Observatoire de Marseille à l'aide d'un équatorial de $0^m,26$ d'ouverture. (436).

Tempel. — Observations de la comète d'Encke. (438).

Lœwy. — Remarques sur des observations de la même comète, faites par M. Otto Struve, par M. Winnecke et par M. Hartwig. (438).

Respighi. — Sur la lumière des comètes. (439).

Cruls. — Sur les observations des météores du 25 juillet au 30 juillet 1881. (440).

N° 11; 12 septembre.

Villarceau (*Y.*). — Remarques à l'occasion du Mémoire de MM. Lœwy et Périgaud sur la flexion des lunettes. (449).

N° 12; 19 septembre.

Thomson (*W.*). — Sur les résistances relatives que l'on doit donner, dans les machines dynamo-électriques, aux bobines actives, aux électro-aimants inducteurs et au circuit intérieur. (474).

Melsens. — Sur le passage des projectiles à travers les milieux résistants, sur l'écoulement des solides et sur la résistance de l'air au mouvement des projectiles. (485).

N° 13; 26 septembre.

Le Paige. — Sur les formes trilinéaires. (509).

Suite des recherches de l'auteur sur la liaison entre la théorie des formes trilinéaires et celle des cubiques circonscrites à un triangle; formules qui conduisent à l'expression des coordonnées d'un point de la cubique au moyen des fonctions elliptiques.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von C.-W. BORCHARDT.

Tome LXXXIX; 1880.

Weierstrass (*K.*). — Recherches sur les fonctions $2r$-uplement périodiques de $2r$ variables. (1-8).

Ce Mémoire se rattache à la publication, faite par le regretté M. Borchardt, des Leçons de M. Liouville sur les fonctions doublement périodiques. Insistons sur ces deux théorèmes :

« Soit $f(u_1, \ldots, u_r)$ une fonction quelconque $2r$-uplement périodique; supposons qu'au nombre de ses systèmes de périodes il se trouve aussi tous les systèmes des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_r$ (des mêmes variables et qui forment un système de r fonctions $2r$-uplement périodiques appartenant à la même classe et indépendantes les unes des autres) : cela étant, il subsiste entre f et $f_1, f_2, \ldots, f_r$ une équation irréductible dont le degré par rapport à f est égal à m ou à un diviseur de m (où m est un nombre préalablement défini). »

« Au nombre des fonctions $2r$-uplement périodiques de la classe à laquelle f_1, $f_2, \ldots, f_r$ appartiennent, il y en a une infinité qui sont liées avec $f_1, f_2, \ldots, f_r$ par une équation irréductible de $m^{ième}$ degré; soit f_{r+1} une quelconque d'entre elles: toute fonction $f(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ qui jouit de la propriété signalée dans le théorème précédent est rationnellement exprimable par les $r+1$ fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_r, f_{r+1}$. »

Hermite (*Ch.*). — Sur l'intégration de l'équation différentielle de Lamé. (Extrait d'une Lettre adressée à M. E. Heine). (9-18).

La Lettre s'occupe de la question que M. Heine avait adressée à M. Hermite : comment l'intégrale de l'équation de Lamé

$$D_\xi y = [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2\xi + h]y$$

peut se déduire, dans le cas limite du module égal à l'unité, de la solution que M. Hermite en a donnée au moyen des fonctions elliptiques. Cette solution est représentée par la formule $y = CF(\xi) + C'F(-\xi)$ où $F(\xi)$, est une fonction doublement périodique de seconde espèce; il s'agit donc, si l'on introduit la variable $x = \operatorname{sn}\xi$, de voir quelle transformation analytique se trouve amenée par la supposition de $k = 1$. C'est cette recherche que M. Hermite fait en se plaçant à un point de vue moins particulier et en considérant en général les fonctions uniformes possédant la propriété caractéristique de $F(\xi)$, à savoir :

$$F(\xi + 2K) = \mu F(\xi), \quad F(\xi + 2iK') = \mu' F(\xi),$$

où μ et μ' sont des facteurs constants.

Heine (*E.*). — Quelques applications du calcul des résidus de Cauchy. (19-39).

I. *Sur les intégrales eulériennes.* — M. Heine étudie une fonction $G(a)$ définie par l'équation

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx = \frac{1}{G(a)},$$

où a est un nombre complexe à partie réelle positive. L'équation

$$G(a) = aG(a+1),$$

à laquelle elle satisfait pour les nombres a à partie réelle positive, sert à la définir pour les autres valeurs de a.

II. *Sur les fonctions coniques.* — Pour faciliter le traitement de problèmes sur le potentiel d'un cône, M. Mehler a introduit des fonctions dont il a découvert certaines transformations importantes pour leur applicatiou et déduites par lui au moyen de différentes méthodes. (*Voir* à ce sujet : Heine, ***Handbuch der Kugelfunctionen***, I, § 70.) Ces transformations s'obtiennent sans beaucoup de calcul par un procédé uniforme, à savoir par la méthode de Cauchy mise à profit comme dans le premier numéro.

III. *La formule d'interpolation de Lagrange.* — Sur la possibilité de remplacer l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \psi(x)dx$ par l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \varphi(x)dx$ si $\varphi(x)$ est la fonction donnée par la formule d'interpolation de Lagrange.

IV. ***Développement en séries des fonctions d'une variable.*** — Il s'agit de développer une fonction quelconque $f(\xi)$ suivant une espèce donnée de fonctions $\theta(\alpha, \xi)$ [par exemple $\cos(\alpha\xi)$, $\sin(\alpha\xi)$, $J_1(\alpha\xi)$, ...] qui contient un paramètre α qu'on a à remplacer par toutes les racines d'une équation transcendante donnée $\varpi(\alpha) = 0$ (par ex., $\sin\alpha\pi = 0$, ...).

Dans tous les cas connus on peut trouver le développement même, pourvu qu'on en ait démontré la possibilité et que la série cherchée converge uniformément. Mais Heine fait voir que ces théorèmes ont une telle liaison avec les théorèmes de Cauchy que, pour un certain nombre de fonctions, il en résulte la possibilité de les développer suivant les fonctions $\theta(\alpha, \xi)$.

Frobenius (*G.*). — Contribution à la théorie de la transformation des fonctions thêta. (40-46).

Signalons ces deux théorèmes : « D'une substitution qui transforme une forme bilinéaire alternée au déterminant 1 dans le *n*-uple d'elle-même, on obtient toutes les formes équivalentes, en la composant avec deux substitutions qui changent cette forme en elle-même. » — « Si deux substitutions transforment une forme bilinéaire unimodulaire de ν paire de variables dans le *n*-uple d'une autre forme unimodulaire, le produit du $\alpha^{\text{ième}}$ invariant de l'une et du $(\nu - \alpha + 1)^{\text{ième}}$ invariant de l'autre est égal à n.

Hunyady (*E.*). — Contribution à la théorie des surfaces du second ordre. (47-69).

Le Mémoire étudie les différentes formes analytiques de la condition qui exprime que dix points sont situés sur une surface du second ordre; en particulier, M. Hunyady développe la dépendance mutuelle qui subsiste entre les équations de condition et qui est souvent difficile à démêler en présence de déterminants à un nombre excessif de termes.

Hunyady (*E.*). — Sur les critères donnés par Moebius dans la théorie des sections coniques. (70-78).

Démonstration, à l'aide des méthodes de Géométrie analytique, des critères donnés par Moebius dans son ouvrage « *Der barycentrische Calcul* » et qui font reconnaître : 1° si une parabole peut être tracée passant par quatre points donnés; 2° si cinq points donnés déterminent une ellipse ou une hyperbole, 3° si cinq tangentes données enveloppent une ellipse ou une hyperbole.

Quelques erreurs qui se sont glissées dans cette Note ont été signalées par M. Durège (*Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, juin 1880).

Hunyady (*E.*). — Le théorème de Desargues concernant des triangles perspectifs. (79-81).

Borchardt (*C. W.*). — Remarque relative au Mémoire de M. Sylvester sur les déterminants composés. (82-85).

Voir *Bulletin*, 2° sér., V_2, p. 102.

Fürstenau (*E.*). — Contributions à la théorie des déterminants. (86-88).

Königsberger (*Leo*). — **Sur la réduction d'intégrales abéliennes à des formes d'intégrales moins élevées, en particulier à des intégrales elliptiques. (89-126).**

D'abord M. Königsberger établit ce théorème qui s'attache à une formule de réduction préalablement développée : « Toute intégrale elliptique de première espèce qui appartient à une des intégrales elliptiques de la formule de réduction doit être égale à une des intégrales abéliennes de première espèce qui appartient à l'intégrale abélienne en question, ou bien il faut qu'il subsiste la relation

$$\int^{\zeta} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = \int^{x_1} F(x,y)\,dx,$$

où ζ est une fonction rationnelle de x_1 et y_1, si y_1 désigne la valeur de y pour $x = x_1$ et où l'irrationnelle $\eta_1 = \sqrt{(1-\zeta^2)(1-c^2\zeta^2)}$ est, de même, rationnellement exprimable par x_1 et y_1. » Ainsi la question de la réduction générale des intégrales abéliennes se trouve réduite à celle de la réduction d'une intégrale de première espèce à une intégrale elliptique de première espèce. Un autre théorème donne les conditions nécessaires pour la réduction : « Pour une fonction algébrique déterminée par une équation

$$F_0(x)Y^{km} + F_m(x)Y^{(k-1)m} + F_{2m}(x)Y^{(k-2)m} + \ldots + F_{km}(x) = 0,$$

l'intégrale de première espèce $Y\,dx$ ne peut être réductible à une intégrale elliptique que lorsque m est égal à 2, 3, 4, 6, et alors les intégrales de réduction elliptiques seront dans les trois derniers cas :

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^3-1}}, \quad \int \frac{dz}{\sqrt{z^4-1}}, \quad \int \frac{dz}{\sqrt{z^6-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t(t^3-1)}}. \text{ »}$$

Puis M. Königsberger étudie les conditions suffisantes pour la solution du problème; cette recherche se fait séparément et au long pour les valeurs différentes de m. Enfin la dernière Partie du Mémoire est consacrée à une généralisation des recherches antérieures.

Petersen (*Julius*). — La solution steinérienne du problème de Malfatti. (127-135).

La solution du problème de Malfatti, publiée par Steiner en 1826 au Tome I du même Journal, sans analyse et sans démonstration, a été démontrée pour la première fois par M. Schroeter en 1873, t. 77 du Journal, à l'exclusion d'autres moyens que les considérations qui précèdent chez Steiner la communication de sa solution.

Mais la déduction de M. Schroeter n'est guère plus simple. C'est pourquoi l'auteur fait part aux lecteurs du Journal de deux méthodes pour déduire, par la voie de la Géométrie synthétique, la solution steinérienne. L'une de ces méthodes était déjà contenue dans le Recueil de problèmes de M. Petersen : « Méthodes et Théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques ». (Voir *Bulletin*, V_1, p. 265), tandis que l'autre n'a pas encore été publiée jusque-là

Milinowski. — Sur la théorie des polaires des courbes et surfaces du troisième ordre. (136-150).

M. Sturm a établi (t. 88 du Journ., *Bulletin* V_2, p. 107) ce théorème : « La surface satellite d'un point P par rapport à une surface de troisième ordre touche la première surface polaire de ce point suivant une section conique située dans le plan polaire de P. » En coupant par un plan les surfaces nommées, on obtient le théorème suivant : « La section conique coordonnée d'un point P par rapport à une surface du troisième ordre touche la première polaire de ce point dans ses points de rencontre avec la deuxième polaire. »

La déduction de M. Sturm pour les surfaces cubiques ne se prête pas à la démonstration du théorème dans le plan. M. Cremona l'a démontré par le calcul dans son livre *Introduzione*, etc. M. Milinowski déduit actuellement la proposition par des considérations toutes nouvelles et qui ne sortent pas du plan; en même temps il parvient à établir ainsi les propriétés principales des polaires et des centres des moyennes harmoniques.

Fuchs (*L.*). — Sur une classe de fonctions à plusieurs variables qui doivent leur naissance à l'inversion de solutions des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels. (151-169).

C'est le Mémoire cité par M. Fuchs dans les Notes qui ont paru au *Bulletin*, 2ᵉ sér., t. IV_1, p. 328. Voici comment il annonce le but qu'il a eu en vue :

« Les fonctions de plusieurs variables, qu'on nomme *abéliennes*, doivent leur naissance aux intégrales de fonctions algébriques, où l'on conçoit, d'après Jacobi, les limites supérieures de p intégrales d'une fonction algébrique convenable comme étant des fonctions de la somme de ces intégrales et de $p-1$ autres sommes formées d'une manière semblable. De même une nouvelle classe de fonctions de plusieurs variables prend naissance lorsqu'on parle des intégrales qui forment les solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients rationnels. J'ai posé d'abord le problème de rechercher la propriété des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène de $m^{\text{ième}}$ ordre si les m équations

$$\sum_{1}^{m} {}_i \int_{\zeta_i}^{z_i} f_a(z)\,dz = u_a, \quad (a = 1, 2, \ldots, m),$$

[où $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ désignent des constantes, $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$ un système fondamental de solutions de l'équation différentielle] servent à définir z_1, $z_2 \ldots, z_m$ comme fonctions analytiques de $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

» J'ai achevé ce problème pour les équations différentielles du second ordre et je me permets de publier les résultats auxquels je suis parvenu. »

Stahl (*Hermann*). — Sur la solution du problème d'inversion de Jacobi (170-184).

Le problème consiste, d'après Riemann, à représenter dans les équations

$$v_k = \sum_{1}^{p} {}_i \int^{(s_i, z_i)} du_k, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, m)$$

des quotients simples des ϑ aux arguments $v_1, v_2, \ldots, v_g$, augmentés de parties fractionnaires de systèmes de périodes ayant le dénominateur m d'une manière algébrique et symétrique par les coordonnées (s_i, z_i) des limites supérieures. — La solution simple et symétrique de M. Stahl correspond exactement aux équations finales de M. Weierstrass pour les intégrales hyperelliptiques et pour $m = 2$. Une idée de Riemann et cette façon des équations du problème d'inversion dont MM. Prym et Weber se sont servis ont montré à M. Stahl le chemin qu'il fallait prendre pour obtenir la fonction algébrique symétrique dans les coordonnées des limites supérieures.

§ 1. Relations entre les fonctions ϑ et les fonctions radicales. — § 2. Relations algébriques entre des fonctions radicales. — § 3. La solution du problème d'inversion.

Frobenius (*G.*). — Sur le théorème d'addition des fonctions ϑ de plusieurs variables. (185-220).

§ 1. Définitions. — Caractéristique est le nom d'un système de 2ρ nombres entiers

$$A = \begin{bmatrix} \nu_1, & \nu_2, & \nu_\rho \\ \mu_1, & \mu_2, & \mu_\rho \end{bmatrix}$$

rangés en deux lignes et ρ colonnes. Une caractéristique s'appelle *paire* ou *impaire*, suivant que l'expression $|A| = \mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2 + \ldots + \mu_\rho\nu_\rho$ est paire ou impaire. Deux caractéristiques sont nommées *égales* si leurs nombres correspondants sont égaux; *congrues* si ces nombres sont congrus (mod. 2), etc. — § 2. Systèmes göpéliens de caractéristiques. — § 3. Le théorème d'addition. — Soient donnés un système göpélien de $r = 2^\rho$ caractéristiques et les fonctions $\vartheta_\alpha(u)$ qui leur correspondent $(\alpha = 0, 1, \ldots, r-1)$. Cela étant, chacun des r produits

$$\vartheta_\varepsilon(u+v).\vartheta_\lambda(u+w)$$

est rationnellement exprimable par les quantités $\vartheta_\alpha(u+v+w)$, $\vartheta_\alpha(v+w)$, $\vartheta^\alpha(u)$, $\vartheta_\alpha(v)$, $\vartheta_\alpha(w)$, $\vartheta_\alpha(0)$. En appliquant ce théorème à la déduction donnée par M. Weber dans son travail sur la théorie de la transformation des fonctions thêta, on trouve que chacune des r fonctions transformée Θ peut être représentée comme fonction entière du degré k des r fonctions ϑ_α (où k est le degré de la transformation). En même temps on obtient le théorème analogue sur la multiplication sans qu'on ait besoin de la composer de deux transformations supplémentaires. — § 4. Conséquences du théorème d'addition. — § 5. Systèmes fondamentaux de caractéristiques. — § 6. — Le théorème d'addition. — Les deux derniers paragraphes s'occupent de la formule établie par M. H. Stahl (*Journ.*, t. 88, p. 177) et désignée par ce géomètre comme théorème d'addition des fonctions ϑ.

Hettner (*G.*). — Contribution à la théorie de la moyenne arithmético-géométrique de quatre éléments (221-246).

L'auteur développe, par une méthode qui lui est particulière et qui est en quelque sorte plus générale que celle de Borchardt, le résultat principal de cette théorie.

Pasch. — Sur certains déterminants qui se produisent dans la théorie des sections coniques. (247-251).

Pasch. — Une proposition algébrique avec ses applications géométriques. (252-256).

Soit $G(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ une fonction entière de x du degré n et soit $\alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \ldots + \alpha_m$ $(m < n)$ un diviseur de $G(x)$ du degré m : il s'évanouira tous les déterminants du degré $n - m + 2$ pris dans le système de $n - m + 2$ lignes :

$$\begin{matrix} \alpha_0 & \alpha_1 & . & . & . & \alpha_m & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & . & . & \alpha_{m-1} & \alpha_m & 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & \alpha_{m-1} & \alpha_m \\ a_0 & a_1 & . & . & . & . & . & . & . & . & a_{n-1} & a_n \end{matrix}$$

Radicke (A.). — Sur la théorie des nombres d'Euler. (257-261).

Les formules récurrentes, connues depuis longtemps pour les nombres de Bernoulli, exigeaient, pour le calcul de la valeur d'un quelconque d'entre eux, la connaissance de la valeur de tous ceux qui précèdent. MM. Seidel et Stern en ont découvert d'autres qui ne demandent que la connaissance de quelques-uns des nombres de Bernoulli qui précèdent immédiatement. M. Radicke montre qu'il existe des formules récurrentes analogues à celles-ci pour les nombres d'Euler ainsi que pour les sommes des puissances de tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à un nombre quelconque x.

Frobenius (G.). — Sur la série de Leibnitz (262-264).

Soit S_n une quantité dépendant de n; supposons que, n croissant indéfiniment, le quotient $\frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_{n-1}}{n}$ tende à une limite finie déterminée; alors, si x tend en croissant continuellement vers 1, $(1 - x), (S_0 + S_1 x + S_2 x^2 + \ldots)$ convergera vers la même limite.

Killing (W.). — Le calcul dans les formes non euclidiennes de l'espace. (265-287).

Outre la formule euclidienne de l'espace, il faut distinguer celle de Lobatchefsky où la droite est infinie et la somme des angles d'un triangle différente de deux angles droits; celle de Riemann où la droite est fermée et le plan sépare l'espace; et la troisième appelée par M. Killing la forme polaire de l'espace de Riemann et qui n'est pas séparée par le plan. Les procédés qui ont fait découvrir ces trois formes ne tranchent pas la question de savoir si les quatre formes connues sont les seules qui satisfassent aux hypothèses d'Euclide, à l'exception des deux derniers axiomes, ou si l'on peut en trouver de nouvelles. M. Killing démontre que, pour le domaine du réel, il n'existe que ces quatre formes, mais que, dans la Géométrie de Lobatchefsky, plusieurs possibilités sont imaginables pour un domaine idéal qui se lie avec le réel à l'infini.

Introduction. — Formes de l'espace à deux dimensions. — Formes de l'espace à trois dimensions. — Appendice.

Voigt (W.). — Théorie du point lumineux. (288-321).

Examinant l'admissibilité de la théorie des phénomènes de diffraction d'après

Fresnel, M. Voigt s'est trouvé amené à traiter, à l'aide de la théorie de l'élasticité, la loi suivant laquelle un point lumineux propage ses vibrations en tous sens. — En tirant avec Fresnel ordinairement de la loi de vibration $f(t)$ d'un point lumineux celle qui subsiste pour un endroit à la distance r, à savoir $\frac{c}{r}\cdot f\left(t-\frac{a}{r}\right)$, où a désigne la vitesse de propagation, on emploie un procédé qui n'est presque point fondé : c'est ce qu'on voit déjà en considérant que cette formule n'a pas égard à la position mutuelle de r et de la direction du mouvement. Toutefois cette direction doit nécessairement être d'une grande influence, surtout quand, en Optique, on suppose le milieu comme incompressible. Dans ce cas, on est même aisément porté à penser que pour les directions différentes le mouvement pourrait se propager non seulement avec des intensités différentes, mais encore avec des vitesses différentes, par exemple avec une vitesse infiniment grande dans la direction du déplacement même.

Le problème traité par M. Voigt a été énoncé par lui comme il suit: « Dans un milieu illimité, élastique, mais incompressible (éther) qui, pour le temps $t = 0$, ne possède nulle part ni déplacements ni vitesses, une sphère fait des oscillations, selon une loi donnée, mais indépendante de la longitude géographique sur elle. Les molécules de l'éther contiguës à la sphère lui adhèrent fortement. Déterminer l'état du milieu entier à une période quelconque. » On a supposé que les molécules voisines se meuvent avec la sphère, pour pouvoir appliquer les résultats au cas, bien imaginable pour un point lumineux, qu'une partie globiforme de l'éther même ait un mouvement donné. La méthode d'intégration dont l'auteur s'est servi a été inventée par Riemann et se trouve dans son Mémoire sur la propagation d'ondes planes de l'air à amplitude finie d'oscillations (*Œuvres complètes*, p. 145).

I. Propagation de vibrations tordantes. — La sphère rigide exécute des oscillations tordantes données auquelles se conforment complètement les parties immédiatement contiguës du milieu. Déterminer l'état du milieu en un endroit quelconque à une période quelconque. — II. Propagation d'oscillations rectilignes. 1. Construction des équations différentielles et séparation des inconnues. 2. Intégration générale des équations pour λ et φ. 3. Déterminations de $\overline{\varphi_t}$, $\overline{\frac{d\varphi_t}{de}}$ et de λ par les grandeurs données. 4. Calcul des quantités cherchées ρ et ω au moyen des quantités trouvées φ et λ.

Voigt (*W.*). — Sur la théorie de la diffraction de Fresnel. (322-331).

La théorie de Fresnel (*Mém. de l'Acad.*, t. V) fournit des résultats qui conviennent complètement avec l'expérience, eu égard aux intensités de la lumière, mais elle entraîne un paradoxe eu égard à la phase de la lumière propagée, puisqu'elle la laisse indéterminée à un multiple quelconque de $\frac{\pi}{2}$ près. Cette circonstance a été pleinement discutée par M. Voigt (t. III des *Annales de Wiedemann*) et en même temps il a prouvé que nulle hypothèse auxiliaire qui laisse subsister l'idée fondamentale de Fresnel ne permet de réparer la faute; de plus il a développé des formules qui donnent les mêmes intensités que celles de Fresnel, mais aussi la phase véritable. Depuis la publication de ces recherches, qui partaient des équations différentielles d'élasticité, M. Voigt a découvert un

chemin beaucoup plus court que celui dont il s'était alors servi pour parvenir aux équations du problème, et cette nouvelle méthode fait l'objet du Mémoire que nous avons sous les yeux. — M. Voigt insiste encore sur l'origine de la faute commise par Fresnel ; il la trouve dans la méthode employée par Fresnel, pour calculer l'effet d'une surface lumineuse, ou plus généralement dans la disconvenance du principe de la coexistence de petits mouvements comme base universelle de l'Optique.

Mertens (F.) — Contribution à la théorie des formes quadratiques à déterminant positif. (332-338).

Nouvelle démonstration de la proposition, qui est fondamentale dans la théorie des formes binaires quadratiques à déterminant positif, non carré, que deux formes réduites de déterminants égaux ne peuvent être proprement équivalentes que quand elles appartiennent à la même période.

Laguerre (E.). — Sur quelques théorèmes de M. Hermite ; extrait d'une Lettre adressée à M. Borchardt. (339-342).

Stieltjes. — Note sur un nouvel algorithme. (343-344).

E. LAMPE.

ÖFVERSIGT AF KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR (¹).

Tome XXXIII ; 1876.

Edlund (E.). — Remarques touchant la dilatation galvanique. (N° 1, 5-16).

Björling (C.-F.-E.). — Sur les lignes réciproques des foyers. (N° 1, 17-24).

On donne dans un plan une courbe algébrique réelle du $n^{ième}$ ordre $C_n = 0$, en même temps qu'un point O, dont les coordonnées rectangulaires sont $x = h$, $y = k$. Si I, J sont les points circulaires à l'infini, et que les points où les lignes OI, OJ coupent la courbe soient respectivement désignés par

$$i_1, i_2, \ldots, i_n; \quad j_1, j_2, \ldots, j_n,$$

l'auteur appelle les n^2 lignes

$$\begin{array}{c} i_1 j_1, \; i_2 j_1, \; \ldots \; i_1 j_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ i_n j_1, \; i_n j_2, \; \ldots, \; i_n j_n, \end{array}$$

(¹) Voir *Bulletin*, I_2, 71.

les lignes réciproques des foyers, ou les lignes F de la courbe C_n par rapport à O.

Dunér (*N.-C.*). — Recherches sur le noyau et sur les parties les plus voisines du noyau de la grande comète de 1874. (N° 1, 25-28).

Gyldén (*H.*). — Transformation d'une expression contenant des transcendantes elliptiques, et application de cette transformation au développement de la fonction perturbatrice. (N° 2, 3-9).

Jäderin (*E.*). — Détermination de lieux géographiques dans l'expédition suédoise à la Novaïa Zemlia et à la mer de Kara en 1875. (N° 2, 39-56).

Gyldén (*H.*). — Sur l'influence des inégalités à longues périodes sur l'expression des perturbations absolues des comètes périodiques. (N° 3, 5-19).

Björling (*C.-F.-E.*). — Sur les covariants simultanés de quatrième ordre et de quatrième classe relatifs à deux coniques. (N° 3, 21-27).

Mittag-Leffler (*G.*). — Méthode pour représenter analytiquement une *fonction de caractère rationnel,* qui reste toujours infinie seulement en quelques *points d'infini* désignés d'avance, dont *les constantes* sont données à volonté. (N° 6, 3-16).

Mittag-Leffler (*G.*). — Méthode pour déduire, dans la théorie des fonctions elliptiques, les doubles produits infinis des formules de multiplication. (N° 6, 17-25).

Nyström (*C.-A.*). — Comparaison quantitative entre l'électricité de frottement et l'électricité galvanique, au point de vue de la tension. (N° 6, 61-65).

Daug (*H.-Th.*). — Sur la marche des changements qu'éprouve une surface lorsqu'on la déforme. (N° 8, 3-7).

L'auteur tire des méthodes de Gauss le résultat suivant :

« *Dans la déformation d'une surface, chaque tangente conserve sa place dans le plan tangent, et au point de contact et dans son voisinage immédiat toutes les courbes qui ont une tangente commune se touchent sur une seule et*

même sphère, dont la grandeur varie par suite de la déformation, mais dont le centre reste toujours situé sur la normale à la surface, tandis qu'en même temps chaque courbe en particulier se transporte sur sa sphère spéciale, dont le rayon est constant, et dont le centre est situé dans le plan tangent à la surface. »

Thiele (*T.-N.*). — Quelques théorèmes géométriques se rapportant à un problème d'Astronomie théorique. (N° 9, 3-6; danois).

Il s'agit du problème connu de la détermination de l'orbite elliptique d'un corps céleste, supposé se mouvant autour du Soleil suivant les lois de Kepler, lorsqu'on connaît deux lieux héliocentriques et les époques correspondantes t_1, t_2.

Lindman (*C.-F.*). — Remarques sur les *Tables d'intégrales définies* du D[r] Bierens de Haan (Amsterdam, 1858). (N° 9, 7-27).

Indication d'un certain nombre de fautes qui s'étaient glissées dans la première édition de cet important ouvrage.

Dahlander (*G.-R.*). — Expériences sur le refroidissement des corps dans les liquides. (N° 9, 29-57).

L'auteur résume ainsi les résultats de son travail :

La vitesse avec laquelle un corps se refroidit dans un liquide est à peu près indépendante de sa profondeur au-dessous de la surface du liquide; elle est toutefois plutôt moindre que plus grande, lorsque le corps est situé tout près de la surface.

La nature de la surface du corps plongé n'exerce qu'une minime influence sur la vitesse du refroidissement. Si l'on revêt la surface d'un enduit, le refroidissement se ralentit, tandis que la résistance au passage de la chaleur augmente.

La vitesse de refroidissement v pour un excès de température x au-dessus de la température ambiante peut s'exprimer, au moins approximatixement, par la formule

$$v = ax + bx^2,$$

a et b étant indépendants de x, mais dépendants au contraire de la nature du fluide environnant et de la température, ainsi que de la forme du corps qui se refroidit. D'après cela, l'excès de température au bout du temps t peut être représenté par la formule

$$x = \frac{1}{\left(\frac{1}{x_0} + \frac{b}{a}\right)e^{at} - \frac{b}{a}}.$$

Ces formules sont applicables au moins jusqu'à un excès de température de 60°.

La vitesse de refroidissement pour un même corps et un même fluide, avec un même excès de température, croît très rapidement avec la température du fluide.

chaque infini, outre tous les *coefficients d'indice négatif,* on connaît un certain nombre des coefficients d'indice positif. »

Mittag-Leffler (*G.*). — Sur la représentation analytique d'une fonction de caractère rationnel, ayant un *point-limite* arbitrairement choisi. (N° 1, 33-43).

Une fonction de *caractère rationnel* perd en général ce caractère pour prendre un caractère entier, lorsque la variable indépendante *croît à l'infini,* ou lorsqu'elle passe par le point $x = \frac{1}{0}$. Par une simple substitution, on peut faire en sorte que la fonction conserve son caractère rationnel pour $x = \frac{1}{0}$, mais qu'elle le perde pour une valeur *finie* arbitrairement désignée de cette variable. Cette valeur a reçu de M. Weierstrass le nom de *point-limite.*

Mittag-Leffler (*G.*). — Sur la représentation d'une fonction de caractère rationnel avec un nombre *fini* de points-limites arbitrairement désignés. (N° 2, 31-41).

Mittag-Leffler (*G.*). — Sur la question de la représentation analytique d'une *fonction de caractère rationnel par le quotient de deux séries convergentes de puissances.* (N° 3, 5-13).

Björling (*C.-F.-E.*). — Sur le lieu des centres de courbure des surfaces du second degré, exprimé sous la forme d'un contravariant simultané de deux formes quadratiques quaternaires. (N° 4, 3-7).

Forssman (*L.-A.*). — Sur l'induction unipolaire par l'action des solénoïdes. (N° 4, 15-19).

Edlund (*E.*). — Sur la liaison entre l'induction unipolaire et les phénomènes électromagnétiques de rotation. (N° 7, 3-12).

Åstrand (*J.-J.*). — Nouvelle méthode pour la résolution des équations trinômes. (N° 7, 49-56).

Lorsqu'une équation peut se ramener à la forme trinôme

$$x^n \pm (+ ax^p) \pm b = 0,$$

on commence par la ramener, à l'aide de substitutions très simples, à la forme

$$y^q \pm y \pm P = 0.$$

On peut ensuite développer les racines [illegible] forme de radi-

caux continus, ce qui donne

$$\begin{aligned}
y_1 &= (\mp P \mp y)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left[\mp P \mp (\mp P \mp y)^{\frac{1}{q}}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \left\{\mp P \mp \left[\mp P \mp (\mp P \mp y)^{\frac{1}{q}}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}^{\frac{1}{q}} \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mp y_2 &= \mp P - y^q \\
&= \mp P - (\mp P - y^q)^q \\
&= \mp P - [\mp P - (\mp P - y^q)^q]^q \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,
\end{aligned}$$

$$y_3 = \left(\mp 1 \mp \frac{P}{y}\right)^{\frac{1}{q-1}} = \ldots$$

$$y_4 = \frac{\mp P}{\mp 1 + y^{q-1}} == \frac{\mp P}{\pm\left(1 + \frac{\mp P}{\pm 1 + y^{q-1}}\right)^{q-1}} = \ldots .$$

En s'aidant des logarithmes, on parviendra souvent, par cette méthode de calcul, à déterminer au moins une partie des racines, ce qui facilite la détermination des autres.

Mittag-Leffler (*G.*). — Sur la représentation analytique de fonctions de caractère rationnel, de plusieurs variables indépendantes. (N° **10**, 3-13 et 17-31).

Tome XXXV; 1878.

Lindman (*C.-F.*). — Remarques sur les *Tables d'intégrales définies* du Dr Bierens de Haan. (Amsterdam, 1858). *Suite*. (N° **1**, 3-46).

Petterson (*O.*) et *Hedelius* (*Em.*). — Sur la chaleur spécifique du fer et du mercure. (N° **2**, 35-51).

Petterson (*O.*). — Sur la chaleur latente de l'eau à des températures au-dessous de 0°, avec quelques remarques sur la formation des glaces dans la mer. (N° **2**, 53-61).

Edlund (*E.*). — Remarques sur la force électromotrice qui se produit dans l'écoulement des liquides à travers un tube. (N° **3**, 5-9).

Hamberg (*H.-E.*). — Sur le degré variable de la transparence de l'air à Upsal. (N° **3**, 87-103).

Cronstrand (*Baltz.*). — Journal météorologique d'un voyage dans

l'Égypte, l'Arabie et la Nubie pendant les années 1836-1837. (N° 4, 15-45).

Gyldén (H.). — Lois de la rotation d'un corps solide dont la surface est recouverte d'un fluide. (N° 7, 3-18).

« Le problème traité dans ce Mémoire, en vertu de la nature même des données, n'est pas complètement déterminé, et partant n'est pas susceptible de solution sans l'établissement de quelque hypothèse. » Il en serait tout autrement si l'on indiquait la constitution du corps solide, c'est-à-dire sa figure extérieure et la distribution intérieure de la masse, ou, en d'autres termes, son potentiel par rapport aux points situés sur la surface ou dans son voisinage, ainsi que la quantité et la pesanteur spécifique du fluide.

Dans le cas qui intéresse le plus les physiciens, c'est-à-dire dans la question de la rotation de la Terre, de pareilles déterminations sont impossibles. On connaît certainement avec une assez grande exactitude la valeur de la différence entre les moments d'inertie, dans l'hypothèse toutefois de l'égalité de deux de ces moments; mais, sur la nature de la fonction potentielle relative à la surface, il règne encore une grande incertitude, si l'on ne veut pas se contenter d'admettre que la masse terrestre soit un ellipsoïde de révolution homogène. Cette supposition n'est pas non plus applicable ici, puisque l'eau des océans n'est pas, de fait, distribuée symétriquement par rapport à l'axe de rotation. Ajoutons à cela, ce qui est d'une importance capitale pour notre objet, que l'on n'est en aucune sorte autorisé à admettre que la constitution de la surface terrestre a été toujours identique, même approximativement.

Il est au contraire tout à fait vraisemblable qu'elle n'a acquis que successivement et dans les dernières périodes de son développement sa forme actuelle, qui correspond assez exactement à sa figure d'équilibre, et cela par suite de l'action de l'eau et de l'atmosphère sur ses parties solides. L'action simultanée d'autres circonstances sur la configuration de la surface terrestre est une conséquence indubitable de la présence des continents et des hautes chaînes de montagnes.

On peut très bien s'imaginer une transformation des vallées, des continents et des Océans, dans les limites de leurs différences de hauteur actuelles, telle que le moment d'inertie actuel du solide terrestre ait éprouvé des variations essentielles dans sa grandeur et dans sa direction, d'où il serait résulté alors un changement de position de l'axe de rotation de la masse de la Terre. Nous ne pouvons donc nous représenter autrement la forme de la surface terrestre dans les périodes antérieures, qu'en admettant qu'elle n'a jamais été très différente d'une sphère. A mesure que la position de l'axe de rotation dans l'intérieur de la masse terrestre est devenue plus constante, la forme ellipsoïdale s'est dessinée; mais rien ne nous force à admettre que cette forme ait toujours été aussi nettement accusée qu'elle l'est maintenant. Les influences exercées sur la position de l'axe de rotation dans le solide terrestre et dans l'espace par les changements de direction et de grandeur des axes des moments d'inertie ont été étudiés par l'auteur dans un Mémoire intitulé *Recherches sur la rotation de la Terre*, Upsal, 1871.

« Le rapport entre les masses solides et fluides du globe terrestre peut certainement s'évaluer avec approximation; rien ne dit cependant que ce rapport ait toujours été le même. D'une part, l'eau peut avoir été chimiquement combinée avec la masse solide; d'autre part, une portion considérable des particules d'eau

peut avoir été séparée du globe terrestre par la force centrifuge, tandis que la masse des particules solides a pu être accrue par la chute de corps recueillis dans l'espace. Mais lors même que le rapport entre les parties solides et liquides de la masse serait fixé avec toute la certitude désirable, ce serait encore un problème très difficile que celui de déterminer la variation de la direction des axes principaux et des moments d'inertie, qui aurait lieu par suite d'un changement de position de l'axe de rotation dans l'intérieur du globe terrestre. Il est évident toutefois que, si la masse solide de la Terre était une sphère homogène, la grandeur des moments d'inertie resterait invariable, tandis que leurs axes suivraient l'axe de rotation, et cela de telle manière que l'un des axes principaux coïncidât toujours avec l'axe de rotation. Si, au contraire, la fonction potentielle du globe terrestre était de telle nature que les différences entre les composantes des forces fussent infiniment grandes par rapport aux produits de la force centrifuge et au rapport de la masse des eaux à la masse solide de la Terre, la distribution des eaux serait évidemment la même, quelque position que prît l'axe de rotation relativement aux axes principaux. »

Björling (*C.-F.-E.*). — Sur les équivalents aux singularités d'ordres supérieurs des courbes algébriques planes. (N° 7, 33-44).

Möller (*Ax.*). — Éléments et éphéméride pour le retour de la comète de Faye en 1880. (N° 7, 45-52).

Petterson (*O.*). — Sur la variabilité de la chaleur spécifique du mercure avec la température. (N° 9, 3-16).

Backlund (*J.-O.*). — Sur une formule de la théorie des perturbations. (N° 9, 35-41).

A l'aide d'une formule donnée par M. Gyldén dans son *Recueil de Tables*, l'auteur montre comment on peut obtenir, avec une merveilleuse facilité, le développement de la fonction perturbatrice.

Tome XXXVI; 1879.

Gyldén (*H.*). — Lois de la rotation d'un corps solide, dont la surface est recouverte d'un fluide. Seconde Communication. (N° 3, 5-15).

« Le résultat de cette étude peut se résumer brièvement comme il suit. Un corps solide animé d'un mouvement de rotation, et dont la surface est recouverte d'un fluide, tend, en vertu du frottement des particules fluides contre les particules solides, à prendre un état d'équilibre, dans lequel l'axe instantané de rotation coïnciderait avec un axe principal. Avant que cet état d'équilibre soit atteint, la rotation s'effectue suivant la même loi que celle qui a lieu pour un corps solide, avec cette différence toutefois que le coefficient μn a une autre signification que dans le cas d'un corps entièrement solide, et de plus que les quantités a, n et r, ainsi que le module k, dépendant de a et de n, ne sont plus

des constantes, mais des fonctions du temps, dont il a été trouvé, dans ce qui précède, des expressions approchées. »

Mittag-Leffler (*G.*). — Intégration d'une classe d'équations différentielles linéaires. (N° 3, 17-40).

Si l'on considère une équation différentielle de la forme

$$(1) \qquad y^{(n)} = f_1(x)y^{(n-1)} + f_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + f_n(x)y,$$

l'auteur examine d'abord à quelles conditions doivent satisfaire les fonctions $f_1(x)$, ..., $f_n(x)$ pour que chaque intégrale de l'équation soit de caractère rationnel.

Cette question étant résolue, l'auteur, considérant que toute fonction de caractère rationnel peut toujours se mettre sous la forme normale d'un quotient de deux séries convergentes de puissances, se pose le problème suivant :

Les fonctions $f_1(x)$, ..., $f_n(x)$ étant supposées satisfaire aux conditions obtenues, construire un système fondamental de n intégrales particulières de l'équation (1), *qui soit tel que chacune des intégrales particulières soit le quotient de deux séries de puissances, procédant suivant les puissances entières et positives de la variable x, et absolument convergentes pour toutes les valeurs finies de cette variable.*

Pettersson (*O.*) et *Larsson* (*H.*). — Sur la dilatation de la glace. (N° 3, 65-74).

Möller (*Ax.*). — Nouveaux éléments de la planète Pandore, déduits des observations de 16 oppositions, 1858-1877. (N° 4, 3-40).

Wenström (*J.*). — Contribution à la théorie de la chaleur rayonnante. (N° 4, 41-48).

Gyldén (*H.*). — Détermination des rapports différentiels de l'anomalie vraie et du rayon vecteur dans une orbite elliptique relativement à l'excentricité. (N° 6, 3-8).

Lindman (*C.-F.*). — Réduction de quelques intégrales définies aux intégrales elliptiques. (N° 6, 9-15).

Fagerholm (*J.-A.*). — Nivellement et recherches sur les hauteurs au-dessus du niveau de la mer d'une partie des phares de la Suède, exécutés dans l'été de 1878. (N° 7, 21-37).

Rosén (*P.-G.*). — Sur la hauteur du pôle à Stockholm. (N° 8, 3-17).

Les résultats obtenus sont les suivants :

Hauteur du pôle, 1° pour la tour de l'Observatoire de l'État-Major,

$$59°20'35'',96 \pm 0'',145;$$

2° pour le cercle méridien de l'Observatoire,

$$59°20'32'',93 \pm 0'',145.$$

Eneström (*G.*). — Un critérium de convergence du commencement du XVIIIe siècle. (N° 9, 71-84).

Il s'agit d'un critérium de convergence donné par Stirling dans son Traité intitulé : *Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum* (Londini, 1730, p. 37-39). Ce critérium est non seulement le plus ancien que l'on connaisse, mais il a l'avantage de s'appliquer immédiatement aux produits infinis.

Jäderin (*Edv.*). — Méthode pour la mesure géodésique d'une base à l'aide d'un ruban d'acier. (N° 9, 103-126).

Eneström (*G.*). — Sur la découverte de la formule sommatoire d'Euler. (N° 10, 3-17).

Cette formule a porté, depuis sa découverte, tantôt le nom d'Euler, tantôt celui de Maclaurin, ces deux grands géomètres l'ayant trouvée chacun de leur côté. Mais jusqu'ici on n'avait pas fait de recherches assez complètes pour décider auquel des deux appartient réellement la priorité. M. Eneström s'est occupé de cette question historique, et il est parvenu à établir que la première publication de cette formule est due à Euler, qui l'a fait paraître, en 1738, dans les *Mémoires de Pétersbourg*, tandis que le *Treatise on Fluxions* de Maclaurin n'a vu le jour que *quatre ans plus tard*, en 1742. C'est donc à tort que, suivant les indications de Jacobi, on avait attaché à cette série le nom du géomètre écossais à la place de celui d'Euler, qui avait prévalu jusque-là.

Tome XXXVII; 1880.

Lindman (*C.-F.*). — Sur quelques équations différentielles. (N° 1, 3-8).

Mittag-Leffler (*G.*). — Sur l'intégration de certaines classes d'équations différentielles linéaires et homogènes. (N° 6, 59-77).

Intégration de l'équation de Brioschi,

$$y'' = \left[\frac{n(n+2)}{4}k^2 \operatorname{sn}^2 x + h\right] y.$$

Edlund (*E.*). — Sur la détermination quantitative du développement de chaleur d'un courant galvanique. (N° 8, 3-6).

Edlund (*E.*). — Sur la dépendance entre la force électromotrice provenant de l'écoulement d'un fluide à travers un tube et le rayon de ce tube. (N° 9, 3-11).

Lindman (*C.-F.*). — Quelques intégrales définies. (N° 9, 13-31).

Gyldén (*H.*). — Sur l'orbite d'un point qui se meut dans le plan de l'équateur d'un sphéroïde sous l'influence d'une force attractive suivant la loi de Newton. (N° 10, 5-22).

« En général, les différents corps du système solaire sont à de telles distances les uns des autres, par rapport à leurs dimensions propres, que l'on peut, dans le calcul de leur attraction mutuelle, les considérer comme des points matériels. Il y aurait toutefois exception pour les cas où une telle hypothèse sur la figure des corps attirants ne serait pas compatible avec la précision qui doit être poursuivie dans les calculs de cette nature. Dans la théorie de la Lune, par exemple, la Terre ne saurait être considérée comme une sphère homogène, ce qui reviendrait à considérer toute sa masse comme condensée en son centre de gravité; l'influence de son aplatissement se fait sentir, au contraire, dans le mouvement lunaire d'une manière si remarquable que Laplace a pu calculer cet aplatissement en se fondant sur les observations de la Lune. On constate une action encore plus sensible de l'aplatissement très considérable de la planète principale dans le système de Jupiter, et le même phénomène se reproduit aussi dans le système de Saturne.

» En dehors de l'intérêt mathématique que peut présenter le problème, objet de ce Mémoire, il est encore, comme cela résulte des considérations précédentes, d'une importance très grande au point de vue astronomique. L'ancienne manière de traiter cette question, telle qu'on la trouve dans la *Mécanique céleste,* et dont Hansen lui-même, dans sa Théorie de la Lune, ne s'est pas essentiellement écarté, peut être très suffisante pour le calcul numérique de l'influence de l'aplatissement terrestre sur le mouvement de la Lune, mais elle n'éclaire en rien sur la nature de cette influence. A plus forte raison, lorsqu'il est question des théories des systèmes de Jupiter et de Saturne, une étude plus rigoureuse de la nature du problème devient-elle d'absolue nécessité. C'est particulièrement en vue de ces considérations que l'auteur a entrepris cette étude. »

Berger (*Alex.*). — Démonstration élémentaire de quelques formules du calcul des différences. (N° 10, 39-53).

§ 1. Introduction. — § 2. Les nombres de Bernoulli. — § 3. Sur la somme $\sum_{k=1}^{k=x} k^m$, m étant un nombre entier et positif. — § 4. Sur la somme $\sum_{k=1}^{k=x} k^\mu$, pour $-\infty < \mu < +1$. — § 5. Sur la somme $\sum_{k=1}^{k=x} \log k$.

AMERICAN JOURNAL OF MATHEMATICS PURE AND APPLIED, Editor in chief J.-J. SYLVESTER, Baltimore (¹).

Tome III; 1879.

Stringham (*W.-I.*). — Des figures régulières dans un espace à n dimensions. (1-14).

M. Stringham généralise d'abord pour les polyèdres d'un espace à n dimensions la formule d'Euler relative aux polyèdres de l'espace à trois dimensions. Si l'on désigne respectivement par $N_0, N_1, N_2, \ldots, N_{n-1}$ les nombres des sommets, arêtes, faces à deux dimensions,..., faces à $n-1$ dimensions du polyèdre, la relation dont il s'agit est

$$\Phi = 1 - N_0 + N_1 - \ldots \pm N_{n-1} \mp N_n = 1 - \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k N_k = 0,$$

où l'on doit prendre $N_n = 1$ si la figure considérée n'est pas composée de plusieurs figures simples.

Dans tous les espaces, d'un nombre n de dimensions, on retrouve les trois types de corps réguliers suivants :

1° Le type $(n-1)$ édroïde, pour lequel

$$\Phi = (1-1)^{n+1}, \quad N_k = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!};$$

2° Le type $(2n)$ édroïde, pour lequel

$$\Phi = 1 - (2-1)^n, \quad N_k = \frac{2^{n-k} n!}{k!(n-k)!};$$

3° Le type (2^n) édroïde, pour lequel

$$\Phi = (1-2)^n \mp 1, \quad N_k = \frac{2^{k+1} n!}{(k+1)!(n-k+1)!}.$$

Les corps de l'espace à trois dimensions qui appartiennent à ces trois types sont respectivement le tétraèdre régulier, le cube et l'octaèdre régulier.

Le polyèdre 3° est toujours le *réciproque* du polyèdre 2°, c'est-à-dire qu'il est formé par les centres des faces à $n-1$ dimensions du polyèdre 2°. Les points où n diamètres mutuellement perpendiculaires d'une sphère de l'espace à n dimensions percent cette surface forment les sommets d'un polyèdre régulier 3°.

Pour la détermination de tous les corps réguliers de l'espace à quatre dimensions, M. Stringham procède comme il suit. Il remarque d'abord que les faces à trois dimensions d'un corps régulier adjacentes à un sommet constituent autour de ce sommet un angle solide régulier, qu'on obtient en projetant de ce sommet une des cinq figures régulières de l'espace à trois dimensions. Mais

(¹) Voir *Bulletin*, V_2, 155.

comme ces faces à trois dimensions sont elles-mêmes des figures régulières, le nombre de ces faces qui sont adjacentes à un même sommet du polyèdre est limité par le nombre des corps réguliers égaux qu'on peut disposer autour d'un même point dans l'espace à trois dimensions, de manière qu'ils n'empiètent pas les uns sur les autres.

On trouve ainsi que dans l'espace à quatre dimensions les seuls corps réguliers possibles sont ceux dont les angles solides sont formés respectivement par quatre tétraèdres, quatre cubes, huit tétraèdres, six octaèdres, quatre dodécaèdres, vingt tétraèdres. Les premiers des corps ainsi constitués appartiennent aux trois types précédemment définis et sont appelés *pentaédroïde, octaédroïde, décaexaédroïde*. Les trois derniers ont respectivement, pour caractéristiques N_0, N_1, N_2, N_3, les nombres

$$24,\ 96,\ 96,\ 24;\quad 120,\ 720,\ 1200,\ 600;\quad 600,\ 1200,\ 720,\ 120;$$

et sont appelés *icosatétraédroïde, hexacosiaédroïde, hécatonicosaédroïde.*

En procédant de même pour les espaces à un plus grand nombre de dimensions, M. Stringham trouve que pour tous ces espaces il n'y a que trois corps réguliers possibles, ceux qui appartiennent aux trois types 1°, 2°, 3°.

Peirce (C.-S.). — Sur l'algèbre de la logique. (15-57).

M. Peirce expose dans ce travail ses recherches sur les applications de notations symboliques à la logique, et présente en même temps des considérations nouvelles sur plusieurs points de cette science. Plusieurs résultats de ce travail avaient déjà été publiés par M. Peirce, soit en anglais (*Classification of Arguments*, 1867; *On an Improvement in Boole's Calculus of Logic*, 1867; *Logic of Relatives*, 1870), soit en français (dans la *Revue Philosophique*).

Dans la première partie de ce travail, M. Peirce traite de la *syllogistique*. Pour dénoter l'inférence de P au C on emploie le symbole P∴C. Si l'on fait attention à la légitimité de cette inférence on doit écrire $P \prec C$ (P implique C). On écrira $P \not\prec C$ (P n'implique point C), si l'inférence de P au C n'est pas toujours légitime. Les signes $\prec$ et $\not\prec$ sont employés par M. Peirce non seulement lorsqu'il s'agit de passer d'un antécédent (ou une prémisse) P à un conséquent (ou une conclusion) C, mais aussi pour exprimer le passage du sujet au prédicat d'une proposition. Il identifie ainsi en quelque sorte la proposition avec l'inférence, et le terme avec la proposition.

Si l'on désigne par $\bar{B}$ la négation de B, $A \prec \bar{B}$ signifiera que B ne subsiste pas en même temps que A.

La *copule* $\prec$ donne lieu à une algèbre, dans laquelle on a

$$x \prec x,\ [x \prec (y \prec z)] = [y \prec (x \prec z)],\ \ldots.$$

Le syllogisme *Barbara* est exprimé par

$$x \prec y,\quad y \prec z,\quad \therefore x \prec z.$$

De même on arrive à

$$\begin{array}{llll} M \prec P, & M \prec P, & S \prec M, & \ldots, \\ S \not\prec \bar{M}, & S \prec P, & S \not\prec P, & \ldots, \\ \therefore S \not\prec \bar{P}, & \therefore S \prec M, & \therefore M \not\prec P, & \ldots, \end{array}$$

qui représentent respectivement les syllogismes *Darii, Baroco, Bocardo, etc.*

Dans la seconde partie, M. Peirce traite de la ***logique des termes non relatifs.*** Si l'on a deux classes d'objets a et b, on peut représenter par $a+b$ la classe qui comprend tous les objets de ces deux classes et par $a \times b$ la classe formée par les objets communs aux classes a et b. M. Peirce appelle les deux opérations $a+b$ et $a \times b$, *addition* et *multiplication non relatives*, et il en donne les définitions suivantes :

$a+b$ est tel que si $$a < x \quad \text{et} \quad b < x$$ on a $$a+b < x;$$ et réciproquement si $$a+b<x$$ on a $$a<x \quad \text{et} \quad b<x$$	$a \times b$ est tel que si $$x<a \quad \text{et}\, x<b$$ on a $$x<a\times b;$$ et réciproquement si $$x<a\times b$$ on a $$x<a \quad \text{et} \quad x<b.$$

L'algèbre des termes non relatifs a été donnée par Boole (*Mathematical Analysis of Logic*, Cambridge, 1847; *An investigation of the Laws of Thought on which are founded the mathematical theories of Logic and Probabilities*, 1854); mais l'addition de Boole diffère de la précédente, puisqu'il prend $a+a=2a$ au lieu de $=a$. Les opérations d'addition et de multiplication, comme elles sont traitées par M. Peirce, ont été présentées par De Morgan (*On the Syllogisme*, n° III; *Cambridge Philos. Transactions*, 1858), Stanley Jevons (*Formal Logic*, 1864) et Peirce. Ces opérations ont été aussi étudiées par MM. Robert Grassmann (*Die Formenlehre oder Mathematik*, 1872), Schröder (*Der Operationskreis des Logikkalkuls*, 1877), Hugh McColl (*Calculus of Equivalent Statements* dans les *Proceed. of the London Mathematical Society*, 1877).

Dans la troisième partie, M. Peirce traite de la *Logique des relatifs*. Le signe d'une certaine relation entre A et B est : , de sorte que, si A désigne *acheteur* et B *cheval*, A : B signifiera *acheteur du cheval*.

A chaque relatif $l=(\mathrm{A}:\mathrm{B})$ correspond un autre, converse du premier,

$$k\text{-}l=(\mathrm{B}:\mathrm{A}).$$

Le symbole k représente lui-même un relatif

$$k=[(\mathrm{A}:\mathrm{B}):\ (\mathrm{B}:\mathrm{A})].$$

On a pour ce symbole

$$k\text{-}k\text{-}l=l,\quad k\text{-}k=1.$$

Il y a quatre opérations diverses pour la composition des relatifs :

$a(|||)e=ae$ multiplication relative ou extérieure,
$a(|\text{--})e={}^{a}e$ involution régressive,
$a(\text{-}|\text{-})e=e^{a}$ involution progressive,
$a(\text{--}|)e=a\circ e$ transaddition.

Les trois premières de ces opérations ont été considérées par De Morgan (*On*

the Syllogism, n° IV). M. Peirce présente l'exemple suivant pour illustrer ces opérations.

Si a désigne *amant*, et e *servante*,

ae signifiera tout amant d'une servante de —,

a^e tout amant de chaque servante de —,

${}^e a$ tout amant de quelque servante,

$a_o e$ toute personne qui n'est un non-amant que seulement d'une servante de —, etc.

Ces opérations satisfont entre autres aux lois suivantes :

$$\begin{array}{ll} (a+b)c = ac+bc, & a(b+c) = ab+ac \\ (a\times b)^c = a^c \times b^c, & a^{b+c} = a^b \times a^c \\ {}^{a+b}c = {}^a c \times {}^b c, & {}^a(b+c) = {}^a b \times {}^a c \\ (a\times b)_o c = (a_o c)+(b_o c); & a_o(b+c) = (a_o b)+(a_o c). \end{array}$$

Sylvester (J.-J.). — Sur certaines équations ternaires de forme cubique. Sur la dérivation rationnelle de points sur une cubique. (58-88).

De même que la théorie de *résiduation* de M. Sylvester a pris naissance à l'occasion de recherches arithmétiques, de même la théorie remarquable exposée dans cet *Excursus* vient à propos de son Mémoire *sur certaines équations ternaires de forme cubique*, dont une partie a déjà paru dans ce Journal.

En partant d'un point arbitraire d'une cubique plane, on peut construire sur la courbe un système de points qui dérivent rationnellement du premier, en prenant les points tangentiels successifs du point considéré, ainsi que les points où une droite joignant deux des points ainsi obtenus va rencontrer de plus la courbe. On peut continuer cette dérivation par l'application de ces mêmes procédés. Les points auxquels on arrive ainsi peuvent être rangés en une seule *suite* ou *chaîne*, qui est en général infinie, mais qui, pour certaines positions du point initial, peut venir à s'arrêter, tandis que dans d'autres cas elle se replie sur elle-même et reproduit toujours un nombre limité de points.

En dénotant le point initial de la suite par 1, ses points tangentiels successifs par 2, 4, 8, ..., et en désignant par (m, n) le troisième point de la courbe situé en ligne droite avec les points m et n, on pose

$$1, 4 = 5; \quad 2, 5 = 7; \quad 1, 7 = 8; \quad 2, 8 = 10; \quad 1, 10 = 11; \quad 2, 11 = 13; \; \ldots .$$

Les points 1, 2, 4, 5, 7, 8, ... (où l'on n'a que des *indices* non divisibles par 3), sont les seuls qui entrent dans la formation de la suite.

On peut démontrer, en effet, que, si m et n sont deux nombres non divisibles par 3, le point (m, n) a pour indice celui des deux nombres $m+n$, $m-n$ qui n'est pas divisible par 3.

M. Sylvester démontre que les expressions des coordonnées de tout point p de cette suite sont d'un ordre égal au carré de l'indice p par rapport aux coordonnées du point initial 1. Cette proposition importante est désignée par lui sous le nom de la *loi des carrés*.

Citons ici une remarque très ingénieuse de M. Sylvester sur la nature de cette suite. Puisque le $3n^{\text{ième}}$ point où une courbe algébrique de degré n, passant par $3n-1$ points d'une cubique, coupe de plus cette cubique est déterminé par des

constructions linéaires, il s'ensuit que, si les $3n - 1$ points sont pris parmi les points de la suite considérée, le $3n^{\text{ième}}$ point appartiendra encore à cette suite. S'il y a donc des points qui dérivent rationnellement du point 1 autres que ceux contenus dans la suite considérée, on ne conçoit pas comment on pourra les obtenir ou même les définir; il y a donc une extrême probabilité que l'existence d'autres points dérivés rationnels de 1 est impossible.

La théorie de cette suite est complétée par l'adjonction d'un point d'inflexion I de la cubique. On est ainsi conduit à un groupe de points formé : 1° par le point I; 2° les points p de la première suite; 3° par les opposés p' des points p, c'est-à-dire par les points de la cubique situés sur une droite joignant I et p; 4° par les points $(1', 3i - 1) = 3i$; 5° par les opposés $(3i)'$ de ces points. Tous les nombres entiers avec ou sans accent sont ainsi utilisés comme indices de points de la nouvelle suite. Ici encore les expressions des coordonnées d'un point de cette suite par rapport aux coordonnées du point initial sont d'un ordre égal au carré de l'indice du point considéré. L'indice p d'un point dérivé a encore cette signification géométrique, que le nombre des points initiaux ayant pour $p^{\text{ième}}$ dérivé un point donné est égal à p^2.

Vient ensuite l'étude des lois qui régissent la composition des dérivations. Ainsi, en désignant par « i de j » le $i^{\text{ième}}$ dérivé du point j considéré comme point initial, on a

$$m \text{ de } n = n \text{ de } m = m' \text{ de } n' = n' \text{ de } m' = mn,$$
$$m \text{ de } n' = n \text{ de } m' = m' \text{ de } n = n' \text{ de } m = (mn),$$

pour le cas où les nombres m, n sont à la fois divisibles par 3 ou non, ou que l'un de ces nombres est divisible par 3 tandis que l'autre est de la forme $3j+1$. De même on a dans le cas restant

$$m \text{ de } n = n \text{ de } m = m' \text{ de } n' = n' \text{ de } m' = (mn)',$$
$$m \text{ de } n' = n' \text{ de } m = m' \text{ de } n = n \text{ de } m' = mn.$$

Cette théorie est appliquée à la détermination du nombre des points « pertactiles » d'une cubique, c'est-à-dire des points de la cubique où viennent se réunir les $3n$ points d'intersection de la cubique avec une courbe de degré n.

La théorie est aussi appliquée à l'étude des polygones à la fois inscrits et circonscrits à la cubique.

Rowland (H.-A.). — Sur les équations générales de l'action électromagnétique avec application à la nouvelle théorie des attractions magnétiques et à la théorie de la rotation magnétique du plan de polarisation de la lumière. (89-113).

Craig (Th.). — Projection conforme de l'ellipsoïde sur la sphère. (114-127).

Gauss avait déjà traité comme exemple de sa théorie générale de la représentation orthomorphe des surfaces (avec conservation de la similitude des aires infiniment petites) la représentation d'un ellipsoïde de révolution sur une sphère. M. Craig entreprend l'étude de ce même problème pour le cas plus compliqué d'un ellipsoïde quelconque.

Son analyse conduit d'abord à l'intégration de l'équation des lignes de longueur nulle d'un ellipsoïde par le moyen des fonctions elliptiques. En passant ensuite à la représentation orthomorphe d'un ellipsoïde sur une sphère, il examine en particulier un cas bien remarquable de cette représentation dans lequel les lignes de courbure de l'ellipsoïde situées sur des hyperboloïdes homofocaux à deux nappes sont transformées en méridiens de la sphère, tandis que les lignes de courbure de l'ellipsoïde qui appartiennent au second système sont transformées en parallèles de latitude.

Franklin (F.). — Sur le calcul des fonctions génératrices et des tables des formes fondamentales pour les formes binaires. (128-153).

M. Franklin présente un exposé des récentes méthodes, dues à MM. Cayley et Sylvester, pour l'énumération des diverses formes fondamentales appartenant au système des covariants (et invariants) d'une ou plusieurs formes binaires. Il insiste surtout sur le côté calculatoire de ces méthodes.

Nous croyons répondre au désir de plusieurs lecteurs de ce Bulletin en donnant ici un résumé des principes de cette théorie d'après l'exposé de M. Franklin.

Le théorème fondamental de cette théorie, énoncé d'abord par M. Cayley et démontré rigoureusement par M. Sylvester (*Journal de Borchardt*, t. 85, p. 104, 1878; *Philosophical Magazine*, t. V, p. 178), consiste en ceci :

Si l'on dénote par $(i, j : g)$ *le nombre des manières dont on peut considerer le nombre* $w = \frac{ij-g}{2}$ *comme somme de* j *nombres de la suite* 0, 1, 2, ..., i (*les répétitions étant permises*), *le nombre* $n_{g,j}$ *des covariants linéairement indépendants d'ordre* g *et de degré* j *d'une forme binaire d'ordre* i *est égal à* $(i, j : g) - (i, j : g+2)$. *Ce nombre* $n_{g,j}$ *est donc égal au coefficient de* $a^j x^g$ *dans le développement de*

$$\varphi(x) = \frac{1 - x^{-2}}{(1-ax^i)(1-ax^{i-2})\ldots(1-ax^{-i+2})(1-ax^{-i})},$$

suivant les puissances ascendantes de a.

On utilise ce résultat pour la détermination du nombre des covariants fondamentaux des divers *ordres-degrés* (g, j) de la manière suivante. Supposons que l'on connaisse le nombre des covariants fondamentaux pour tous les ordres-degrés inférieurs à un ordre-degré déterminé (g, j). Soient α le nombre des covariants linéairement indépendants d'ordre-degré (g, j), et β le nombre des covariants de ce même ordre-degré qu'on peut composer avec des covariants d'ordres-degrés inférieurs. Si la différence $\alpha - \beta$ est positive ou nulle, elle doit être égale au nombre des covariants fondamentaux de l'ordre degré (g, j) considéré; mais si cette différence est négative $= -p$, il n'y a pas de covariants élémentaires de cet ordre-degré, mais en revanche il existe un nombre p de *syzygies* (c'est-à-dire d'identités) de cet ordre-degré entre covariants plus simples. Ces règles ne sont pas encore démontrées en toute rigueur, mais reposent sur ce postulat, établi par une forte induction, *qu'il n'y a jamais de covariants fondamentaux et de syzygies qui soient à la fois d'un même ordre-degré.*

Cette méthode primitive de l'énumération des covariants fondamentaux,

désignée par M. Sylvester sous le nom de *tamisage*, n'offre aucune indication sur la limitation du système des covariants fondamentaux d'une forme. Mais on peut atteindre à ce but en maniant convenablement la *fonction génératrice* $\varphi(x)$.

Le développement de la fonction génératrice $\varphi(x)$ suivant les puissances ascendantes de a est composé d'une infinité de termes contenant des puissances tant positives que négatives de x. Mais pour le but actuel on ne doit retenir que les termes à puissances non négatives de x. Pour obtenir directement cette partie du développement de $\varphi(x)$ deux méthodes ont été proposées, la première par M. Sylvester, la seconde plus expéditive par M. Cayley (M. Sylvester a donné par la suite une autre méthode où la fonction génératrice est prise sous une tout autre forme). Par le moyen de ces méthodes on parvient à déterminer une fonction rationnelle

$$\psi(a, x) = \frac{X}{Y},$$

dont le développement suivant les puissances ascendantes de a coïncide avec la partie du développement de $\varphi(x)$ qui renferme les puissances non négatives de x.

Dans le cas où la forme binaire f, dont on considère les covariants, est d'ordre pair $i = 2n$, le dénominateur Y de ψ est égal à

$$(1-a^2)^2(1-a^3)(1-a^4)\ \ldots\ (1-a^{2n-1})(1-ax^2)(1-ax^4)\ \ldots\ (1-ax^{2n}),$$

tandis que dans le cas où l'ordre de f est impair, $i = 2n+1$, le dénominateur Y est égal à

$$(1-a^2)(1-a^4)(1-a^6)\ \ldots\ (1-a^{2n})(1-ax)(1-ax^3)\ \ldots\ (1-ax^{2n+1}).$$

Dans l'un et dans l'autre de ces deux cas le degré de X par rapport à x est moindre de deux unités que celui de Y : de même le degré de X par rapport à a est moindre de $i-1$ unités que celui de Y. Mentionnons ce fait que, dans les cas où $i = 3, 5, 7, 9, 4, 8$, le facteur $1-a^2$ se présente aussi bien dans X que dans Y : il n'en est pas de même dans les cas où $i = 2, 6, 10$.

Considérons maintenant la fonction $L = \Sigma m_{j,g} a^j x^g$, où $m_{j,g}$ est le nombre des covariants linéairement indépendants de l'ordre-degré (g, j). Il est aisé de voir que, si V est covariant d'ordre-degré (s, r), le nombre des covariants d'ordre-degré (g, j) qui ne contiennent pas V comme facteur est égal au coefficient de $a^j x^g$ dans la forme $(1-a^r x^s)L$. Le facteur $(1-a^r x^s)$ est appelé *représentant* du covariant (s, r).

De même, si l'on a k covariants $V_1, V_2, \ldots, V_k$ d'ordres-degrés (s_1, r_1), (s_2, r_2), ..., (s_k, r_k) respectivement, le nombre des covariants d'ordre-degré (g, j) qui ne contiennent comme facteur aucun des covariants V, est égal au coefficient de $a^j . x^g$ dans la fonction

$$\Lambda = (1-a^{r_1}x^{s_1})(1-a^{r_2}x^{s_2})\ \ldots\ (1-a^{r_k}x^{s_k})L,$$

étant supposé qu'il n'y a pas de syzygie de l'ordre-degré (g, j) entre covariants composés de $V_1, V_2, \ldots, V_k$.

Quoi qu'il en soit, on peut arriver à la détermination du nombre des covariants fondamentaux de l'ordre-degré (g, j) en appliquant le procédé du tamisage à

l'indication fournie par la fonction A. Si l'on est conduit par là à un nombre positif ou nul, ce nombre sera bien égal au nombre des covariants fondamentaux cherchés; autrement on sera sûr qu'il n'y a que des syzygies de cet ordre-degré.

On voit maintenant que, si l'on peut choisir les covariants $V_1, V_2, \ldots$, de telle manière que la multiplication de $L = \psi(a, x)$ par

$$(1 - a^{r_1} x^{s_1})(1 - a^{r_2} x^{s_2}), \ldots$$

amène la disparition de tous les facteurs du dénominateur de ψ, la fonction

$$A = (1 - a^{r_1} x^{s_1})(1 - a^{r_2} x^{s_2}) \ldots \psi,$$

à laquelle on sera ainsi conduit, sera formée par un nombre limité de termes. Cette fonction A pourra servir par conséquent à la détermination complète du *système limité* des covariants fondamentaux considérés.

Ce résultat peut être atteint *en général* effectivement. Voici de quelle manière. En multipliant d'abord les deux termes de la fraction ψ par des facteurs convenables, on peut remplacer chaque facteur $(1 - a x^\lambda)$ du dénominateur de ψ par le représentant $(1 - a^2 x^{2\lambda})$ du seul covariant d'ordre-degré $(2\lambda, 2)$. De même chaque facteur $(1 - a^\lambda)$ du dénominateur de ψ peut être remplacé *en général* par le représentant $(1 - a^{\mu\lambda})$ d'un covariant d'ordre-degré $(0, \mu\lambda)$, (invariant de degré $\mu\lambda$). Tous les facteurs du dénominateur de ψ étant ainsi transformés en représentants de covariants $V_1, V_2, \ldots$, on voit que l'on peut prendre pour fonction A le numérateur de cette forme particulière de ψ. L'application du procédé du tamisage aux indications fournies par cette forme A conduira à la détermination complète de tous les covariants fondamentaux autres que $V_1, V_2, \ldots$.

La méthode précédente a été aussi appliquée avec de légères modifications à l'énumération des divers covariants du système de plusieurs formes binaires.

Faà de Bruno. — Notes sur l'Algèbre moderne. (154-163).

1. Démonstration de cette proposition :

Si C_m est le dernier coefficient d'un covariant Φ de la forme

$$f = (a_0, a_1, \ldots)(x, y)^m,$$

le covariant Φ est égal à ce que devient C_m lorsqu'on y remplace

$$\begin{aligned} &a_0 \text{ par } A_0 = a_0, \\ &a_1 \text{ par } A_1 = a_1 + a_0 x, \\ &a_2 \text{ par } A_2 = a_2 + 2 a_1 x + a_0 x^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

2. Applications diverses de ce fait que, lorsqu'on a un déterminant

$$D = \begin{vmatrix} A, & \Delta A, & \Delta^2 A, & \ldots, & \Delta^n A \\ B, & \Delta B, & \Delta^2 B, & \ldots, & \Delta^n B \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

dont les éléments de chaque colonne sont déduits des éléments correspondants

de la précédente par le moyen de l'opération Δ, et que l'on suppose

$$\Delta^{n+1} A = \Delta^{n+1} B = \ldots = 0,$$

on a $\Delta D = 0$.

3 et 4. Démonstration et application d'une formule de Clebsch (*Theorie der binären Formen*, p. 119) sur le carré du déterminant fonctionnel de deux formes binaires.

5. Sur la résolution de la quartique.

6. Sur la résolution de la quintique dans le cas où son invariant gauche du dix-huitième degré est nul.

Hammond (*J.*). — Sur la dérivation à indices quelconques. (164-173).

En adoptant la relation

$$(1) \qquad D^n x^m = \frac{f(m+1)}{f(m-n+1)} x^{m-n},$$

pour définir la ***dérivée à l'indice quelconque n***, on est conduit à autant de ***systèmes de dérivation*** qu'il y a de fonctions f satisfaisant à l'équation

$$(2) \qquad f(m+1) = mf(m).$$

Peacock admet $f(m) = \Gamma(m)$. Cependant la relation (2) est satisfaite par toute fonction $f(m) = C^m \Gamma(m)$, pourvu que l'on ait $C_{m+1} = C_m$.

Ainsi la formule de M. Liouville

$$D^n x^m = (-1)^n \frac{\Gamma(-m+n)}{\Gamma(-m)} x^{-n}$$

correspond à

$$f(m) = (-1)^{m-1} \frac{\sin m\pi}{\pi} \Gamma(m) = (-1)^{m-1} \frac{1}{\Gamma(1-m)}.$$

La dérivée $D_x^n.0$, dans le cas où n est un nombre entier positif, est égale à 0; elle est égale à un polynôme de degré $p-1$ en x, dans le cas où n est un entier négatif $-p$.

En admettant $f = \Gamma(m)$, on a dans tous les cas

$$D^n.0 = \frac{A_1 x^{-1-n}}{\Gamma(-n)} + \frac{A_2 x^{-2-n}}{\Gamma(-1-n)} + \frac{A_3 x^{-3-n}}{\Gamma(-2-n)} + \ldots.$$

On obtient une expression analogue lorsque f a la valeur correspondante à la formule de M. Liouville.

M. Hammond examine les valeurs de $D^n \log x$, $D^n e^{ax}$, $D_x^n (x+y)^m$. Il remarque à l'égard de $D^n e^{ax}$ qu'on ne peut pas prendre en général

$$D^n e^{ax} = a^n e^{ax},$$

mais qu'on peut déterminer la fonction *complémentaire* $D^n.0$ de manière à avoir

$$D^{n+1} e^{ax} = a D^n e^{ax} \quad \text{et} \quad D^n e^{ax} = C_n a^n e^{ax},$$

où $C_{n+1} = C_n$, $C_0 = 1$. Il trouve ainsi pour le cas de $f(m) = \Gamma(m)$,

$$D^n e^{ax} = \frac{x^{-n}}{\Gamma(1-n)} + \frac{ax^{1-n}}{\Gamma(2-n)} + \frac{a^2x^{2-n}}{\Gamma(3-n)} + \ldots + D^n.o,$$

où

$$D^n.o = \frac{a^{-1}x^{-1-n}}{\Gamma(-n)} + \frac{a^{-2}x^{-2-n}}{(\Gamma - 1 - n)} + \frac{a^{-3}x^{-3-n}}{\Gamma(-2-n)} + \ldots.$$

On a en particulier

$$D^n e^x = \frac{e^x}{\Gamma(n)} \int_0^x e^{-x} x^{n-1}\, dx + D^{-n}.o.$$

Mc Clintock (Emory). — Note sur un théorème relatif au développement d'une fonction de fonction. (173).

M. Mc Clintock fait remarquer que le théorème sur le développement des fonctions donné par lui dans le vol. II de ce journal est dû à M. S. Roberts (*Quarterly Journal*, vol. IV, p. 195).

Loudon (James). — Notes sur le mouvement relatif. (174-178).

Formules diverses concernant le mouvement d'un point rapporté à des axes de coordonnées mobiles. Expression des divers éléments du mouvement d'un corps solide rapporté à des axes fixes ou mobiles par rapport à ce corps.

Sylvester (J.-J.). — Sur certaines équations ternaires de forme cubique. (174-189).

Digressions relatives au Chapitre I de ce Mémoire.

M. Sylvester présente d'abord une méthode simple pour obtenir les équations de la trisection et quadrisection des racines de l'unité correspondant à un nombre premier p. Cette méthode repose sur le principe suivant, dont la seconde partie est nouvelle :

Une fonction rationnelle et entière d'un système de périodes des racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité ayant pour coefficients des nombres entiers et dont la valeur ne change pas lorsqu'on permute entre elles les périodes est égale à un nombre entier. De plus si une pareille fonction, tout en conservant sa valeur absolue, change de signe pour certaines substitutions circulaires effectuées sur les périodes, elle est nécessairement égale à un nombre entier multiple de $\sqrt{p}$ ou de $\sqrt{-p}$ suivant que $\frac{p-1}{2}$ est un nombre pair ou impair.

Vient ensuite une nouvelle rédaction de la démonstration de la *loi des carrés*, donnée dans ce même volume, p. 81-86, et dont nous avons parlé plus haut.

Glashan (J.-C.). — Sur le changement de la variable indépendante. (190-191).

Soient

$$u = f(y), \quad x = \varphi(y),$$

et

$x_n =$ [illegible]

Si l'on désigne par S_m^n la somme des termes de poids m dans le développement de

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots)^n,$$

on aura (d'après Cauchy)

$$u_n = S_n^1 D_x u + S_n^2 \frac{D_x^2 u}{2!} + \ldots + S_n^n \frac{D_x^n u}{n!}.$$

Quant aux valeurs de

$$D_n, \quad \frac{1}{2!} D_x^2 u, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n!} D_x^n u,$$

on aura

$$D_x u = \frac{u_1}{x_1}, \quad \frac{1}{2!} D_n^2 u = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & u_1 \\ x_2 & u_2 \end{vmatrix}}{x_1 . x_1^2}, \ldots$$

$$\frac{1}{n!} D_x u = \frac{\begin{vmatrix} S_1^1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & u_1 \\ S_2^1 & S_2^2 & 0 & \ldots & 0 & u_2 \\ S_3^1 & S_3^2 & S_3^3 & \ldots & 0 & u_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{n-1}^1 & S_{n-1}^2 & S_{n-1}^3 & \ldots & S_{n-1}^{n-1} & u_{n-1} \\ S_n^1 & S_n^2 & S_n^3 & \ldots & S_n^{n-1} & u_n \end{vmatrix}}{x_1 . x_1^2 . x_1^3 \ldots x_1^{n-1} . x_1^n}.$$

Franklin (F.). — Note sur l'intersection de deux courbes. (192).

Démonstration de ce théorème : *Si, parmi les mn intersections de deux courbes planes d'ordres m et n, il y en a np situées sur une courbe d'ordre p ($m > n$, $n > p$), par les $n(n-p)$ points d'intersection restants, on peut faire passer une courbe d'ordre $m-p$.*

Newcomb (Simon). — Une méthode de développement de la fonction perturbatrice dans le mouvement planétaire. (193-209).

L'objet de ce travail est de présenter une nouvelle méthode pour le développement de la fonction perturbatrice suivant les puissances des excentricités, méthode qui offre aussi un grand intérêt au point de vue du calcul des opérations.

La fonction à développer est

$$R = (r^2 - 2rr' \cos V - r'^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{r}{r'^2} \cos V,$$

où r et r' sont les rayons vecteurs des deux planètes et V l'angle formé par les deux rayons vecteurs. La partie essentielle du problème consiste à développer le premier terme de l'expression R, terme que nous dénoterons dans la suite aussi par R.

Notations employées :

a et a' sont les valeurs moyennes de r et r',
v et v' les distances angulaires des deux planètes à leur nœud commun,

λ et λ' les valeurs moyennes de v et v',
e et e' les excentricités,
g et g' les anomalies moyennes.

S'il s'agissait d'orbites circulaires ($e = e' = 0$), on aurait pour R le développement

$$R = \Sigma_\mu \Sigma_\nu A_{\mu,\nu} \cos(\mu\lambda + \nu\lambda'),$$

où μ et ν prennent toutes les valeurs de $-\infty$ et ∞ en restant cependant toujours de même parité. Les coefficients A de ce développement sont homogènes et de degré -1 par rapport aux a, a', mais ils dépendent aussi de l'inclinaison des deux orbites.

Pour passer au développement de R pour le cas où l'on a $e' = 0$ (e étant quelconque), on fait dans le développement précédent

$$v = \lambda + \varphi(e, g), \quad \rho = \alpha + \psi(e, g),$$

où $\rho = \log r$, $\alpha = \log a$. Le calcul de cette transformation est fondé sur l'emploi des formules

$$\frac{dR}{de} = \frac{dv}{de}\frac{dR}{d\lambda} + \frac{d\rho}{de}\frac{dR}{d\alpha},$$

et

$$\frac{d^{n+1}R}{de^{n+1}} = \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{dv}{de}\frac{d^nR}{de^n} + \binom{n}{1}\frac{d^2v}{de^2}\frac{d^{n-1}R}{de^{n-1}} + \binom{n}{2}\frac{d^3v}{de^3}\frac{d^{n-2}R}{de^{n-2}} + \ldots\right]$$
$$+ \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{d\rho}{de}\frac{d^nR}{de^n} + \binom{n}{1}\frac{d^2\rho}{de^2}\frac{d^{n-1}R}{de^{n-1}} + \binom{n}{2}\frac{d^3\rho}{de^3}\frac{d^{n-2}R}{de^{n-2}} + \ldots\right].$$

On arrive ainsi à un développement qui est égal à une somme de termes de la forme

$$e^n.\Pi_j^n A_{\mu,\nu}.\cos(\mu\lambda + \nu\lambda' + jg),$$

où Π_j^n est un symbole opératoire équivalant à une combinaison linéaire des symboles D^0, D^1, ..., D^n où $D = \dfrac{d}{d\alpha}$.

Ainsi l'on a par exemple :

$$\Pi_0^0 = 1,$$
$$\Pi_1^1 = \mu - \frac{1}{2}D,$$
$$\Pi_{-1}^1 = -\mu - \frac{1}{2}D,$$
$$\Pi_2^2 = \frac{1}{2}\mu^2 + \frac{5}{8}\mu + \left(-\frac{1}{2}\mu - \frac{3}{8}\right)D + \frac{1}{8}D^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

De même le développement de R suivant les puissances de e', dans le cas où $e = 0$, est égal à une somme de termes de la forme

$$e'^{n'}.\Pi'^{n'}_{j'} A_{\mu,\nu}.\cos(\mu\lambda + \nu\lambda' + jg'),$$

$\Pi'^{n'}_{j'}$ étant une fonction entière du symbole $D' = \frac{d}{d\alpha'}$, égale à ce que devient Π^{n}_{j} si l'on y change μ en ν, D en D'.

Maintenant *le développement complet de* R *suivant les puissances des excentricités e et e', se trouve être égal à une somme de termes de la forme*

$$e^{n} e'^{n'} \Pi^{n,n'}_{j,j'} A_{\mu,\nu} . \cos(\mu\lambda + \nu\lambda' + jg + j'g'),$$

où le symbole opératoire $\Pi^{n,n'}_{j,j'}$ *est égal au produit des deux symboles* Π^{n}_{j} *et* $\Pi'^{n'}_{j'}$.

Il est à remarquer que le coefficient complet de

$$\cos(\mu\lambda + \nu\lambda' + jg + j'g')$$

dans ce développement est égal à

$$e^{j} e'^{j'} (\Pi^{j}_{j} + e^{2}\Pi^{j+2}_{j} + e^{4}\Pi^{j+4}_{j} + \ldots)$$
$$\times (\Pi'^{j'}_{j'} + e'^{2}\Pi'^{j'+2}_{j'} + e^{4}\Pi^{j'+4}_{j'} + \ldots) A_{\mu,\nu}.$$

Ladd (*Miss Christine*). — Sur l'extension des opérations algébriques due à De Morgan. (210-225).

Miss Ladd s'occupe de l'algèbre des symboles, dans laquelle « les diverses opérations et symboles n'ont pas nécessairement une signification déterminée », mais « sont définies simplement par les lois de leur combinaison ». Les opérations cependant considérées dans cette étude sont susceptibles d'une signification bien précise dans la science des quantités.

On part d'une première opération, représentée par le symbole + et dont l'inverse est représentée par le symbole —. On définit le symbole *log* par l'équation

$$\log\ (a + a + a \ldots,\ \text{à}\ b\ \text{termes}) = \log a + \log b.$$

Au lieu de $\log \log a$, on écrit $\log^{2} a$, au lieu de $\log \log^{2} a$, on écrit $\log^{3} a$, et ainsi de suite. Le symbole $\log^{-n}$ est défini par la propriété $\log^{-n}(\log^{+n} a) = a$.

En ne faisant usage que des symboles =, +, —, log, on peut arriver à une série indéfinie d'opérations, considérée d'abord par De Morgan (*Cambridge Philos. Transactions*, t. VII et VIII), et contenant comme premiers représentants les opérations de l'Algèbre ordinaire.

On a d'abord l'opération

$$a \underset{1}{+} b = (a + a + \ldots,\ \text{à}\ b\ \text{termes}) = ab,$$

puis cette autre

$$a \underset{2}{+} b = (a \underset{1}{+} a \underset{1}{+} a \underset{1}{+} \ldots,\ \text{à}\ \log b\ \text{termes}) = a^{\log b},$$

désignée sous le nom d'*involution*, et en général l'opération

$$a \underset{n+1}{+} b = (a \underset{n}{+} a \underset{n}{+} a \underset{n}{+} \ldots,\ \text{à}\ \log^{n} b\ \text{termes}).$$

Les propriétés les plus importantes de ces opérations sont exprimées par les relations

$$a \underset{n+1}{+} b = \log^{-1}(\log a \underset{n}{+} \log b), \quad a \underset{n}{+} b + \log^{-n}(\log^n a + \log^n b).$$

En procédant en sens inverse on obtient, avec de Morgan, une série descendante d'opérations :

$$a \underset{-n}{+} b = \log^n(\log^{-n} a + \log^{-n} b).$$

L'opération $a \underset{-1}{+} b$ a par rapport à l'addition, la même relation que l'addition par rapport à la multiplication

De même que dans l'opération $\underset{0}{+}$ (addition) on a $a \underset{0}{+} o = a$, de même la quantité $\log^{-n} o$ a dans l'opération $\underset{n}{+}$ la propriété

$$a + \log^{-n} o = a.$$

Cette quantité $\log^{-n} o$ a pour valeur $e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e}}}}}$, où le nombre des e est égal à $n - 1$.

Plus généralement la quantité $\log^{-n} a$ a pour valeur $e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{a}}}}}}$, où le nombre des e est égal à n.

Toutes ces opérations sont assujetties aux lois de commutation

$$a \underset{n}{+} b = b \underset{n}{+} a,$$

et d'association

$$(a \underset{n}{+} b) \underset{n}{+} c = a \underset{n}{+} (b \underset{n}{+} c),$$

lois que l'auteur réunit dans une seule exprimée par

$$(a \underset{n}{+} b) \underset{n}{+} c = a \underset{n}{+} (c \underset{n}{+} b),$$

et qu'il désigne sous le nom de loi de *distribution*. On a encore

$$(a \underset{n}{+} b) \underset{n+1}{+} c = (a \underset{n+1}{+} c) \underset{n}{+} (b \underset{n+1}{+} c).$$

Trois opérations successives de cette série infinie présentent des propriétés tout à fait analogues à celle de l'addition, multiplication et involution. Miss Ladd, en complétant une proposition énoncée par de Morgan (*Trigonometry and double Algebra*, p. 166), fait voir que tous les théorèmes de l'Algèbre ordinaire (relatifs à l'addition, à la multiplication et à l'involution) subsistent pour trois opérations $\underset{n+1}{+}$, $\underset{n}{+}$, $\underset{n+1}{+}$, pourvu qu'on y remplace les nombres à ajouter et à multiplier par les inverses de leurs $n^{\text{ièmes}}$ logarithmes ($\log^{-n}$), et les exposants numériques par les inverses de leurs $(n+1)^{\text{ièmes}}$ logarithmes.

Ainsi que la fonction $5 + 4b^3$ a pour correspondante cette autre

$$\log^{-n} 5 \underset{n}{+} [\log^{-n} 4 \underset{n+1}{+} (\log^{-(n+1)} 3 \underset{n+2}{+} b)].$$

Rowland (*H.-A.*). — Sur le mouvement d'un fluide incompressible quand il n'y a pas de corps solide en présence. (226-268).

Craig (*Th.*). — Sur certains cas possibles du mouvement dans un fluide doué de viscosité. (269-293).

Mitchell (*O.-H.*). — Sur les congruences binômes, comprenant une extension des théorèmes de Fermat et de Wilson et un théorème dont les deux précédents sont des cas particuliers. (294-315).

M. Mitchell examine d'abord les solutions de la congruence $x^2 \equiv x \bmod k$. Il démontre que si i est le nombre des facteurs premiers inégaux de k, la congruence $x^2 \equiv x \bmod k$ admet 2^i racines distinctes $x = R_s$, correspondant aux 2 produits s qu'on peut former avec des facteurs premiers inégaux de k. Chacune de ces racines R_s a la propriété de ne contenir que ceux des facteurs de k qui divisent s. Ces nombres R_s satisfont aussi à la congruence $R_s^n \equiv R_s \bmod k$, et sont appelés pour cette raison *répétants* du module k.

En étendant les propriétés de l'unité $(= R_1)$ à ces nombres R_s, on obtient d'abord la généralisation suivante du théorème de Fermat pour des modules composés :

Si $\tau_s(k)$ est le nombre des entiers X_s moindres que k, ayant en commun avec k tous les facteurs de s et ceux-là seulement, on a

$$X_s^{\tau_s(k)} \equiv R_s \mod k.$$

On a de même la généralisation suivante du théorème de Wilson :

Le produit $\Pi_s(k)$ *des* $\tau_s(k)$ *entiers* X_s (considérés dans l'énoncé précédent) *est congru à* R_s *suivant le module* k, *toutes les fois que le quotient de* k *par le produit* σ *des facteurs de* k *représentés dans* s *n'est pas une puissance d'un nombre premier impair, soit le produit d'une pareille puissance par* 2, *soit enfin* $= 4$. *Le quotient* $\frac{\sigma}{s}$ *est en même temps un nombre impair, toutes les fois que l'on a* $\Pi_s(k) \equiv -R_s \bmod k$.

M. Mitchell s'occupe ensuite de diverses propriétés des congruences binômes $x^m \equiv D \bmod k$ et généralise plusieurs propositions connues, de manière à les rendre applicables à tout nombre k. Il examine aussi tour à tour la périodicité que présente la série des résidus D lorsque n va en augmentant, le nombre des racines de $X^n - R_s \equiv 0 \bmod k$, et plus généralement de $X^n \equiv D \bmod k$, et le nombre des résidus $n^{\text{ièmes}}$ relatifs à k. Il parvient enfin à une proposition qui comprend comme cas particuliers les deux généralisations précédentes des théorèmes de Fermat et de Wilson.

Freeland (*Frank-T.*). — Systèmes articulés pour x^m. (316-319, 1 pl.).

Description de divers systèmes articulés pour x^m obtenus en combinant des réciprocateurs (donnant $\frac{1}{x}$, étant connu x) avec des bissecteurs.

Johnson (*W.-W.*). — Les strophoïdes. (320-325).

Examen de quelques propriétés des courbes engendrées par l'intersection de deux droites d'un plan tournant uniformément autour de deux points. Parmi ces courbes sont comprises en particulier celles qu'on désigne ordinairement sous le nom de *strophoïdes*.

Stone (*Ormond*). — Sur le rapport entre le secteur et le triangle dans l'orbite d'un corps céleste. (326-328).

Le rapport entre l'aire d'un secteur de l'orbite d'un corps céleste et celle du triangle correspondant à ce secteur est donné par la formule

$$\frac{1}{2} = \frac{rr' \sin(v - v')}{\tau\sqrt{p}} = \frac{\sin 2\theta}{\theta},$$

en négligeant la masse du corps et en désignant par r et r' les deux rayons vecteurs, par v et v' les anomalies vraies correspondantes et par τ le produit du temps écoulé entre les deux positions par la constante du système solaire.

Une première valeur approchée de θ est fournie par la formule

$$2\theta = \frac{2^{\frac{3}{2}}\tau}{(r+r')^{\frac{3}{2}}}.$$

On atteint une approximation encore plus grande par la formule

$$\theta = \theta_0 \frac{\cos\theta}{\cos\gamma},$$

où

$$\theta_0^2 = \frac{2\tau^2}{(r+r')^3}, \quad \cos\gamma = \frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'} \cos\frac{1}{2}(v' - v).$$

Hyde (*E.-W.*). — Centres de gravité des surfaces et des solides de révolution. (329-331).

Détermination, au moyen du calcul des quaternions, du centre de gravité des surfaces et des volumes de révolution.

Sylvester (*J.-J.*). — Sur un point de la théorie des fractions ordinaires. (332-335).

Un nombre quelconque Q, moindre que l'unité, peut être représenté d'une seule manière par une série

$$\frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots,$$

dans laquelle les u_i sont des entiers déterminés de manière que la différence

$$Q - \left(\frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_{i-1}}\right)$$

soit comprise entre $\frac{1}{u_{i-1}}$ et $\frac{1}{u_i}$. Une pareille série, que M. Sylvester appelle un *sorite*, ne peut avoir un nombre illimité de termes que si Q est incommensurable.

Deux éléments consécutifs u_{i+1}, u_i d'un sorite sont liés par la relation

$$u_{i+1} > u_i^2 - u_i.$$

La série limite $\sum_{i=j}^{i=\infty} \frac{1}{u_i}$, dans laquelle $u_{i+1} = u_i^2 - u_i + 1$ a pour somme $\frac{1}{u_j - 1}$.

Roberts (Samuel). — Sur la généralisation immédiate des théorèmes relatifs à des lieux dans lesquels le point générateur divise un segment linéaire variable dans un rapport constant. (336-343).

Lorsqu'un segment variable se meut dans un plan, les points qui divisent ce segment dans un rapport constant décrivent des courbes qui sont en général du même ordre m et du même genre g. Maintenant si l'on construit sur le segment mobile comme base un triangle mobile semblable à un triangle donné, le troisième sommet de ce triangle décrira une courbe qui sera en général de l'ordre m et du genre g. M. Roberts démontre l'égalité de l'ordre de ces courbes en faisant voir qu'à chaque point à l'infini des courbes décrites par les points de la base du triangle correspond un point situé à l'infini sur la courbe décrite par le sommet considéré.

Whitcom (A.-W.). — Sur le développement de $\varphi(x+h)$. (344-355).

Le coefficient θ qui entre dans l'expression du reste

$$\frac{h^n}{n!}\varphi^{(n)}(n+\theta h)$$

du développement d'une fonction $\varphi(x+h)$ par la série de Taylor est une fonction égale à

$$\theta = \frac{1}{n+1} + h\left(\frac{d\theta}{dh}\right)_{h=0} + \frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2\theta}{dh^2}\right)_{h=0} + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}\theta}{dh^{n-1}}\right)_{h=0} + \dots,$$

où les

$$\left(\frac{d\theta}{dh}\right)_{h=0}, \quad \left(\frac{d^2\theta}{dh^2}\right)_{h=0}, \quad \dots$$

ont les valeurs

$$\left(\frac{d\theta}{dh}\right)_{h=0} = \frac{2(n+1)-(n+2)}{2(n+1)^2(n+2)}\,\frac{\varphi^{(n+2)}(x)}{\varphi^{(n+1)}(x)},$$

$$\left(\frac{d^2\theta}{dh^2}\right)_{h=0} = \frac{2.3(n+1)^2-(n+2)(n+3)}{3(n+1)^2(n+2)(n+3)}\,\frac{\varphi^{(n+3)}(x)}{\varphi^{(n+1)}(x)} - \frac{2(n+1)-(n+2)}{(n+1)^3(n+2)}\left[\frac{\varphi^{(n+2)}(x)}{\varphi^{(n+1)}(x)}\right]^2,$$

....

Story (*W.*). — Sur la théorie de la dérivation rationnelle sur une cubique. (356-388).

Dans ce travail M. Story présente sous une forme plus systématique et complète la nouvelle théorie de M. Sylvester sur les séries de points d'une cubique plane qui dérivent rationnellement d'un point initial de la cubique, théorie dont nous avons rendu compte plus haut.

M. Story, guidé par la loi de l'attribution de paramètres aux points d'une cubique, apporte d'abord aux notations de M. Sylvester les changements suivants. Au lieu de désigner par des indices positifs tous les points qui dérivent rationnellement d'un point initial 1, il emploie tantôt des nombres positifs, tantôt des nombres négatifs, de manière que les indices de trois points situés en ligne droite aient toujours une somme égale à zéro. Cette règle est conservée même pour les points du groupe qu'on obtient par l'adjonction d'un point d'inflexion (point auquel on attribue l'indice o).

De cette manière les points dérivés qui ne dépendent que du point 1 ont pour indices des nombres de la forme $3m+1$ (m étant un entier positif ou négatif), tandis que les points qui dépendent à la fois de 1 et de o ont pour indices des entiers de l'une et de l'autre des formes $3m-1$ et $3m$.

Ce système de notations suffit pour l'étude des propriétés d'une cubique cuspidale, qui n'a qu'un point d'inflexion. Mais pour les autres cubiques chaque point d'inflexion donne lieu à une série de points dérivés ayant pour indices des nombres de la forme $3m-1$ et $3m$, lesquelles séries se complètent par d'autres dont les indices sont encore de la forme $3m+1$.

Considérons trois points d'inflexion o_0, o_1, o_2 d'une cubique, situés en ligne droite, désignons par a_0 les points à indice a qui dérivent d'un point $1=1_0$ et de l'inflexion o_0, et attribuons les symboles $-a_1$ et $-a_2$ aux points de la cubique situés sur les droites qui joignent le point a_0 aux points o_2 et o_1 respectivement. Tous ces points forment un groupe. On a en effet pour les indices de trois points a_p, b_q, c_r situés en ligne droite

$$a+b+c=0 \quad \text{et} \quad p+q+r\equiv 0 \pmod 3.$$

En passant à la considération de neuf points d'inflexion de la cubique on commence par attribuer à ces points les symboles

$$o_{00},\ o_{01},\ o_{02},\ o_{10},\ o_{11},\ o_{12},\ o_{20},\ o_{21},\ o_{22}$$

de telle manière que l'on ait pour trois de ces points

$$o_{pq},\ o_{rs},\ o_{tu}$$

situés en ligne droite.

$$p - r - t \equiv 0, \quad q - s - u \equiv 0 \pmod 3.$$

En désignant maintenant par $o_{00}, o_{10}, o_{20}, a_{00}, a_{10}, a_{20}$ les points désignés précédemment par $o_0, o_1, o_2, a_0, a_1, a_2$ on peut attribuer les indices

$$a_{01},\ a_{11},\ a_{21};\quad a_{02},\ a_{12},\ a_{22}$$

aux troisièmes points de la cubique situés respectivement sur les droites qui joignent les points o_{02} et o_{01} aux points a_{00}, a_{20}, a_{10}. Tous ces nouveaux points forment encore un groupe. Trois points

$$a_{pq},\ b_{rs},\ c_{tu}$$

sont situés en ligne droite si l'on a

$$a - b + c = 0,$$

$$p - r + t \equiv 0, \quad q - s + u \equiv 0 \pmod 3.$$

M. Story, en examinant les lois de la composition des dérivations, démontre que l'on a

$$a_{pq} \text{ de } b_{rs} = (ab)_{tu},$$

où

$$p + ar \equiv t, \quad q + as \equiv u \pmod 3.$$

Il est intéressant de savoir quels sont les sous-groupes contenus dans ce système si étendu de points dérivés. Citons, à côté des sous-groupes déjà indiqués, ceux formés par les points

$$(3m + 1)_{pq}, \quad (3m - 1)_{rs}, \quad (3m)_{tu},$$

où p, r, t, et q, s, t sont les nombres 0, 1, 2 pris dans des ordres quelconques.

Si l'on a représenté les coordonnées des points d'une cubique plane comme fonctions elliptiques d'un paramètre μ, de manière qu'à un point d'inflexion corresponde la valeur $\mu = 0$, les autres points d'inflexion correspondent, comme on sait, aux valeurs

$$\mu = \frac{1}{3}\omega, \quad \frac{2}{3}\omega,$$

$$\frac{1}{3}\omega', \quad \frac{1}{3}\omega + \frac{1}{3}\omega', \quad \frac{2}{3}\omega + \frac{1}{3}\omega',$$

$$\frac{2}{3}\omega', \quad \frac{1}{3}\omega + \frac{2}{3}\omega', \quad \frac{2}{3}\omega + \frac{2}{3}\omega',$$

ω et ω' étant les deux périodes des fonctions considérées.

Tout point de la cubique dont le paramètre ne diffère d'un multiple entier du paramètre d'un point donné que par des multiples entiers des périodes $\left(\frac{1}{3}\omega \text{ et } \frac{1}{3}\omega'\right)$ des points d'inflexion est un dérivé rationnel du point donné. Dans ce

sens la théorie des points qui dérivent rationnellement d'un point donné coïncide avec la théorie des paramètres commensurables.

M. Story applique cette théorie à la détermination des points qui coïncident avec leur dérivé a_{pq}, ainsi qu'à la détermination des polygones à la fois inscrits et circonscrits à la cubique.

Ce Mémoire est suivi d'une « *Note on Totients* » dans laquelle sont touchées diverses questions relatives aux *Arithmetical totics*, c'est-à-dire à la Science qui joue par rapport à la *Théorie des nombres* le même rôle que la *Géométrie énumérative* par rapport à la Géométrie.

Sylvester (*J.-J.*). — Addition à la Note sur les fractions ordinaires. (388-389).

M. Sylvester indique comment on peut reconnaître si un nombre entier p entre en facteur dans quelque nombre de la suite

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,$$

où u_0 entier et $u_{i+1} = u_i^2 - i_i + 1$, suite qu'il a eu à considérer dans sa Note « *On a Point in vulgar Fractions* » insérée dans ce même volume.

Sylvester (*J.-J.*). — Preuve instantanée d'un théorème de Lagrange sur les diviseurs de la forme $Ax^2 + By^2 + Cz^2$, avec une addition sur les diviseurs des fonctions qui divisent les racines primitives de l'unité. (390-392).

Démonstration simple de ce théorème de Lagrange que la congruence

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 \equiv 0 \pmod p$$

est toujours soluble.

M. Sylvester énonce aussi cette proposition :

Lorsqu'on a un nombre premier $p = ef + 1$, où e est un nombre premier te que $e - 1$ ne contient aucun carré de nombre impair, tout diviseur autre que p de la fonction ayant pour racines les e périodes des $\gamma^{ièmes}$ racines primitives de l'unité est un résidu $e^{ième}$ de p. C. St.

REVUE D'ARTILLERIE (¹).

Tome XVI; avril-septembre 1880.

Ce Volume a été déjà signalé au *Bulletin*, mais certaines applications, non indiquées dans un précédent article, nous ont paru mériter une mention spéciale.

(¹) II_2, 127 et IV_1, 206.

Heintz (*A.*). — Mesure des distances dans les batteries de côte. (60-63, 1 pl. et p. 234, 1 fig.).

Certaines côtes possèdent une batterie haute et une batterie basse qui se correspondent et qui ont à peu près les mêmes vues. La batterie haute employant pour la mesure des distances, un télémètre à dépression, l'auteur a recherché un moyen pratique de faire profiter la batterie basse des observations faites à l'autre batterie.

Les expériences exécutées en Italie donnent pour le télémètre Parravicino et l'autostadiomètre Plebani, une erreur moyenne de 9^m et de $11^m,9$ avec une base de 50^m, pour une distance de 1000^m. Il faut compter sur une approximation au moins double pour les batteries dont l'altitude dépasse 100^m.

La formule qui donne la distance du but à deux batteries peut se réduire en tables, ou être traduite par un graphique spéciale. La courbe qu'elle représente est une hyperbole équilatère, mais, pour éviter l'emploi de cette ligne, on peut lui substituer une circonférence qui représente le lieu de tous les points qui correspondent à une même abscisse, lorsque l'inclinaison de la ligne de visée prend toutes les valeurs possibles.

Brongniart (*P.*). — Exécution du tir en brèche à grande distance. (218-231, 4 fig.).

Détermination du point de l'escarpe le plus bas à atteindre.
(On trouve que ce point est au milieu de la hauteur).
Choix de la trajectoire moyenne.
Détermination de l'angle de chute.
Détermination de la charge et de l'angle du tir.
Exécution du tir d'essai et réglage du tir.
Cas particuliers suivant les profils d'escarpe.

Sebert. — Appareils balistiques. (599-620, 4 fig., 1 pl.).

Description de deux appareils enregistreurs destinés à faire connaître :

1° La loi du mouvement de recul d'une bouche à feu et celle du mouvement du projectile (vélocimètre);

2° La loi du mouvement d'un projectile soit dans l'âme d'une bouche à feu, soit dans un milieu résistant.

A l'égard du premier appareil, l'inventeur en attribue la précision à l'utilisation des récents perfectionnements d'appareils électriques dus à M. Marcel Deprez.

Tome XVII; octobre 1880-mars 1881.

Siacci (*F.*). — Balistique rationnelle et balistique pratique. (45-77, 1 fig.).

A quoi sert la Géométrie? Cette question, adressée à Galilée, provoqua une [illegible] réponse qui pourrait fort bien être faite à qui demanderait : à quoi sert la [illegible]stique? Mais si les artilleurs se gardent bien de faire une pareille

tefois on ne peut pas nier que la Balistique ne soit pas aussi employée dans la pratique qu'elle pourrait et devrait l'être.

Sur le champ de bataille, certaines théories balistiques, comme tant d'autres choses, si elles ne sont pas tout à fait inutiles, servent certainement fort peu. Mais l'utilité, la nécessité des choses ne doit pas être mesurée à cette aune. Les canons, la poudre, les projectiles et le reste ne se trouvent pas tout faits sur les champs de bataille; tout cela demande à être, à l'avance et mûrement, étudié, apprêté et éprouvé. C'est précisément dans cette préparation et dans ces études que la Balistique est appelée à rendre d'utiles et importants services.

Ces réflexions judicieuses, dont nous voudrions donner ici le développement, forment l'introduction du Mémoire de M. Siacci. L'auteur s'est proposé de présenter sous une forme accessible à tous, sous la forme d'une table numérique, tout ce que la Balistique peut, dans l'état actuel, offrir de plus pratique et de plus sûr.

Voici quelques-uns des problèmes que cette table permet de résoudre :

I. Un projectile de poids p(KG) et de diamètre a(M) doit être lancé à la distance x avec la vitesse initiale V. On demande la vitesse d'arrivée, l'angle de projection et l'angle de chute.

II. A quelle distance le même projectile aura-t-il une vitesse quelconque V?

III. Avec quelle vitesse doit être lancé un projectile pour que, à la distance x, il ait la vitesse V?

IV. On veut construire un projectile, de poids et de diamètre à déterminer, mais semblable à un autre de poids p et de diamètre a. Le nouveau projectile, lancé avec la vitesse V, doit avoir, à la distance x, la vitesse V.

Après avoir expliqué le mode d'emploi de cette table, l'auteur expose la base scientifique de ses recherches.

Percin (*A.*). — Essai sur le tir fusant des projectiles de campagne. (113-138, 6 fig.).

L'auteur se propose d'étudier les conditions et le réglage du tir fusant, c'est-à-dire du tir des projectiles explosifs. Il s'appuie sur les faits d'expérience suivants :

La gerbe d'éclatement est assimilable à un cône de révolution dont l'axe est à peu près dirigé suivant la tangente à la trajectoire, et dont la demi-ouverture est égale, en moyenne, à 18°;

La gerbe est beaucoup plus dense vers son contour extérieur qu'en son milieu;

Enfin, de toute la portion nourrie de la gerbe, la plus meurtrière est la nappe inférieure.

Gaudin (*A.*). — Effets de la poudre dans les bouches à feu. (224-241).

Considérations simples pouvant servir de guide pour l'emploi de la poudre dans les bouches à feu, et permettant d'arriver à des formules qu'on ne peut établir a[illegible] grandes difficultés.

Chapel. — Calcul des éléments balistiques. (437-453, 1 fig.).

Dans les limites de vitesses utilisées par l'artillerie, la parabole $\rho = CV^3$ serre d'assez près la loi expérimentale de résistance, pour qu'on puisse chercher à la lui substituer dans la détermination des fonctions balistiques.

La substitution devient toute légitime si l'on détermine, pour chaque portée, le coefficient moyen c par la valeur expérimentale de l'angle φ correspondant.

Ainsi entendue, la substitution conduit, pour les angles de chute et les vitesses restantes, dans les limites où la comparaison peut se faire simplement, à des résultats peu différents de ceux que l'on obtiendrait en partant de la loi expérimentale de résistance.

Talayrach (F.). — Essai sur le tir fusant de campagne. (568-579, 5 fig.).

Dans le précédent travail de M. Percin sur le même sujet, il a été admis que l'on ne chercherait à utiliser que la nappe inférieure de la gerbe. L'artillerie allemande préconise plutôt la gerbe supérieure.

L'auteur du nouveau travail a cherché à déterminer la hausse et la durée à donner à la fusée de manière que tous les éclats viennent concourir au résultat.

Il admet, d'après des faits d'expérience, que la gerbe est comprise entre deux cônes de révolution ayant même axe et pour angles, au sommet, l'un 20 à 25°, l'autre 10 à 12°. En outre, la distance au sommet des cônes pour laquelle les éclats sont répartis à raison de 1 par mètre carré est d'environ 30 à 35^m. Il en résulte que la courbe des efficacités du tir diffère de la courbe de probabilités du tir, en ce que son tracé présente une sinuosité rentrante.

Le réglage du tir que l'on en déduit peut s'énoncer ainsi :

Conserver la hausse du tir percutant réglé à 3 coups longs contre 3 coups courts.

Placer le point d'éclatement moyen à 30^m environ en avant du but.

Tome XVIII; avril-septembre 1881.

Wuich (N.). — Tables de tir des mortiers rayés. (40-63).

Réduction, en tables, de diverses formules paraboliques.

Application au tir du mortier rayé de 220^{mm} et du canon de 24 de siège.

Labbez. — Télémètre à miroirs. (64-98, 2 fig.).

Description et mode d'emploi du télémètre à miroirs, inventé par M. Labbez, et adopté pour le service de l'infanterie.

Percin (A.). — Conduite du tir fusant. (173-182).

Modifications aux conclusions du premier travail de l'auteur, en tenant compte de nouvelles proportions attribuées à la gerbe d'éclatement et au rectangle enveloppe des éclats.

Silvestre. — Application de la méthode Siacci à divers projectiles. (236-248).

La méthode employée par M. Siacci pour la résolution des divers problèmes de Balistique présente au moins, sur toutes les méthodes connues, l'avantage de la rapidité et de la simplicité. Comme il n'a pas été fait, sur la résistance opposée par l'air au mouvement des nouveaux projectiles de l'artillerie française, d'expériences permettant d'établir une nouvelle table, la présente note a pour but d'indiquer un moyen d'utiliser, pour des projectiles de formes diverses, la table calculée par M. Siacci pour les projectiles de l'artillerie italienne.

De Barberin. — Considérations sur le tir indirect de campagne. (335-347, 7 fig.).

Examen des conditions les plus favorables pour l'application du tir indirect sur le champ de bataille.

Silvestre. — Étude théorique sur les shrapnels. (409-436, 2 fig.).

Dans un Mémoire du même auteur (p. 236) la méthode imaginée par M. Siacci, pour résoudre les problèmes de tir, avait été appliquée à des projectiles de formes diverses.

Le présent travail a pour objet l'application de la même méthode aux balles sphériques des shrapnels.

Chapel. — Table de logarithmes balistiques. (484-487).

Extension de celle qui a été publiée dans le travail de l'auteur sur le même sujet (t. XVII, p. 437).

Chapel. — Sur une percussion spéciale aux armes rayées. (497-503).

Si une bouche à feu était montée sur des colliers concentriques à l'âme, elle subirait pendant le tir, en même temps qu'un recul longitudinal, une sorte de recul de ***rotation***, et elle prendrait un mouvement hélicoïdal dans ses colliers. L'appui des tourillons empêche ce mouvement d'être sensible, mais la ***percussion de rotation*** n'en existe pas moins.

Les effets de cette percussion sont devenus particulièrement sensibles avec les armes actuelles, à grandes vitesses initiales : ils s'étendent à toutes les parties du système, bouche à feu, affût, châssis, plate-forme.

Cette cause de dégradations dissymétriques s'est nettement manifestée dans de récentes expériences de Krupp, à Meppen.

D'intéressants extraits de divers rapports de commissions d'expériences de Tarbes, Calais, Bourges, etc., ont également confirmé l'importance de ces effets.

L'auteur se propose d'en indiquer la mesure théorique. Il établit que, dans une pièce rayée à gauche, le rapport des percussions exercées sur le tourillon de droite et sur celui de gauche a pour expression $\frac{\sin(\varphi + \eta)}{\sin(\varphi - \eta)}$, η désignant un angle auxiliaire convenablement choisi.

M. le colonel Hojel a établi, de son côté, que le rapport des impulsions de recul à droite et à gauche a pour expression $\frac{\cos(\varphi - \eta)}{\cos(\varphi + \eta)}$. Elle n'est pas à négliger, car elle explique le fait, bien connu, de la déviation vers la droite, de la crosse de l'affût, si la pièce est rayée à gauche.

H. B.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME CINQUIÈME.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME V; 1881. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Pages.

ABEL (N.-H.). — Œuvres complètes de NIELS HENRIK ABEL. Nouvelle édition, publiée aux frais de l'État norvégien, par L. SYLOW et S. LIE.... 457-462

BONCOMPAGNI (B.). — Testamento inedito di NICOLO TARTAGLIA............ 326-327

BOURGUET. — Sur les intégrales eulériennes. (Thèse)................... 43-51

BRODIE (B.-C.). — Le calcul des opérations chimiques, soit une méthode pour la recherche, par le moyen de symboles, des lois de la distribution du poids dans les transformations chimiques. — Traduit de l'anglais par le Dr A. NAQUET.. 137-149

CHARVE (L.). — De la réduction des formes quadratiques ternaires positives et de son application aux irrationnelles du troisième degré...... 16-23

CREMONA (L.) et BELTRAMI (E.). — In memoriam DOMINICI CHELINI Collectanea Mathematica, nunc primum edita, cura et studio L. CREMONA et E. BELTRAMI.. 425-438

DINI (U.). — Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variable reale...................................... 12-16

FAVARO (Ant.). — Inedita Galileiana. Frammenti tratti dalla Biblioteca nazionale di Firenze.. 24-25

— Intorno alla vita ed alle opere di PROSDOCIMO DE' BELDOMANDI, matematico del secolo XV.. 41-43

GOURSAT. — Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique. (Thèse)................................ 355-361

GULDBERG (C.-M.) et MOHN (H.). — Étude sur les mouvements de l'atmosphère. 2e Partie... 325-326

Pages.

GÜNTHER (S.). — Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunctionen ... 150-156
HOLST (Elling.). — Om Poncelets Betydning for Geometrien ... 385
JACOBI (C.-G.-J.). Gesammelte Werke. I. Bd. — STEINER (J.). Gesammelte Werke. I. Bd ... 353
KERVILER (R.). — CLAUDE-GASPARD BACHET, seigneur de MÉZIRIAC, l'un des quarante fondateurs de l'Académie Française. Étude sur sa vie et sur ses écrits ... 385-387
LAISANT (A.). — Introduction à la méthode des quaternions ... 354-355
LIPSCHITZ (R.). — Lehrbuch der Analysis. II. Bd.: Differential- und Integralrechnung ... 5-7
LUCAS (Éd.). — Récréations mathématiques ... 321-325
MALAGOLA (C.). — Lettere inedite di uomini illustri bolognesi ... 217-218
PETERSEN (J.). — Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques, avec application à plus de 400 problèmes; traduit par O. CHEMIN ... 265-267
RESAL (H.). — Traité de Mécanique générale ... 89-93
ROHN (K.). — Lineare und quadratische Transformation der hyperelliptischen Functionen $p = 2$, so wie ihre Bedeutung für die Kummersche Fläche ... 327-336
— Die verschiedenen Gestalten der Kummerschen Fläche ... 361-375
RUBINI (R.). — Complemento di Calcolo infinitisimale ... 94-95
SCHELL (W.). — Theorie der Bewegung und der Kräfte. 2 Aufl. II. Bd... 7-11
SCHUR. — Geometrische Untersuchungen über Strahlencomplexe ersten und zweiten Grades ... 444-447
SEYDLER (A.). — Základové theoretické fysiky. Díl první. Všeobecný úvod a mechanika. Theoretická mechanika pro vysoké školy ... 185-194
WEIERSTRASS. — Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen... 438-444
WORPITZKY (J.). — Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung... 267-270

MÉLANGES.

DARBOUX. — Sur les différentielles des fonctions de plusieurs variables indépendantes. — Note sur une fonction numérique ... 376-384 et 395-424
FUCHS (L.). — Sur les fonctions de deux variables provenant de l'inversion des intégrales de deux fonctions données ... 52-88
HALPHEN. — Sur quelques séries pour le développement des fonctions d'une seule variable ... 462-488
HENRY (C.). — Étude sur le triangle harmonique ... 96-113
HERMITE (C.). — Sur quelques points de la théorie des fonctions ... 312-320
LAISANT (A.). — Sur les séries récurrentes dans leurs rapports avec les équations ... 218-249
LIGUINE (V.). — Sur les aires des courbes anallagmatiques ... 250-264
LIPSCHITZ (R.). — Sur l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2x)^{a+b} \cos(a-b) x\,dx$ ... 387-388
MARRE (Ar.). — Catalogue des étoiles circumpolaires australes observées dans l'île de Sumatra, par FRÉDÉRIC HOUTMAN, en l'année 1600 ... 336-352

Pages.
MITTAG-LEFFLER (G.). — Recherches sur la théorie des fonctions......... 388-392
PELLET (A.-E.). — Sur un mode de séparation des racines des équations et la formule de Lagrange......... 393-395
PEROTT (J.). — Sur la sommation des nombres......... 37-40
— Sur l'infinité des nombres premiers......... 183-184
RADAU (R.). — Travaux concernant le problème des trois corps et la théorie des tautochrones......... 270-295
STEEN (Ad.). — Lettre au rédacteur du *Bulletin*......... 30-36
Sujets de composition donnés dans les examens pour la licence ès sciences mathématiques en 1880......... 295-312
TANNERY (J.). — Sur la suite de Schwab......... 454-456
TANNERY (P.). — Sur le problème des Bœufs d'Archimède......... 25-30
— Quelques fragments d'Apollonius de Perge......... 124-136
TCHEBYCHEF. — Théorème relatif à la courbe de Watt......... 216
TISSERAND (F.). — Sur le mouvement du pendule conique......... 448-454
WEIERSTRASS. — Sur un théorème de M. Mittag-Leffler et sur la théorie des fonctions uniformes......... 113-124
— Remarques sur quelques points de la théorie des fonctions analytiques. 157-183
ZELLER. — De numeris Bernoullii eorumque compositione ex numeris integris et reciprocis primis......... 195-215

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME V.

6067 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME V; 1881. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

American Journal of Mathematics pure and applied. T. I-III; 1878-1880. — 116-124, 155-164, 212-231.
Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. T. IV-V; 1879-1880. — 78-83.
Bulletin de la Société Mathématique de France. T. VIII; 1879-1880. — 5-12.
Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche. T. XI; 1878. — 164-171.
Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. XCI-XCIII; 1880-1881. — 13-25, 83-100, 171-193.
Crónica cientifica, Revista internacional de Ciencias. T. III; 1880. — 124-129.
Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Années 1879-1880. — 129-131.
Journal de l'École Polytechnique. Cah. 47, T. XXVIII; 1880. — 110-116.
Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von C.-W. Borchardt. T. LXXXVIII-LXXXIX; 1880. — 100-110, 193-201.
Mathematische Annalen, herausgegeben von F. Klein und Ad. Mayer. T. XV; 1879. — 139-155.
Monthly Notices of the Royal Astronomical Society of London. T. XL; 1879-1880. — 39-54.
Nouvelles Annales de Mathématiques, rédigées par MM. Gerono et Brisse. 2e série. T. XX, 1er semestre; 1881. — 131-139.
The Observatory, a Monthly Review of Astronomy, edited by W.-H.-M. Christie, T. III; 1879-1880. — [illegible]

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. T. XXXIII-XXXVII; 1876-1880. — 201-211.
Revue d'Artillerie. T. XVI-XVIII; 1880-1881. — 231-236.
Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben von O. Schlömilch, E. Kahl und M. Cantor. T. XXIV-XXV; 1879-1880. — 25-39.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

Abbadie (d'). 55, 58.
Abdank-Abakanowicz. 93, 95.
Abney. 71, 126.
Adams. 40, 52, 53, 67.
Aignan. 139.
Airy. 46, 50, 51, 54, 56, 68, 70, 71, 72, 73, 126.
André (C.). 19, 189.
André (D.). 86, 99.
Angot. 18, 19, 125.
Appell. 15, 21, 84, 98, 176.
Arcimis. 58, 59.
Arsonval (d'). 86.
Åstrand. 205.
Auwers. 77.
Bachmann. 152.
Backhouse. 46, 63, 75.
Backlund. 208.
Bäcklund. 140.
Baillaud. 83, 90, 178.
Baille. 84.
Bakhuyzen (Van de Sande 74.
Baldwin. 74.
Ball. 74, 77.
Barbarin. 133.
Barberin (de). 235.
Barker. 51, 58, 126.
Baxendell. 70, 76.
Beez. 25.
Bell. 126.
Bellavitis. 135.
Berger. 211.
Bernardière (de). 125.
Biehler. 106. 134.
Bierens de Haan. 167.
Bigourdan. 13, 19, 53, 73, 76, 86, 87, 97, 106, 177. 178. 181, 187, 190.
Birt. 55.
Bjerknes. [illegible]
Björling. 201, 202, 205, 208.
Blondlot. 173.
Böklen. 32, 37, 38.
Boncompagni. 168.
Borchardt. 195.
Borrelly. 179.
Börsch. 32, 34.
Bosanquet. 45, 54.
Boss. 70.
Bossert. 19, 20, 23, 128.
Boudènes. 136, 138.
Bouquet de la Grye. 90.
Boussinesq. 95.
Bouty. 173.
Bowden. 41.
Brassinne. 187.
Braun. 38.
Bredikhine. 70.
Bréguet. 14.
Bresse. 175.
Brett. 62, 165.
Brewin. 51.
Brioschi. 17, 90, 148, 175, 183.
Briot (F.). 137.
Brongniart. 232.
Buckney. 50.
Burnham. 44, 53, 64, 67, 70, 73, 74, 76.
Burr. 156, 159.
Burton. 47.
Cailletet. 173.
Callandreau. 15, 126, 190.
Calver. 41.
Campbell. 51, 52.
Cance. 68, 71.
Candèze. 132, 136.
Cantor (G.). 139.
Cantor (M.). 166.
Capron. 59, 64.
Caron. [illegible]

Carrère. 125.
Casorati. 87, 89.
Castelli. 168.
Caverni. 168.
Cayley. 102, 117, 119, 124, 148, 156, 157, 158, 159.
Chambers. 55.
Chandler. 61.
Chapel. 234, 235.
Chapelas. 126.
Charve. 100.
Chase. 126, 162.
Chrétien. 136.
Christie. 50.
Chwolson. 25.
Clariana y Ricart. 125.
Clark. 64, 65.
Clifford. 119, 123.
Coggia. 126, 192.
Colladon. 91.
Collet. 22.
Collignon. 114.
Collin. 134.
Common. 44, 51, 60, 65, 74.
Conche. 126.
Consentius. 36.
Cooper. 74.
Copeland. 42, 44, 50, 52.
Corder. 46, 56, 62.
Cornu (A.). 23, 68, 84.
Crafts. 13.
Craig. 123, 158, 160, 216, 226.
Cretin. 134.
Crofton. 159.
Cronstrand. 206.
Crookes. 172.
Cros. 14.
Crossley. 64.
Croullebois. 86, 95, 177.
Crova. 84, 99.
Cruls. 23, 127, 187, 192.
Curtze. 165.
Dahlander. 203.
Darboux. 20, 83, 86, 90, 93, 97, 185.
Darwin. 57.
Daubrée. 127.
Daug. 202.
David. 14.
Davidson. 67.
Delacourcelle. 136.
Dennett. 62, 65, 71, 77.
Denning. 45, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 75, 77, 126.
Desboves. 135.
Dewulf. 178.
Dillner. 14, 15, 89, 90, 186, 187.
Dixon. 122.
Downing. 43, 46, 52, 61.
Draper. 15, 41, 52, 56, 59, 68, 87, 126, 176.
Dreyer. 58, 72.
Du Bois-Reymond (P.). 150, 173, 176.
Dunand. 84.
Dunér. 202.
Dunkin. 47, 57.
Du Treux. 127.
Eddie. 49.
Eddy. 117, 122, 123.
Edlund. 201, 204, 205, 210.
Egoroff. 192.
Ellery. 42, 45, 49, 51.
Eneström. 125, 210.
Engler. 124.
Enneper. 27, 30, 33.
Escary. 138.
Escriche y Mieg. 127.
Evesque. 138.
Faà de Bruno. 219.
Fagerholm. 209.
Farkas. 88.
Farquhar. 61, 62.
Fauquembergue. 132, 133, 135, 138.
Favaro. 167, 169, 170.
Faye. 83, 92, 125, 127, 176, 177, 181, 186, 190, 191, 192.
Fievez. 95, 127.
Finlay. 67.
Flammarion. 185, 189.
Floquet. 18.
Forbes. 68.
Forssmann. 205.
Frankland. 123.
Franklin. 93, 119, 123, 124, 159, 160, 161. 217, 222.
Franks. 53.
Freeland. 226.
Frenzel. 31.
Frobenius. 103, 104, 195, 198, 199.
Fuchs. 182, 184, 197.
Fürstenau. 195.
Gaiffe. 177.
Gaillot. 18, 127.
Garbieri. 166, 170.
Gasparis (de). 48, 158.
Gaudin. 233.
Gaussin. 127.
Geelmuyden. 82.
Geisenheimer. 27, 31, 37, 38.
Geneix-Martin. 139.
Genese. 135.
Genocchi. 164.
Gibbs. 156.
Giberne (miss). 66.

Giesen. 29.
Gilbert. 166.
Gill. 49, 54.
Giordani. 165.
Glaisher. 54.
Glashan. 123, 221.
Gledhill. 38, 49, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 77.
Goebel. 38.
Gould. 63, 68.
Gouy. 84, 99, 127.
Govi. 125, 192.
Graefe. 37.
Graetz. 29, 32, 38.
Graham Bell. 16.
Green. 50, 62.
Griess. 132, 134.
Gripon. 90.
Grover. 59.
Gruey. 187.
Günther. 26, 29.
Gwynne. 49.
Gyldén. 20, 88, 173, 175, 177, 181, 189, 202, 207, 208, 209, 211.
Haag. 9.
Hagen. 26, 31.
Hahn. 142.
Hall (A.). 48, 62, 75, 77.
Hall (M.). 44.
Halphen. 6, 7, 8, 100, 110, 140, 151, 171, 178, 183.
Halsted. 122, 156.
Hamberg. 206.
Hammond. 122, 220.
Harkness. 41.
Harnack. 155.
Hartwig. 76.
Hauck. 32.
Hautefeuille. 173.
Hazzidakis. 102.
Heaven. 56.
Hedelius. 206.
Heger. 35.
Heintz. 232.
Helm. 37.
Hennessy. 88, 127.
Henry (C.). 131, 137.
Henry (?). 190.
Hepperger. 78.
Hermite. 23, 100, 194.
Herschel (A.-S.). 65.
Herschel (le Major). 40.
Herz. 36.
Hettner. 198.
Hettmann. 30.
Hickley. 72.
Hilaire. 132.
Hill (G.-W.). 117, 119, 122.
Hind. 52, 67.
Hioux. 139.
Hochheim. 25.
Holden. 48, 64.
Holetschek. 68.
Holman. 124.
Holst. 8.
Holzmüller. 30.
Horst. 32.
Houzeau. 64, 73, 77.
Huggins. 75, 127.
Humbert. 9, 10, 12.
Hunt. 60, 74, 75.
Hunyady. 133, 195.
Hurion. 94.
Hurwitz. 140.
Hyde. 227.
Ibañez. 65.
Jablonski. 138.
Jäderin. 202, 210.
Jaerisch. 104.
Jamin. 177, 191.
Janisch. 67.
Janssen. 90, 94, 127, 171, 187.
Johnson (S.-J.). 52, 53, 57, 64.
Johnson (W.). 162, 227.
Jordan (C.). 88, 184, 188, 189, 190.
Kantor. 12, 26, 34.
Kempe. 159.
Kendall. 122.
Key. 47.
Kiepert. 106.
Killing. 199.
Kirk. 72.
Kirkwood. 59, 60, 63, 66, 67, 75.
Klein (F.). 141, 148, 152.
Knobel. 53.
Knott. 44, 70, 74.
König. 144.
Königs. 131.
Königsberger. 144, 196.
Konkoly (v.). 51, 57, 60, 61, 74, 75, 76, 126.
Krey. 36, 148.
Kröber. 38.
Küstner. 58.
Küttner. 29, 33.
Labbez. 234.
Ladd (miss). 155, 224.
Laguerre. 5, 6, 7, 12, 18, 85, 89, 101, 179, 201.
Laisant. 9.
Lamey. 128.
Lamont. 47, 60.
Lancaster. 64.

Landerer. 128.
Landolt. 125.
Landry. 125.
Langley. 71, 72, 99.
Laquière. 9, 11.
Larsson. 209.
Lassell. 75.
Laudiero. 36.
Laurent. 99, 173.
Laurent (H.). 132.
Laussedat. 19.
Léauté. 9, 114, 176.
Lebon. 7, 134, 138.
Lebrun. 132.
Leclerc. 125.
Lecornu. 17, 98.
Ledger. 59, 61, 63, 69.
Lefébure. 125.
Lehmann. 37.
Leinekugel. 136.
Le Paige. 10, 89, 97, 148, 177, 178, 191, 193.
Le Roux. 99.
Lesseps (de). 179.
Lez. 134.
Lie. 78, 79, 80, 81, 82, 83, 130, 152.
Lindman. 203, 206, 209, 210, 211.
Lindsay (lord). 41, 44.
Liouville. 108.
Lippmann. 88, 177.
Lipschitz. 14, 15, 123.
Lockyer. 173.
Lœwy. 55, 125, 189, 192.
Lohse. 42, 44, 54, 72.
Loudon. 124, 221.
Lucas (Éd.). 11, 12, 119, 131, 158, 170.
Lynn. 43, 49, 76.
Mac Clintock. 158, 162, 221.
Maclear. 47, 60.
Mallet. 122.
Marey. 125.
Markoff. 151.
Marre (Ar.). 125.
Marth. 43, 46, 52, 53, 61, 62, 63.
Martin (H.). 70.
Mathieu (É.). 87, 125.
Matthiessen. 25, 31, 35, 90.
Maunder. 58.
Mayer (Ad.). 165.
Mazzucchelli (Cie). 168.
Mehmke. 30.
Meissel. 151.
Meldola. 128.
Melon. 87.
Melsens. 193.
Mercadier. 19, 87, 93, 94, 99.
Mertens. 37, 201.
Meyer (M.-W.). 76.
Michaux. 132.
Milinowski. 197.
Millosevich. 43, 164.
Mitchell (O.-H.). 226.
Mittag-Leffler. 22, 202, 204, 205, 206, 209, 210.
Möller. 208, 209.
Moret-Blanc. 133, 135, 137, 138, 139.
Morris. 49.
Mouchez. 14, 17, 91, 94, 126, 128, 171, 178, 184, 189, 191.
Moutard. 24.
Muir. 123.
Neison. 40, 43, 49, 51, 52.
Netto. 101.
Newcomb. 43, 73, 116, 222.
Neyreneuf. 99.
Niemöller. 26, 31, 33, 34, 36.
Niesten. 56.
Noble. 43.
Noether. 141, 152.
Nyström. 202.
Ocagne (d'). 137.
Olivier. 66.
Oppolzer (v.). 73, 78, 125.
Pasch. 198. 199.
Pearson. 39.
Peckham. 60.
Pecquery. 136.
Peirce. 118, 126, 162, 164, 212.
Penrose. 59, 67.
Pepin. 87.
Percin. 233, 234.
Périgaud. 189.
Perrier. 65, 126.
Perry. 45, 46, 138.
Peters (C.-A.-F.). 70.
Peters (C.-H.-F.). 72. 77.
Petersen. 161 196.
Petterson. 206, 208, 209.
Pfannstiel. 38.
Phillips. 124.
Picard (E.). 16, 24, 92, 94, 97, 98, 182, 186.
Picart (A.). 134, 135, 137, 187, 190.
Pickering. 66, 67, 71, 128.
Pilgrim. 28.
Plantamour. 91.
Plummer (J.-I.). 55, 64, 74.
Plummer (W.). 49.
Poincaré. 17, 91, 92, 99, 100, 115, 172, 173, 175, 180, 181, 182, 184, 187, 189, 191.
Polignac (de). 10.
Pratt. 46, 66, 72, 77.
Praźmowski. 187, 190.

ırd. 47, 49, 58, 64, 78.
ɛtt. 60, 65.
x (P.). 178.
x (V.). 171.
n. 60.
13.
ɟ1.
aninoff. 28.
e. 199.
ıatha Chary. 68.
·d. 57.
128.
136.
87, 126.
hi. 192.
our. 89.
ds. 74.
s (S.). 228.
on. 73.
gny (de). 120.
11.
151.
·. 27.
y (W. de). 8.
s. 107.
209.
. 101.
. 83, 85.
ıx. 181.
ıd. 117, 162, 216, 226.
(H.-C.). 51, 60, 73.
50.
. 53.
ɔoup. 185.
ɩ4.
·. 56, 57, 59, 66.
45, 54.
rle. 128.
ıg. 94.
ɜl (V.). 26, 27.
ıilch. 33, 35, 36, 38, 39.
lt (A.). 26.
lt (J.-F.-J.). 55, 57, 128.
:. 137.
mann. 39
liess. 26.
er. 36, 37.
rt. 8, 109, 152.
of. 19, 20, 23, 128.
:. 55.
ann. 35.
27, 39, 152.
ɛr. 42.
loff. 191.
·ing. 31, 32, 33, 37.
232.
8.
Siacci. 168, 232.
Silvestre. 235.
Smith. 128.
Smyth (Piazzi). 71, 72, 73.
Somof. 167.
Spitzer. 110.
Stahl (H.). 104, 108, 197.
Stephan. 55, 128, 178, 179, 181.
Stephanos. 180.
Stern (M.). 102.
Stickelberger. 104.
Stieltjes. 201.
Stier. 39.
Stoltz. 142, 155.
Stone (O.). 160, 227.
Story. 119, 159, 229.
Stringham. 159, 212.
Sturm (R.). 107, 151.
Swift. 67, 128.
Sylvester. 100, 102, 118, 123, 124, 156, 157, 160, 161, 162, 177, 190, 191, 215, 221, 227, 231.
Talayrach. 334.
Tacchini. 23, 24, 42, 58, 94, 128, 190, 192.
Tebbutt. 50, 52, 55, 65, 71, 72, 76.
Tempel. 13, 54, 129, 192.
Terby. 68, 71.
Terquem. 93.
Thiele. 203.
Thieme. 28.
Thollon. 15, 87, 129, 187, 190, 192.
Thomae. 26, 33.
Thompson. 129.
Thomson (W.). 193.
Tisserand. 19, 62, 87, 96, 97, 129, 187.
Todd. 47, 49, 65, 71, 182.
Trépied. 94.
Tresca. 179, 185.
Trève. 95.
Trouvelot. 68.
Turner. 129.
Turquan. 181.
Valdo. 61.
Vaughan. 63.
Victor. 38.
Villarceau (Y.). 171, 186, 187, 193.
Villari. 173.
Violle. 173.
Vogel. 49, 76.
Voigt. 197, 200.
Voss. 151.
Wagner. 53.
Waltenhofen (v.). 34.
Webb. 44.
Weber (H.). 102.
Weichold. 117.

Weierstrass. 193.
Weiler. 27, 29.
Weill. 133, 135.
Wenström. 209.
Werebrusoff. 129.
West. 13, 15, 16, 181.
Whitcom. 228.
Wiedemann. 54.
Wiener. 35.
Wilding. 40.
Willotte. 192.
Wilson. 64.
Winnecke. 42, 44, 60, 78.
Wittwer. 28, 39.
Witz. 93.
Wolf (C.). 49, 70, 172, 181, 187, 191.
Wolf (R.). 129.
Wuich. 234.
Yarnall. 62.
Young (C.-A.). 56, 63, 70, 77, 129.
Z.... 129.
Zech (P.). 27.
Zelbr. 68, 78.
Zenger. 192.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME V.

6937 Paris — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.






DATE DUE
JUN 26 1984

